

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN LAN ANH

GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP
THÔNG QUA SỐ PHỨC VÀ HÀM PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Thái Nguyên - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN LAN ANH

GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP
THÔNG QUA SỐ PHỨC VÀ HÀM PHỨC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS NGUYỄN VĂN MINH

Thái Nguyên - 2012

Mục lục

Mở đầu	2
1 XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC	4
1.1 Định nghĩa số phức	4
1.2 Dạng đại số của số phức	6
1.2.1 Xây dựng số i	6
1.2.2 Các phép toán trên dạng đại số	7
1.2.3 Số phức liên hợp và Môđun của số phức	7
1.3 Dạng lượng giác của số phức	10
1.3.1 Tọa độ cực của số phức	10
1.3.2 Biểu diễn lượng giác của số phức	11
1.3.3 Phép toán trong dạng lượng giác của số phức	11
1.4 Căn bậc n của đơn vị và biểu diễn hình học của số phức . .	12
1.4.1 Căn bậc n của số phức	12
1.4.2 Biểu diễn hình học của số phức	13
2 ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC VÀO ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH	16
2.1 Ứng dụng của số phức vào đại số	16
2.2 Ứng dụng vào giải tích	26
3 ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC VÀO HÌNH HỌC	28
3.1 Các định lý	28
3.2 Các ví dụ	30
Kết luận	59
Tài liệu tham khảo	60

Mở đầu

Số phức xuất hiện từ thế kỷ XIX do nhu cầu phát triển của Toán học về giải những phương trình đại số mới. Từ khi mới ra đời số phức đã thúc đẩy toán học tiến lên mạnh mẽ và giải quyết được nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật, vì thế mặc dù gọi là số ảo nhưng trường đóng vai trò rất quan trọng trong đời sống thực của chúng ta.

Đối với học sinh ở bậc trung học phổ thông thì số phức là một nội dung còn khá mới mẻ, với thời lượng không nhiều, học sinh mới chỉ biết được những kiến thức rất cơ bản của số phức, việc khai thác các ứng dụng của số phức còn rất hạn chế, đặc biệt là khai thác số phức để giải quyết các bài toán sơ cấp khó.

Nhằm mục đích tìm hiểu một cách chi tiết hơn về số phức cũng như có cách nhìn sâu sắc hơn về một số ứng dụng của số phức trong việc giải các bài toán sơ cấp nên tôi quyết định chọn đề tài nghiên cứu: “Giải một số bài toán sơ cấp thông qua số phức”.

Luận văn này gồm ba chương:

Chương 1: Giới thiệu về số phức, chứng minh trong tập số phức này có các phép toán cộng và nhân như trên tập số thực, đồng thời giới thiệu các dạng biểu diễn của nó cũng như tính chất đặc trưng trong từng dạng.

Chương 2: Giới thiệu một số ví dụ về ứng dụng của số phức trong đại số và giải tích.

Chương 3: Giới thiệu một số ví dụ về ứng dụng của số phức trong hình học phẳng.

Mặc dù đã rất cố gắng nghiên cứu tài liệu và bằng những kinh nghiệm giảng dạy của bản thân mình tác giả đã hoàn thành luận văn. Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ thời gian, chắc chắn rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo và đóng góp ý kiến của quý thầy (cô) và độc giả quan tâm đến luận văn này.

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS.Nguyễn Văn Minh. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc, chân thành nhất đối với Thầy. Bởi sự giúp đỡ, chỉ bảo, khuyến khích ân cần của Thầy đã góp phần rất lớn cho sự thành công của luận văn này.

Tác giả cũng xin được bày tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới Ban lãnh đạo, Phòng Đào tạo-Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô tham gia giảng dạy khóa Cao học 2010-2012. Đồng thời xin cảm ơn tập thể lớp Cao học Toán K4A Trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Cuối cùng tôi xin được gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, những người thân đã luôn ở bên, động viên, giúp đỡ để tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 7 năm 2012

Người thực hiện

Nguyễn Lan Anh

Chương 1

XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Trong chương này, chúng tôi trình bày cách xây dựng trường số phức, cấu trúc đại số, cấu trúc hình học, dạng lượng giác của số phức.

1.1 Định nghĩa số phức

Xét tập $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Hai phần tử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ được gọi là bằng nhau nếu và chỉ nếu

$$(x_1 = x_2, y_1 = y_2)$$

Ta xây dựng phép toán trong $\mathbb{R}^2$ như sau: $\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Phép cộng: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Phép nhân: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Định nghĩa 1.1.1. Tập $\mathbb{R}^2$ cùng với hai phép toán cộng và nhân được định nghĩa như trên gọi là tập số phức $\mathbb{C}$, phần tử $(x, y) \in \mathbb{C}$ là một số phức.

Định lý 1.1.2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ là một trường (nghĩa là trên $\mathbb{C}$ với các phép toán đã định nghĩa có các tính chất tương tự trên $\mathbb{R}$ với các phép toán cộng nhân thông thường)

Chứng minh. Để chứng minh $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ là trường ta chứng minh các vấn đề sau.

(i) Phép cộng có tính giao hoán:

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ ta có

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1.$$

(ii) Phép cộng có tính kết hợp:

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = z_1 + (z_2 + z_3).\end{aligned}$$

(iii) Tồn tại phần tử không $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$.

Thật vậy ta có: $\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}, z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$.

(iv) Tồn tại phần tử đối $\forall z = (x, y), \exists -z = (-x, -y)$ là phần tử đối:

Thật vậy $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$.

(v) Phép nhân có tính chất giao hoán:

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, ta có:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) = z_2 z_1.$$

(vi) Phép nhân có tính chất kết hợp:

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\begin{aligned}(z_1 z_2) z_3 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2)x_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)y_3, (x_1 x_2 - y_1 y_2)y_3 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)x_3) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 y_3, x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3) \\ &= (x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(y_2 x_3 + x_2 y_3), y_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) + x_1(x_2 y_3 + y_2 x_3)) \\ &= (x_1, y_1)((x_2, y_2)(x_3, y_3))\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ: $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$.

(vii) Phép nhân phần tử đơn vị.

Tồn tại phần tử đơn vị $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$.

Thật vậy ta có: $\forall z_1 = (x, y) \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}1.z &= (1, 0)(x, y) = (1x - 0y, 1y + 0x) = (x, y) = (x, y)(1, 0) \\ &= (x1 - y0, x0 + y1) = (x, y) = z1 = z.\end{aligned}$$

(viii) Tồn tại phần tử nghịch đảo:

$$\forall z_1 = (x, y) \in \mathbb{C}, z \neq 0, \text{ phần tử nghịch đảo của } z \text{ là } z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

(ix) Phép nhân phân phối với phép cộng:

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3); x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\ &= z_1z_2 + z_1z_3. \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ thỏa mãn các tiên đề của trường. Do đó $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ là một trường số. $\square$

Có rất nhiều cách biểu diễn của số phức trên, mà mỗi cách có thể khai thác được một số tính chất đặc biệt khác nhau của tập $\mathbb{C}$, sau đây tôi giới thiệu một số cách biểu diễn đó.

1.2 Dạng đại số của số phức

1.2.1 Xây dựng số i

Xét tương ứng $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_x\{0\}, f(x) = (x, 0)$

Dễ dàng chứng minh được f là ánh xạ và hơn nữa là một song ánh.

Ngoài ra ta cũng có: $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), (x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$, vì f là song ánh nên ta có thể đồng nhất $(x, 0) = x$.

Đặt $i = (0, 1)$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) \\ &= x + yi = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy. \end{aligned}$$

Từ đó ta có kết quả sau:

Định lý 1.2.1. *Mỗi số phức tùy ý $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$$

trong đó hệ thức $i^2 = -1$.

Hệ thức $i^2 = -1$ suy trực tiếp từ phép nhân hai số phức

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Biểu thức $x + yi$ gọi là dạng đại số của số phức $z = (x, y)$.

Do đó $\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ và từ bây giờ ta ký hiệu cho số phức $z = (x, y) = x + yi$ và ta có các khái niệm liên quan sau đây:

$x = \operatorname{Re}(z)$ gọi là phần thực của số phức z ,

$y = \operatorname{Im}(z)$ gọi là phần ảo của số phức z ,

i gọi là đơn vị ảo.

Nếu số phức có phần thực $x = 0$ gọi là thuần ảo.

Hai số phức z_1, z_2 gọi là bằng nhau nếu

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

Số phức $z \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Số phức $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ nếu $\operatorname{Im}(z) \neq 0$.

1.2.2 Các phép toán trên dạng đại số

Tương tự, ta cũng định nghĩa phép toán cộng và nhân như sau

$$\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

(i). Phép cộng

Tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, là một số phức z được xác định:

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in \mathbb{C}$$

Kí hiệu $z = z_1 + z_2$.

(ii). Phép nhân

Tích của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là một số phức z được xác định bởi:

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C}$$

Kí hiệu $z = z_1z_2$.

Định nghĩa này trùng với định nghĩa các phép toán trên $\mathbb{C}$ ở phần trước.

1.2.3 Số phức liên hợp và Môđun của số phức

Định nghĩa 1.2.2. Cho số phức $z = x + iy$, số phức có dạng $x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức z , kí hiệu là $\bar{z}$, nghĩa là $z = x + yi$ và $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Định lý 1.2.3. Trên $\mathbb{C}$ ta có.

$$1. z = \bar{z}, \forall z \in \mathbb{R}$$

$$2. z = \overline{\bar{z}}$$

$$3. z \cdot \bar{z} \text{ là số thực không âm.}$$

$$4. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$5. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$6. \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, z \in C^*$$

$$7. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \in C^*$$

$$8. \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Chứng minh. 1. Ta có: $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi$. Do đó $2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z = x \in \mathbb{R}$.

$$2. \text{ Ta có: } \bar{z} = x - yi \Rightarrow \overline{\bar{z}} = x + yi = z.$$

$$3. \text{ Ta có: } z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \geq 0$$

$$4. \text{ Ta có: } \overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$$

$$= (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$5. \text{ Ta có: } \overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$= (x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$6. \text{ Ta có: } z \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \overline{\left(z \frac{1}{z}\right)} = \bar{1} \Rightarrow \bar{z} \frac{\bar{1}}{\bar{z}} = 1 \Rightarrow \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$

$$7. \text{ Ta có: } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \frac{\bar{1}}{\bar{z}_2} = \bar{z}_1 \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$8. z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$$

$$\text{Do đó : } \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

□

Định nghĩa 1.2.4. Cho số phức $z = x + iy$ khi đó $\sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là modul của số phức z ký hiệu $|z|$.

Định lý 1.2.5. Cho số phức z , khi đó

1. $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|, -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$
2. $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
5. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
7. $|z^{-1}| = |z|^{-1}, z \in \mathbb{C}^*$
8. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \in \mathbb{C}^*$
9. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
10. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Chứng minh. Các mệnh đề (1-4) suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

- (5) Ta có $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- (6) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$$= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2.$$

Ngoài ra, $\overline{z_1 \bar{z}_2} = \overline{\bar{z}_1 z_2} = z_1 \bar{z}_2$.

Nên suy ra $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2 |z_1 \bar{z}_2| = 2 |z_1| |\bar{z}_2| = 2 |z_1| |z_2|$.

Do đó $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.

Hay $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Mặt khác, $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$.

Suy ra $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

- (7) Ta có: $z \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow |z| \left| \frac{1}{z} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

Nên $|z^{-1}| = |z|^{-1}, z \in \mathbb{C}^*$.

- (8) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \frac{1}{z_2} \right| = |z_1 z_2^{-1}| = |z_1| |z_2|^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

•(9) Tương tự trong phần (6) ta cũng có: $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$.

Nên suy ra: $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

Ngoài ra: $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Bất đẳng thức: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ là đẳng thức $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1, \bar{z}_2) = |z_1||z_2|$.

•(10) Ta có: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$$\begin{aligned} &= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

□

1.3 Dạng lượng giác của số phức

Ở dạng này cho ta thấy tính chất đặc biệt về lũy thừa của một số phức thông qua định lý Moiver.

1.3.1 Tọa độ cực của số phức

Trong mặt phẳng Oxy cho $M(x, y)$ khác gốc tọa độ. Số thực $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là bán kính cực của điểm M , số đo $\theta \in [0, 2\pi)$ của góc lượng giác $(\vec{Ox}, \vec{OM})$ gọi là argument của M , cặp có thứ tự (r, θ) gọi là tọa độ cực của điểm M , viết $M(r, \theta)$.

Chú ý: Ánh xạ $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} - (0, 0) \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, $h(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ là một song ánh.

Điểm gốc O là điểm duy nhất có $r = 0$, θ không xác định. Mỗi điểm M trong mặt phẳng có duy nhất điểm $P(1, \theta)$ là giao điểm của tia OM với đường tròn đơn vị tâm O . Rõ ràng:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Ngoài ra ta cũng có thể định nghĩa argument của số phức z như sau:

$$\forall z \neq 0, \theta \in [0, 2\pi), \cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

1.3.2 Biểu diễn lượng giác của số phức

Cho số phức $z = x + yi$ ta có thể viết z dưới dạng cực:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$r = |z| \in [0, \infty)$, θ là 1 argument và $\theta \in [0, 2\pi)$

Với $z \neq 0$ và $r > 0$.

Xét: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, đặt $\alpha = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì

$$\begin{aligned} z &= r[\cos(\alpha - 2k\pi) + i\sin(\alpha - 2k\pi)] \\ &= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{aligned}$$

Tức là với số phức z bất kỳ ta luôn viết được dưới dạng

$$z = r(\cos t + i\sin t), r \geq 0, t \in \mathbb{R}$$

Khi đó ta nói z được biểu diễn dạng lượng giác.

1.3.3 Phép toán trong dạng lượng giác của số phức

Cho hai số phức $z_1, z_2 \neq 0$, có biểu diễn dạng lượng giác $z_1 = r_1(\cos t_1 + i\sin t_1)$, $z_2 = r_2(\cos t_2 + i\sin t_2)$ khi đó:

Hai số z_1, z_2 gọi là bằng nhau nếu nếu $r_1 = r_2$ và $t_1 - t_2 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tích hai số phức $z_1 \cdot z_2$ là số phức được xác định:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)), t_1, t_2 \geq 0$$

Thương hai số phức $\frac{z_1}{z_2}$ là số phức được xác định:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)) \text{ với } t_1 \geq 0, t_2 > 0$$

Định lý 1.3.1. (De Moivre) Cho $z = r(\cos t + i\sin t)$ và $n \in \mathbb{N}$, khi đó ta có:

$$z^n = r^n (\cos nt + i\sin nt)$$

Chú ý: Công thức De Moivre vẫn đúng cho lũy thừa nguyên âm.

Ngoài ra $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ còn được biểu diễn dưới dạng gọi là biểu diễn số phức dưới dạng mũ.

Mệnh đề 1.3.2. Với mọi $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ ta có:

$$1. e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$2. e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$$

$$3. \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

$$4. |e^{i\varphi}| = 1$$

Chứng minh. Đối với mệnh đề (1), (2), (4) suy ra trực tiếp từ định nghĩa và tính chất của lũy thừa. Ta chứng minh cho mệnh đề (3). Ta có:

$$\begin{aligned}\overline{e^{i\varphi}} &= \overline{\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)} = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) \\ &= e^{-i\varphi}\end{aligned}$$

□

1.4 Căn bậc n của đơn vị và biểu diễn hình học của số phức

1.4.1 Căn bậc n của số phức

Định nghĩa 1.4.1. Cho số phức $w \neq 0$ và số nguyên $n \geq 2$. Khi đó nghiệm z của phương trình $z^n - w = 0$ là căn bậc n của số phức z

Mệnh đề 1.4.2. Cho số phức $w = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, với $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$. Khi đó căn bậc n của số phức w gồm n số phân biệt xác định bởi :

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Chứng minh. Xét dạng lượng giác của số phức $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ khi đó

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Ngoài ra ta có $z^n = w$ nên ta suy ra:

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

Do đó: $\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình $z^n - w = 0$ có dạng:

$$z_k = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_{n-1} < 2\pi$ nên $\varphi_k, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ là argument cực. Bởi tính duy nhất của tọa độ cực ta suy ra phương trình có n nghiệm $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$. Mặt khác với số nguyên k tùy ý, gọi $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ là hệ thặng dư theo modun n (nghĩa là chia k cho n ta

được các số dư $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.)

Khi đó $\varphi_k = \frac{\theta}{n} + (nq + r) \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + r \frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \varphi_r + 2q\pi$.

Điều này suy ra: $z_k = z_r$ hay $\{z_k, k \in Z = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}\}$.

□

Định nghĩa 1.4.3. Nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$ gọi là căn bậc n của đơn vị.

Từ định nghĩa ta thấy rằng căn bậc n của đơn vị là:

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Người ta ký hiệu cho tập các căn bậc n của đơn vị là $U_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ (U_n là nhóm nhân cyclic cấp n .)

Số $\omega^k \in U_n$ gọi là căn nguyên thủy bậc n của đơn vị nếu mọi số nguyên dương $m < n$ ta có $w_k^m \neq 1$.

Mệnh đề 1.4.4. a) Nếu $n|q$ thì nghiệm bất kỳ của $z^n - 1 = 0$ cũng là nghiệm $z^q - 1 = 0$.

b) Các nghiệm chung của phương trình $z^m - 1 = 0$ và $z^n - 1 = 0$ là các nghiệm của $z^d - 1 = 0$, $d = UCLN(m, n)$, tức là $U_m \cap U_n = U_d$.

c) Các nghiệm nguyên thủy của $z^m - 1 = 0$ là

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}, 0 \leq k \leq m, UCLN(k, m) = 1.$$

Mệnh đề 1.4.5. Nếu $\omega \in U_n$ là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị thì các nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$ là: $\omega^r, \omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+n-1}$, r là một số nguyên dương cho trước.

1.4.2 Biểu diễn hình học của số phức

Định nghĩa 1.4.6. Điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy gọi là điểm biểu diễn hình học của số phức $z = x + yi$.

Số phức $z = x + yi$ gọi là tọa độ phức của điểm $M(x, y)$, ta dùng ký hiệu $M(z)$ để chỉ tọa độ phức của điểm M là z .

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức như trên gọi là mặt phẳng phức. Ngoài ra, trên mặt phẳng phức người ta cũng đồng nhất số phức $z = x + yi$ với $\vec{v} = \overrightarrow{OM}, M(x, y)$.

Định nghĩa 1.4.7. Cho số phức $z = x + yi$ có biểu diễn hình học là $M(z)$, khi đó khoảng cách từ $M(z)$ đến O là Môđun của số phức z .

Xét hai số phức $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ và các véc tơ tương ứng $\vec{v}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, \vec{v}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$, khi đó:

- Tổng hai số phức: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)i$.
- Tổng hai véc tơ: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j}$.

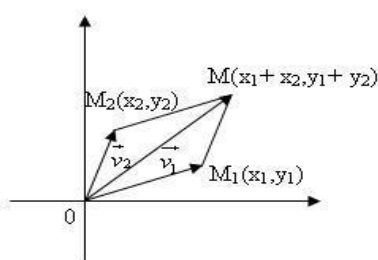
Qua biểu diễn ta thấy tổng hai số phức $z_1 + z_2$ tương ứng với tổng hai véc tơ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

- Hiệu hai số phức: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2)i - (y_1 - y_2)i$.
- Hiệu hai véc tơ: $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j}$.
- Khoảng cách hai điểm $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ bằng môđun của số phức $z_1 - z_2$ bằng độ dài của $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

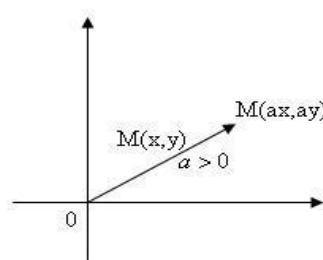
$$M_1M_2 = |z_1 - z_2| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- Nếu λ là số thực thì tích $\lambda.z = \lambda x + \lambda yi$ tương ứng với véc tơ $\lambda \vec{v} = \lambda x \vec{i} + \lambda y \vec{j}$.

- Tích của hai số phức $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, và gọi $M_1(r_1, \theta_1), M_2(r_2, \theta_2)$ là tọa độ cực tương ứng của điểm M_1, M_2 , gọi P_1, P_2 là giao điểm của đường tròn $C(O, 1)$ với tia OM_1, OM_2 . Dựng P_3 thuộc đường tròn có argument cực $\theta_1 + \theta_2$, chọn M_3 thuộc tia $OP_3 : OM_3 = OM_1 \cdot OM_2$. Gọi z_3 là tọa độ phức của điểm M_3 khi đó $M_3(r_1r_2, \theta_1 + \theta_2)$ là điểm biểu diễn của tích $z_1 \cdot z_2$.



Hình 1.1 a Biểu diễn tổng hai số phức



Hình 1.1 b Biểu diễn tích một số thực dương và một số phức

Hình 1.1: Biểu diễn hình học của số phức.

Chú ý:

- (i) Với số thực dương r tập hợp các số phức với Môđun r biểu diễn trên mặt phẳng phức là đường tròn $C(O, r)$.
- (ii) Các số phức $\{z, |z| < r\}$ là các điểm nằm trong đường tròn $C(O, r)$.
- (iii) Các số phức $\{z, |z| > r\}$ là các điểm nằm ngoài đường tròn $C(O, r)$.

Mệnh đề 1.4.8. Biểu diễn hình học của các căn bậc $n > 2$ của $w \neq 0$ là đỉnh của n giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{r}, r = |w|$.

Chứng minh. Gọi các điểm biểu diễn của các số phức $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ trên mặt phẳng phức là $M_0(z_0), M_1(z_1), \dots, M_{n-1}(z_{n-1})$. Khi đó ta có :

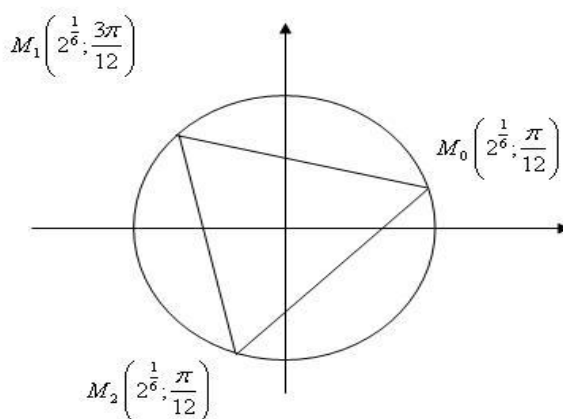
$$OM_k = |z_k| = \sqrt[n]{r}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Suy ra $M_k \in C(O, \sqrt[n]{r})$. Mặt khác, số đo cung cung $M_k M_{k+1}$ bằng:

$$\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{\theta + 2(k+1)\pi - (\theta + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-2\}.$$

Cung còn lại có số đo được xác định như sau: số $M_{n-1} M_0 = 2\pi - (n-1) \frac{2\pi}{n}$.

Từ đó suy ra các cung trên có số đo bằng nhau, hay đa giác $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ đều.



Hình 1.2: Biểu diễn các căn bậc 3 của số phức $z = 1 + i$.

□

Chương 2

ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC VÀO ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

2.1 Ứng dụng của số phức vào đại số

Ví dụ 2.1.1. Chứng minh công thức lượng giác sau:

$$\sin 5t = 16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t \quad (2.1)$$

$$\cos 5t = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t \quad (2.2)$$

Lời giải: Áp dụng công thức Moiver ta có:

$$(\cos t + i\sin t)^5 = \cos 5t + i\sin 5t$$

Ngoài ra theo khai triển nhị thức:

$$\begin{aligned} (\cos t + i\sin t)^5 &= \cos^5 t + 5i\cos^4 t \sin t + 10i^2 \cos^3 t \sin^2 t + 10i^3 \cos^2 t \sin^3 t \\ &\quad + 5i^4 \cos t \sin^4 t + i^5 \sin^5 t \\ &= \cos^5 t - 10\cos^3 t (1 - \cos^2 t) + 5\cos t (1 - \cos^2 t)^2 \\ &\quad + i \left(5\sin t (1 - \sin^2 t)^2 - 10(1 - \sin^2 t) \sin^3 t + \sin^5 t \right) \end{aligned}$$

Đồng nhất phần thực, phần ảo hai biểu thức trên ta được điều phải chứng minh.

Tương tự ta có $\cos 5t = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t$ (2.2).

Ví dụ 2.1.2. Chứng minh rằng: $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$
(*International Mathematical Olympiad - Poland 1963*)

Lời giải. Xét phương trình $x^7 + 1 = 0$. Dễ thấy các nghiệm của phương trình là các căn bậc 7 của số -1. Tức là tập nghiệm của phương trình là:

$$\left\{ e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, \dots, e^{i\frac{13\pi}{7}} \right\}.$$

Mặt khác $e^{i\frac{\pi}{7}} + e^{i\frac{3\pi}{7}} + \dots + e^{i\frac{13\pi}{7}} = e^{i\frac{\pi}{7}} \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{7}} \right)^7 - 1}{e^{i\frac{2\pi}{7}} - 1} = 0$ nên tổng phần

thực của nó bằng không. Do đó

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{7\pi}{7} + \cos \frac{9\pi}{7} + \cos \frac{11\pi}{7} + \cos \frac{13\pi}{7} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.1.3. a, Chứng minh rằng:

$$\cos 5\alpha = \cos^5 \alpha - 10\cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5\cos \alpha \sin^4 \alpha$$

$$\sin 5\alpha = \sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos^4 \alpha$$

b, Chứng minh rằng với mỗi n nguyên

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots$$

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

Lời giải. a, Áp dụng công thức của Moavơ và định lí nhị thức Newton, ta có:

$$\begin{aligned} \cos 5\alpha + i \sin 5\alpha &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^5 = \\ &= \cos^5 \alpha + 5\cos^4 \alpha i \sin \alpha + 10\cos^3 \alpha (i \sin \alpha)^2 + 10\cos^2 \alpha (i \sin \alpha)^3 \\ &\quad + 5\cos \alpha (i \sin \alpha)^4 + (i \sin \alpha)^5 \\ &= \cos^5 \alpha - 10\cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5\cos \alpha \sin^4 \alpha + i(5\cos^4 \alpha \sin \alpha - 10\cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha) \end{aligned}$$

So sánh phần thực và phần ảo của vế trái và vế phải, ta nhận được điều phải chứng minh.

b, Giải tương tự như phần a, ta có:

$$\begin{aligned}\cos n\alpha - i \sin n\alpha &= (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n = \\ &= \cos^n \alpha + C_n^1 \cos^{n-1} \alpha i \sin \alpha + C_n^2 \cos^{n-2} \alpha (i \sin \alpha)^2 - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha (i \sin \alpha)^3 \\ &\quad + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha (i \sin \alpha)^4 + \dots \\ &= (\cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots) \\ &\quad + i(C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots).\end{aligned}$$

So sánh phần thực và phần ảo của vế trái và vế phải, ta nhận được điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.1.4. Biểu diễn biểu thức $\tan 6\alpha$ qua $\tan \alpha$.

Lời giải:

Theo công thức của Ví dụ 2.1.3 b, ta có:

$$\tan 6\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} = \frac{6\cos^5 \alpha \sin \alpha - 20\cos^3 \alpha \sin^3 \alpha + 6\cos \alpha \sin^5 \alpha}{\cos^6 \alpha - 15\cos^4 \alpha \sin^2 \alpha + 15\cos^2 \alpha \sin^4 \alpha - \sin^6 \alpha}$$

Khi chia cả tử số và mẫu số của phân số cuối cho $\cos^6 \alpha$, ta có được:

$$\tan 6\alpha = \frac{6\tan \alpha - 20\tan^3 \alpha + 6\tan^5 \alpha}{1 - 15\tan^2 \alpha + 15\tan^4 \alpha - \tan^6 \alpha}$$

Ví dụ 2.1.5. Chứng minh rằng: nếu $x + \frac{1}{x} = 2\cos \alpha$ thì $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$

Lời giải. Ta có: $x + \frac{1}{x} = 2\cos \alpha \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \cos \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0$

Do đó $x = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$

Từ đó suy ra $x^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\cos n\alpha \pm i \sin n\alpha} = \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha$$

Cộng vế với vế ta được: $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$ $\square$

Ví dụ 2.1.6. Rút gọn

$$\begin{aligned}\cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \dots + C_n^{n-1} \cos n\alpha + \cos (n+1)\alpha \\ \sin \alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + C_n^2 \sin 3\alpha + \dots + C_n^{n-1} \sin n\alpha + \sin (n+1)\alpha\end{aligned}$$

Lời giải:

Cần tính phần thực và hệ số tại phần ảo của tổng :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) + C_n^1(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + C_n^2(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) \\ + \dots + (\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha)$$

Khi biểu thị $\cos \alpha + i \sin \alpha$ thông qua x và sử dụng công thức Moavơ, nhị thức Newton, ta chuyển đổi tổng này sang dạng sau:

$$\begin{aligned} x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \dots + x^{n+1} &= x(x+1)^n \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha + 1 + i \sin \alpha)^n \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n \\ &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \\ &= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n+2}{2} \alpha + i \sin \frac{n+2}{2} \alpha \right) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\cos \alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \dots + \cos(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha$$

$$\sin \alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + C_n^2 \sin 3\alpha + \dots + \sin(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n+2}{2} \alpha$$

Ví dụ 2.1.7. Chứng minh đẳng thức tổ hợp quen thuộc sau:

$$C_{2011}^0 + C_{2011}^3 + C_{2011}^6 + \dots + C_{2011}^{2010} = \frac{2^{2011} + 1}{3}$$

Lời giải. Gọi ω là căn bậc nguyên thủy bậc 3 của đơn vị, tức là $\omega^3 = 1$, $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Khi đó ta có $1 + \omega + \omega^2 = 0$ và $\begin{cases} \omega^{3n} = 1 \\ \omega^{3n+1} = \omega \\ \omega^{3n+2} = \omega^2 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

Khai triển các nhị thức Newton $(1+1)^{2011}$, $(1+\omega)^{2011}$, $(1+\omega^2)^{2011}$ ta được:

$$\begin{aligned} (1+1)^{2011} &= C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + C_{2011}^2 + \dots + C_{2011}^{2010} + C_{2011}^{2011} \\ (1+\omega)^{2011} &= C_{2011}^0 + C_{2011}^1 \omega + C_{2011}^2 \omega^2 + \dots + C_{2011}^{2010} \omega^{2010} + C_{2011}^{2011} \omega^{2011} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{2011}^0 + C_{2011}^1 \omega + C_{2011}^2 \omega^2 + \dots + C_{2011}^{2010} + C_{2011}^{2011} \omega \\
(1 + \omega^2)^{2011} &= C_{2011}^0 + C_{2011}^1 \omega^2 + C_{2011}^2 \omega + \dots + C_{2011}^{2010} + C_{2011}^{2011} \omega^2
\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các số hạng của 3 tổng trên ta được:

$$3(C_{2011}^0 + C_{2011}^3 + \dots + C_{2011}^{2010}) = (1 + 1)^{2011} + (1 + \omega)^{2011} + (1 + \omega^2)^{2011} \quad (2.3)$$

Ngoài ra:

$$\begin{aligned}
(1 + 1)^{2011} &= 2^{2011} \\
(1 + \omega)^{2011} &= \left(1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{2011} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2011} \\
&= \cos \frac{2011\pi}{3} + i \sin \frac{2011\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\
&= \cos \frac{2011\pi}{3} - i \sin \frac{2011\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Do đó:

$$(1 + 1)^{2011} + (1 + \omega)^{2011} + (1 + \omega^2)^{2011} = 2^{2011} + 2\cos \frac{\pi}{3} = 2^{2011} + 1 \quad (2.4)$$

$$\text{Từ (2.3) và (2.4) ta có: } C_{2011}^0 + C_{2011}^3 + C_{2011}^6 + \dots + C_{2011}^{2010} = \frac{2^{2011} + 1}{3} \quad \square$$

Ví dụ 2.1.8. Chứng minh bất đẳng thức sau:

1. $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z), \forall x, y, z > 0$
2. $\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x - y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x - y)} \geq 2, \forall x, y \in R$

Lời giải:

1. Đặt $z_1 = x + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}yi, z_2 = y + \frac{z}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}zi, z_3 = z + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}xi$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \sqrt{x^2 + xy + y^2}, |z_2| = \sqrt{y^2 + yz + z^2}, |z_3| = \sqrt{z^2 + zx + x^2} \\
|z_1 + z_2 + z_3| &= \sqrt{3}(x + y + z)
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức 6 của đề Định lý 1.2.5 ta được:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

Suy ra: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$

2. Tương tự: Đặt $z_1 = 2\cos x \cos y + i \sin(x - y), z_2 = 2\sin x \sin y + i \sin(x - y)$

Ta suy ra điều chứng minh.

Ví dụ 2.1.9. Tìm tất cả các nghiệm thực dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3}x \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7}y \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

1996 Vietnamese Mathematical Olympiad

Lời giải:

Đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ khi đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} u \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v \left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Nhưng $u^2 + v^2$ là bình phương môđun số $z = u + iv$ nên ta nhân 2 vế của phương trình thứ 2 của hệ với i và cộng hai phương trình lại ta được:

$$u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$$

Mặt khác ta có: $\frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{1}{z}$, nên phương trình trên trở thành :

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) \\ \Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Phương trình có 2 nghiệm:

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 + i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\right) \\ z_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 + i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Suy ra nghiệm thực dương của hệ phương trình là:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2; \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\right)^2\right), \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2; \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2}\right)^2\right)$$

Ví dụ 2.1.10. 1) Hãy lập phương trình nhận các số sau làm nghiệm:

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1}, \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}.$$

2) Tính tổng:

a) $\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}$

b) $\left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \frac{2\pi}{2n+1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2n+1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sin \frac{n\pi}{2n+1}} \right)^2.$

3) Tính tổng: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

Lời giải:

1) Thay n bằng $2n+1$ trong ví dụ 2.1.3b, ta có dạng sau:

$$\sin(2n+1)\alpha = \sin^{2n+1}\alpha (C_{2n+1}^1 \cot^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3 \cot^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5 \cot^{2n-4}\alpha - \dots),$$

suy ra với $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}, \frac{2\pi}{2n+1}, \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \frac{n\pi}{2n+1}$ ta có đẳng thức:

$$C_{2n+1}^1 \cot^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3 \cot^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5 \cot^{2n-4}\alpha - \dots = 0$$

Thì các số: $\cot^2 \frac{\pi}{2n+1}, \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}$ là các nghiệm của phương trình:

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \dots = 0 \quad (2.5)$$

2) Tính tổng: $\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}$

Phương trình (3) tương đương với:

$$x^n - \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} x^{n-1} + \frac{C_{2n+1}^5}{C_{2n+1}^1} x^{n-2} - \dots = 0$$

Tổng các nghiệm của phương trình trên bằng số đối của hệ số tại x^{n-1} , tức là:

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

3) Tính tổng: $\left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \frac{2\pi}{2n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2n+1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sin \frac{n\pi}{2n+1}}\right)^2$.

Do $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 = \cot^2 \alpha + 1$ nên từ tổng 2) suy ra:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \frac{2\pi}{2n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2n+1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sin \frac{n\pi}{2n+1}}\right)^2 \\ &= \frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2n(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

4) Tính tổng: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

Ta thấy rằng đối với mỗi góc dương bất kì nhỏ hơn $\frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$.

Ta có:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \sin \alpha, S_{\text{Quạt } AOB} = \frac{1}{2} \alpha, S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \tan \alpha$$

$$\text{Do: } S_{\Delta AOB} < S_{\text{Quạt } AOB} < S_{\Delta AOC}.$$

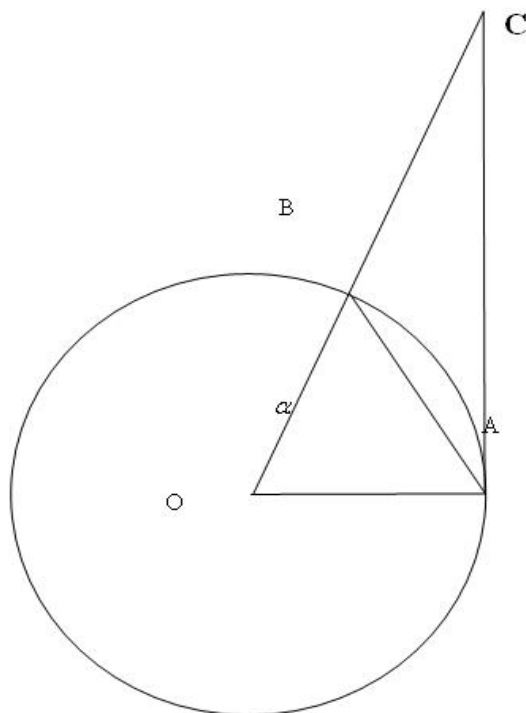
$$\text{Nên } \sin \alpha < \alpha < \tan \alpha.$$

Từ $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$ suy ra

$$\cot \alpha < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Vì vậy từ những công thức tổng 2) và 3) đưa đến kết quả:

$$\begin{aligned} \frac{n(2n-1)}{3} &= \cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} < \\ &< \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{3\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2 < \\ &< \left(\frac{1}{\sin}\right)^2 \frac{\pi}{2n+1} + \left(\frac{1}{\sin}\right)^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \left(\frac{1}{\sin}\right)^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \left(\frac{1}{\sin}\right)^2 \frac{n\pi}{2n+1} \end{aligned}$$



Hình 2.1: Biểu diễn hình học

$$= \frac{2n(n+1)}{3}$$

Khi chia tất cả các số hạng của bất đẳng thức kép cuối cho $\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}$, ta sẽ có:

$$\begin{aligned} \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi^2}{6} &= \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \\ &< \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên, khi $n \rightarrow \infty$ ta có $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$
 $= \frac{\pi^2}{6}.$

Ví dụ 2.1.11. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned}xz - 2yt + \sqrt{2}(xt + yz)i &= 3 + \sqrt{2}i \\ \Leftrightarrow xz + 2i^2yt + \sqrt{2}(xt + yz)i &= 3 + \sqrt{2}i \\ \Leftrightarrow (x + i\sqrt{2}y)(z + i\sqrt{2}t) &= 3 + \sqrt{2}i\end{aligned}$$

Lấy môđun 2 vế: $|(x + i\sqrt{2}y)(z + i\sqrt{2}t)| = |3 + \sqrt{2}i|$, suy ra:

$$(x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì x, y, z, t nguyên nên xảy ra 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $x^2 + 2y^2 = 1, z^2 + 2t^2 = 11$.

Từ phương trình $x^2 + 2y^2 = 1$ suy ra $x = \pm 1, y = 0$.

Kết hợp hệ phương trình tìm được:

$$x = 1, y = 0, z = 3, t = 1 \text{ hoặc } x = -1, y = 0, z = -3, t = -1$$

+ Trường hợp 2: $x^2 + 2y^2 = 11, z^2 + 2t^2 = 1$.

Tương tự ta có:

$$x = 3, y = 1, z = 1, t = 0 \text{ hoặc } x = -3, y = -1, z = -1, t = 0.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm:

$$(1; 0; 3; 1), (-1; 0; -3; -1), (3; 1; 1; 0), (-3; -1; -1; 0).$$

Ví dụ 2.1.12. Cho α, β là hai số thỏa mãn $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$. Tính giá trị của biểu thức $s = \alpha^{2012} + \beta^{2012}$.

Lời giải.

Ta có α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ nên

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}, \\ \beta &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } s = \alpha^{2012} + \beta^{2012} = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2012} + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2012}.$$

$$= \cos \frac{2012\pi}{3} - i \sin \frac{2012\pi}{3} + \cos \frac{2012\pi}{3} + i \sin \frac{2012\pi}{3} = 2 \cos \frac{2012\pi}{3}$$

$$\text{Hay: } s = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 670\pi\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = -1.$$

2.2 Ứng dụng vào giải tích

Ví dụ 2.2.1. Tìm nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{x^2 + 1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{1}{x^2 - i^2} dx = \int \frac{1}{(x - i)(x + i)} dx = \int \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right) dx \\&= \frac{1}{2i} \int \frac{1}{x - i} dx - \frac{1}{2i} \int \frac{1}{x + i} dx = \frac{1}{2i} \ln(x - i) - \frac{1}{2i} \ln(x + i) + C \\&= \frac{1}{2i} \ln \frac{x - i}{x + i} + C = \frac{1}{2i} \ln \frac{(x - i)^2}{x^2 + 1} + C\end{aligned}$$

Ví dụ 2.2.2. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$A = \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Lời giải Để tính $A = \int e^{ax} \cos bxdx$ ta tính thêm $B = \int e^{ax} \sin bxdx$.
Ta có $A = \int e^{ax} \cos bxdx$

$$iB = \int e^{ax} i \sin bxdx$$

Cộng vế với vế ta có:

$$\begin{aligned}A + iB &= \int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = \int e^{ax} e^{ibx} dx = \int e^{ax+ibx} dx \\&= \frac{1}{a + ib} e^{ax+ibx} + C = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{ax} e^{ibx} + C \\&= \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + C \\&= \frac{ae^{ax}}{a^2 + b^2} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2 + b^2} \sin bx + i \left(\frac{ae^{ax}}{a^2 + b^2} \sin bx - \frac{be^{ax}}{a^2 + b^2} \cos bx \right) + C\end{aligned}$$

Cân bằng phần thực và phần ảo của vế trái và vế phải, ta được:

$$\begin{aligned}A &= \frac{ae^{ax}}{a^2 + b^2} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2 + b^2} \sin bx + C \\B &= \frac{ae^{ax}}{a^2 + b^2} \sin bx - \frac{be^{ax}}{a^2 + b^2} \cos bx + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.2.3. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số

$$I = e^{ax} \cos bx$$

Lời giải Để tính $I^{(n)} = (e^{ax} \cos bx)^{(n)}$ ta tính thêm: $J^{(n)} = (e^{ax} \sin bx)^{(n)}$.
Ta có

$$\begin{aligned} I^{(n)} &= (e^{ax} \cos bx)^{(n)} \\ iJ^{(n)} &= i(e^{ax} \sin bx)^{(n)} \end{aligned}$$

Cộng vế với vế ta có:

$$\begin{aligned} I^{(n)} + iJ^{(n)} &= (e^{ax} \cos bx)^{(n)} + i(e^{ax} \sin bx)^{(n)} \\ &= (e^{ax})^{(n)} \left((\cos bx)^{(n)} + i(\sin bx)^{(n)} \right) \\ &= (e^{ax})^{(n)} (e^{ibx})^{(n)} = a^n e^{ax} (ib)^n e^{ibx} \\ &= (ab)^n e^{ax} i^n e^{ibx}. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} (I + iJ)^{(n)} &= \left(e^{(a+ib)x} \right)^{(n)} \\ \Leftrightarrow I^{(n)} + iJ^{(n)} &= (a + ib)^{(n)} e^{(a+ib)x} \\ \Leftrightarrow I^{(n)} + iJ^{(n)} &= \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + ib \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^n (e^{ax} e^{ibx}) \\ \Leftrightarrow I^{(n)} + iJ^{(n)} &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) (\cos bx + i \sin bx) \\ &\quad \left(\text{Với } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \Leftrightarrow I^{(n)} + iJ^{(n)} &= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [\cos n\varphi \cos bx - \sin n\varphi \sin bx + i (\cos n\varphi \sin bx + \sin n\varphi \cos bx)] \\ \Leftrightarrow I^{(n)} + iJ^{(n)} &= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [\cos (bx + n\varphi) + i \sin (bx + n\varphi)] \\ \Leftrightarrow I^{(n)} + iJ^{(n)} &= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos (bx + n\varphi) + i e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin (bx + n\varphi) \end{aligned}$$

So sánh phần thực và phần ảo của vế trái và vế phải, ta được:

$$\begin{aligned} I &= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos (bx + n\varphi) \\ J &= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin (bx + n\varphi) \end{aligned}$$

Chương 3

ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC VÀO HÌNH HỌC

Ta biết rằng mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm trong mặt phẳng phức. Do đó cũng như phương pháp tọa độ, khi đồng nhất mỗi điểm trong mặt phẳng bởi một số phức thì bài toán trong hình học trở thành bài toán với số phức mà ta biết rằng các công thức về khoảng cách và góc có thể đưa về công thức đơn giản đối với số phức. Do vậy ta có thể sử dụng số phức để giải các bài toán hình học từ đơn giản đến phức tạp.

3.1 Các định lý

Định lý 3.1.1. Đường thẳng $ab//cd$ khi và chỉ khi $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$.

Các điểm a, b, c thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}}$.

Đường thẳng ab vuông góc với đường thẳng cd khi và chỉ khi $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$.

Gọi φ là góc abc theo chiều dương từ a đến b thì $\frac{c-b}{|c-b|} = e^{i\varphi} \frac{c-a}{|c-a|}$.

Định lý 3.1.2. Trên đường tròn đơn vị, ta có các tính chất sau:

Hai điểm a, b thuộc đường tròn đơn vị thì $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$.

Điểm c nằm trên dây cung ab thì $\bar{c} = \frac{a+b-c}{ab}$.

Giao của hai tiếp tuyến tại hai điểm a, b là điểm $\frac{2ab}{a+b}$.

Chân đường cao hạ từ một điểm c bất kỳ xuống dây ab của đường tròn là điểm $\frac{1}{2}(a+b-c-ab\bar{c})$.

Giao điểm của hai dây cung ab và cd là điểm $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

Định lý 3.1.3. Bốn điểm a, b, c, d cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$$

Định lý 3.1.4. Tam giác abc và tam giác pqr đồng dạng cùng hướng khi và chỉ khi $\frac{a-c}{b-c} = \frac{p-r}{q-r}$.

Định lý 3.1.5. Diện tích có hướng của tam giác abc là

$$S = \frac{i}{4} (a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} - \bar{a}b - \bar{b}c - \bar{c}a)$$

Định lý 3.1.6. Điểm c chia đoạn thẳng ab theo tỉ số $\lambda \neq 1$ khi và chỉ khi $c = \frac{a-\lambda b}{1-\lambda}$.

Điểm g là trọng tâm của tam giác abc khi và chỉ khi $g = \frac{a+b+c}{3}$.

Với H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp thì $h+2o = a+b+c$.

Định lý 3.1.7. Giả sử đường tròn đơn vị nội tiếp tam giác abc và tiếp xúc với cạnh bc, ca, ab của tam giác abc tại p, q, r thì:

$$a) \quad a = \frac{2qr}{q+r}, b = \frac{2rp}{r+p}, c = \frac{2pq}{p+q}.$$

b) Với h là trực tâm tam giác abc , ta có

$$h = \frac{2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}$$

c) Với tâm đường tròn bàng tiếp o , tương tự ta có

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

Định lý 3.1.8. Cho tam giác abc nội tiếp đường tròn đơn vị, khi đó tồn tại các số u, v, w sao cho u, v, w và $-uv, -vw, -wu$ là trung điểm của các cung ab, bc, ca không chứa các đỉnh đối diện. Khi đó tâm đường tròn nội tiếp i có $i = -(uv + vw + wu)$.

Định lý 3.1.9. Nếu tam giác có một đỉnh trùng với gốc tọa độ và các đỉnh còn lại là x, y thì :

$$\text{Trục tâm là điểm } h = \frac{(\bar{x}y + x\bar{y})(x - y)}{x\bar{y} - \bar{x}y}.$$

$$\text{Tâm đường tròn ngoại tiếp là điểm } o = \frac{xy(\bar{x} - \bar{y})}{\bar{x}y - x\bar{y}}.$$

3.2 Các ví dụ

Ví dụ 3.2.1. Cho tam giác ABC bất kì: G là giao điểm của các trung tuyến (trọng tâm); H là giao điểm của các đường cao (trục tâm); O là tâm đường tròn ngoại tiếp ($O = (ABC)$); A_1, B_1, C_1 là trung điểm tương ứng của cạnh BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 là chân đường cao; A_3, B_3, C_3 là trung điểm của các đoạn AH, BH, CH (những điểm Euler); A_4, B_4, C_4 là các điểm đối xứng tương ứng của trục tâm H qua BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

- 1) Các điểm O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
- 2) Các điểm $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ nằm trên 1 đường tròn (O_9) (đường tròn Euler hay đường tròn 9 điểm của tam giác ABC). Tâm của đường tròn này là trung điểm của đoạn OH , còn bán kính đường tròn bằng $\frac{R}{2}$, với R là bán kính đường tròn tâm ngoại tiếp tâm O qua tam giác ABC .
- 3) Các điểm A_4, B_4, C_4 nằm trên đường tròn ngoại tiếp.

Lời giải.

- 1) Gọi đường tròn (ABC) là đường tròn đơn vị. Ta có a, b, c là các tọa vị tương ứng của các điểm A, B, C . Thấy rằng $a + b + c$ là tọa vị của trục tâm H của tam giác ABC .

Hệ số góc của đường thẳng BC bằng $\alpha = \frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}} = \frac{c-b}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = -bc$.

Hệ số góc của đường thẳng nối đỉnh $A(a)$ với điểm M , có tọa vị $a+b+c$ là $\alpha' = \frac{b+c}{\bar{b}+\bar{c}} = \frac{b+c}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = bc$.

Từ đó: $\alpha + \alpha' = 0$

Suy ra: $AM \perp BC$. Như vậy rõ ràng $BM \perp CA$ và $CM \perp AB$. Nghĩa là M là điểm có tọa vị $a+b+c$ trùng với trực tâm H của ΔABC .

Tiếp theo, có tọa vị điểm G : $\frac{a+b+c}{3}$.

Tọa vị $H = a+b+c$, từ đó suy ra: $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Suy ra O, G, H thẳng hàng.

2) Trung điểm A_1, B_1, C_1 của các cạnh BC, CA, AB có tọa vị

$$a_1 = \frac{b+c}{2}, \quad b_1 = \frac{c+a}{2}, \quad c_1 = \frac{a+b}{2}$$

Gọi E là trung điểm đoạn OH . Tọa vị của E là $\varepsilon = \frac{a+b+c}{2}$.

Như vậy: $\varepsilon - a_1 = \frac{a}{2}, \varepsilon - b_1 = \frac{b}{2}, \varepsilon - c_1 = \frac{c}{2}$.

Và $|a| = |b| = |c| = 1$, nên $|\varepsilon - a_1| = |\varepsilon - b_1| = |\varepsilon - c_1| = \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$.

Vậy thì trung điểm A_1, B_1, C_1 của các đoạn BC, CA, AB cách trung điểm đoạn OH một khoảng bằng nhau và bằng $\frac{R}{2}$ do đó nằm trên đường tròn

$(A_1B_1C_1)$ có tâm $E \left(\frac{a+b+c}{2} \right)$ và bán kính $\frac{R}{2}$.

Hơn nữa phương trình đường thẳng AH và BC có dạng:

$$z - a = bc(\bar{z} - \bar{a})$$

$$z - b = -bc(\bar{z} - \bar{b})$$

$$\text{Hoặc } z - bc\bar{z} = a - \bar{a}bc$$

$$z + bc\bar{z} = b + c$$

Cộng các phương trình này ta tìm được tọa vị a_2 của điểm A_2 :

$$a_2 = \frac{a+b+c}{2} - \frac{bc}{2a} = \varepsilon - \frac{bc}{2a}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } EA_2 = |a_2 - \varepsilon| &= \left| -\frac{bc}{2a} \right| = \frac{1}{2} = \frac{R}{2} \\ &(|a| = |b| = |c| = 1) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$EB_2 = \frac{R}{2}, EC_2 = \frac{R}{2}$$

Như vậy các điểm $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ nằm trên 1 đường tròn có tâm là trung điểm đoạn OH và bán kính bằng $\frac{R}{2}$.

Hơn nữa tọa vị các trung điểm A_3, B_3, C_3 của các đoạn AH, BH, CH lần lượt là:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a + a + b + c}{2} = \frac{2\varepsilon + a}{2} = \varepsilon + \frac{a}{2} \\ b_3 &= \varepsilon + \frac{b}{2} \\ c_3 &= \varepsilon + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } EA_3 = |a_3 - \varepsilon| = \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$$

$$EB_3 = EC_3 = \frac{R}{2}$$

Như vậy cả 9 điểm $A_k, B_k, C_k (k = 1, 2, 3)$ nằm trên đường tròn $(E, \frac{R}{2})$, có tâm E là trung điểm đoạn OH và bán kính là $\frac{R}{2}$.

3) Trở lại phương trình đường thẳng $AH : z - a = bc(\bar{z} - \bar{a})$ đi qua điểm A giao với BC . Ta tìm được tọa vị của giao điểm của đường thẳng này với đường tròn đơn vị là: $z\bar{z} = 1$

$$\text{Ta có: } z - a = bc \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a} \right)$$

$$z - a = -bc \frac{z - a}{az}$$

Một trong những nghiệm số của phương trình là $z = a$, nghiệm kia là:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{bc}{a} \text{ (điểm } N \text{ có tọa vị này nằm trên đường tròn đơn vị, có thể thử} \\ &\text{lại } \left| -\frac{bc}{a} \right| = 1). \end{aligned}$$

Ta thấy rằng trung điểm đoạn HN trùng với điểm A_2 . Do vậy tọa vị của trung điểm này là:

$$\frac{a + b + c - \frac{bc}{a}}{2} = \frac{2\varepsilon - \frac{bc}{a}}{2} = \varepsilon - \frac{bc}{2a} = a_2$$

Như vậy điểm N trùng với điểm A_4 .

Tương tự, các đường cao xuất phát từ đỉnh B, C cắt đường tròn (ABC) tại các điểm B_4, C_4 , đối xứng với trực tâm H qua các cạnh CA và AB .

Ví dụ 3.2.2. (Điểm Buten). Trong đường tròn đơn vị tâm (O) vẽ tam giác ABC . Gọi z_1, z_2, z_3 là các tọa vị của các điểm A, B, C . Điểm Buten đối với tam giác ABC là điểm mà để lựa chọn ra một điểm đơn vị (có tọa vị $z = 1$) và thỏa mãn $\sigma_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$. Chứng minh rằng đối với đường tròn (O) xác định và tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , có ba điểm Buten tạo nên một tam giác đều.

Lời giải. Gọi điểm α ($|\alpha| = 1$) là điểm đơn vị mới. Khi đó những tọa vị mới của các điểm A, B, C là: $\frac{z_1}{\alpha}, \frac{z_2}{\alpha}, \frac{z_3}{\alpha}$. Điểm α sẽ là điểm Buten nếu như tích của các tọa vị này bằng 1:

$$\frac{z_1 z_2 z_3}{\alpha^3} = 1 \text{ hoặc } \alpha^3 = \sigma_3$$

Đây là một phương trình ba nghiệm:

$$\sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon \sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon^2 \sqrt[3]{\sigma_3}$$

Khi $\sqrt[3]{\sigma_3}$ là số bất kì trong ba trị số của nghiệm bậc ba từ σ_3 , còn ε là bất kì trong số hai giá trị ảo $\sqrt[3]{1}$ hoặc $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, hoặc $\varepsilon = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Cụ thể: $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$

Khi đó: $\varepsilon^2 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$.

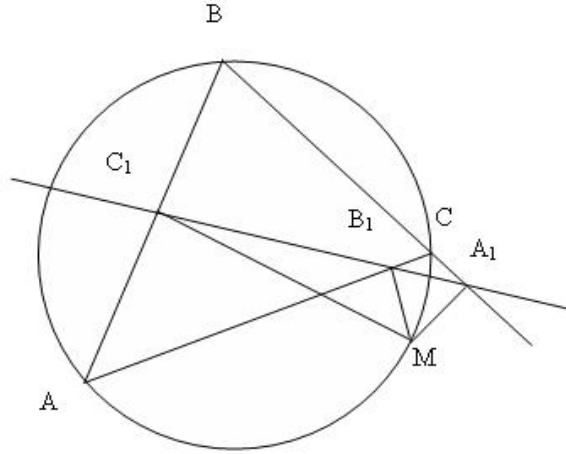
Đối với việc tạo điểm Buten trước tiên cần tạo điểm cho trị số được lựa chọn $\sqrt[3]{\sigma_3}$, sau đó nhân nó với ε (xoay 120°), một lần nữa nhân với ε (xoay thêm 120°). Ta có được các đỉnh của tam giác đều với tọa vị: $\sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon \sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon^2 \sqrt[3]{\sigma_3}$.

Ví dụ 3.2.3. (Đường thẳng Simpson của điểm M qua tam giác ABC)

Cho tam giác ABC bất kì. Trên đường tròn (ABC) lấy một điểm M bất kì. Có A_1, B_1, C_1 là hình chiếu vuông góc của M trên đoạn thẳng $BC, CA,$

AB. Chứng minh rằng các điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Cho đường tròn (ABC) là đường tròn đơn vị và coi tọa vị các điểm A, B, C, M lần lượt bằng z_1, z_2, z_3, z_0 , lập phương trình đường thẳng $A_1B_1C_1$ (đường thẳng Simpson của điểm M qua tam giác ABC).

Lời giải. Phương trình đường thẳng BC và đường thẳng đi qua điểm M



Hình 3.1: Biểu diễn hình học

vuông góc với BC có dạng:

$$z - z_2 = -z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{z}_2)$$

$$z - z_0 = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{z}_0)$$

$$\text{Hoặc } z + z_2 z_3 \bar{z} = z_2 + z_3$$

$$z - z_2 z_3 \bar{z} = z_0 - z_2 z_3 \bar{z}_0$$

Cộng các phương trình này ta tìm được tọa vị a_1 của hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng BC:

$$a_1 = \frac{1}{2} (z_0 + z_2 + z_3 - z_2 z_3 \bar{z}_0)$$

Tương tự ta tìm được tọa vị b_1 của điểm B_1 :

$$b_1 = \frac{1}{2} (z_0 + z_3 + z_1 - z_3 z_1 \bar{z}_0)$$

Ta tìm hệ số góc của đường thẳng A_1B_1 , có:

$$a_1 - b_1 = \frac{1}{2} [z_2 - z_1 - z_3 \bar{z}_0 (z_2 - z_1)] = \frac{1}{2} (z_2 - z_1) (1 - z_3 \bar{z}_0)$$

$$= \frac{1}{2} (z_2 - z_1) \left(1 - \frac{z_3}{z_0}\right) = \frac{1}{2} \frac{(z_2 - z_1)(z_0 - z_3)}{z_0}$$

$$\overline{a_1} - \overline{b_1} = \frac{z_0}{2} \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right) \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_3}\right) = \frac{1}{2} (z_2 - z_1)(z_0 - z_3) \frac{1}{z_1 z_2 z_3}$$

Và do vậy:

$$\alpha = \frac{\sigma_3}{z_0} = \sigma_3 \overline{z_0}$$

Phương trình đường thẳng $A_1 B_1$ có thể viết dưới dạng:

$$z - a_1 = \sigma_3 \overline{z_0} (\overline{z} - \overline{a_1})$$

Hoặc

$$z - \frac{1}{2} (z_0 + z_2 + z_3 - z_2 z_3 \overline{z_0}) = \sigma_3 \overline{z_0} \left[\overline{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} - \frac{z_0}{z_2 z_3} \right) \right]$$

$$\text{Hoặc } z - \sigma_3 \overline{z_0} \overline{z} = \frac{1}{2} \left(z_0 + z_2 + z_3 - \frac{z_2 z_3}{z_0} \right) - \frac{z_1 z_2 z_3}{2 z_0} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} - \frac{z_0}{z_2 z_3} \right)$$

$$\text{Hoặc } z - \sigma_3 \overline{z_0} \overline{z} = \frac{1}{2} \left(z_0 + z_2 + z_3 - \frac{z_2 z_3}{z_0} - \frac{\sigma_3}{z_0^2} - \frac{z_1 z_3}{z_0} - \frac{z_1 z_2}{z_0} + z_1 \right)$$

Hoặc

$$z - \sigma_3 \overline{z_0} \overline{z} = \frac{1}{2} (z_0 + \sigma_1 - \sigma_2 \overline{z_0} - \sigma_3 \overline{z_0}^2) \quad (3.1)$$

Khi $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3, \sigma_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1, \sigma_3 = z_1 z_2 z_3$

Tính đối xứng của phương trình này đối với z_1, z_2, z_3 cho phép khẳng định rằng đường thẳng $A_1 B_1$ đi qua điểm C_1 .

Nhưng có thể thấy rằng khi thêm vào vế trái hoặc vế phải của phương trình (3.1) thì tọa vị:

$$c_1 = \frac{1}{2} (z_0 + z_1 + z_2 - z_1 z_2 \overline{z_0})$$

của điểm C_1 (nhận được kết quả tương tự) hoặc thấy rằng một đẳng thức được hoàn thành

$$\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ b_1 & \overline{b_1} & 1 \\ c_1 & \overline{c_1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nếu như z_0 là điểm đơn vị thì phương trình đường thẳng Simpson có dạng:

$$z - \sigma_3 \overline{z} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

Còn nếu như điểm đơn vị nhận điểm buten ($\sigma_3 = 1$) thì

$$z - \bar{z} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Nhận xét: Nếu như điểm M không nằm trên đường tròn (ABC) thì hình chiếu của nó A_1, B_1, C_1 trên các cạnh BC, CA, AB không nằm trên một đường thẳng.

Ví dụ 3.2.4. Chứng minh rằng nếu nhận điểm M Buten là điểm đơn vị của tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thì đường thẳng Simpson tương ứng với M sẽ thẳng hàng với đường kính của đường tròn đơn vị đi qua M (xem ví dụ 3.2.2, 3.2.3).

Lời giải. Phương trình đường thẳng Simpson sẽ có dạng:

$$z - \bar{z} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Tức là nó sẽ thẳng hàng với trục Ox hoặc đường kính đi qua điểm M, như vậy M là điểm đơn vị của trục Ox.

Thấy rằng nếu đường thẳng Simpson, thẳng hàng với đường kính của đường tròn, và đi qua M thì M là một điểm Buten.

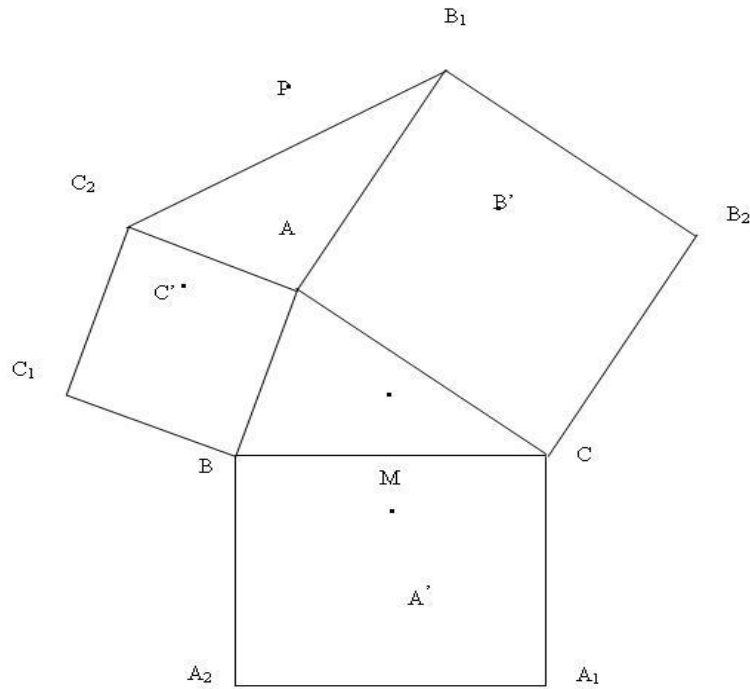
Trong trường hợp này nếu M là điểm đơn vị thì hệ số góc của đường thẳng Simpson sẽ bằng σ_3 và nếu đường thẳng Simpson song song với đường kính và đi qua M cũng như trục Ox thì $\sigma_3 = 1$, khi đó hệ số góc của trục Ox bằng 1.

Ví dụ 3.2.5. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình vuông $ABC_1C_2, BCA_1A_2, CAB_1B_2$ và gọi C', A', B' theo thứ tự là tâm của chúng. Gọi M là trung điểm của BC, gọi P là trung điểm của B_1C_2 . Chứng minh:

- 1) $AP = \frac{1}{2}BC$ và đường thẳng AP vuông góc với BC.
- 2) $AA' = B'C'$ và đường thẳng AA' vuông góc với $B'C'$.
- 3) Tam giác $MB'C'$ là tam giác vuông cân đỉnh M.
- 4) Trọng tâm tam giác $A'B'C'$ trùng với trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải. Coi A, B, C có tọa vị theo thứ tự là α, β, γ trong mặt phẳng phức và coi ΔABC định hướng thuận

1, C_2 có được từ quay điểm B quanh A góc $-\frac{\pi}{2}$ nên C_2 có tọa vị $\alpha - i(\beta - \alpha)$.



Hình 3.2: Biểu diễn hình học

B_1 có được từ quay điểm C quanh A góc $+\frac{\pi}{2}$ nên B_1 có tọa vị $\alpha + i(\gamma - \alpha)$.
 Vậy trung điểm P của B_1C_2 có tọa vị:

$$\frac{1}{2}(\alpha - i(\beta - \alpha) + \alpha + i(\gamma - \alpha)) = \alpha + i\frac{\gamma - \beta}{2}.$$

Từ đó vectơ $\overrightarrow{AP}$ có tọa vị $i\frac{\gamma - \beta}{2}$ mà vectơ $\overrightarrow{BC}$ có tọa vị $\gamma - \beta$ nên $AP = \frac{BC}{2}$ và đường thẳng AP vuông góc với BC .

2) Trung điểm M của BC có tọa vị $\frac{\beta + \gamma}{2}$.

Tâm A' của hình vuông BCA_1A_2 có được từ quay điểm B quanh M góc $+\frac{\pi}{2}$ nên có tọa vị $\alpha' = \frac{\beta + \gamma}{2} + i\left(\beta - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}$.

Hoán vị vòng quanh $(A, B, C; \alpha, \beta, \gamma; A', B', C')$ suy ra:

$$B' \text{ có tọa vị } \beta' = \frac{\gamma + \alpha}{2} + i\frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

$$C' \text{ có tọa vị } \gamma' = \frac{\alpha + \beta}{2} + i\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Từ đó vectơ $\overrightarrow{AA'}$ có tọa vị $\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha + i\frac{\beta - \gamma}{2}$ còn vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ có tọa vị

$$\frac{\beta - \gamma}{2} + i \left(\alpha - \frac{\beta + \gamma}{2} \right) = -i \left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \alpha + i \frac{\beta - \gamma}{2} \right).$$

Tức $\overrightarrow{B'C'}$ có được do quay $\overrightarrow{AA'}$ góc $-\frac{\pi}{2}$.

$$3) \overrightarrow{MB'} \text{ có tọa vị } \frac{\alpha - \beta}{2} + i \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

$$\overrightarrow{MC'} \text{ có tọa vị } \frac{\alpha - \gamma}{2} + i \frac{\alpha - \beta}{2} = i \left(\frac{\alpha - \beta}{2} + i \frac{\gamma - \alpha}{2} \right).$$

Tức $\overrightarrow{MC'}$ có được do quay $\overrightarrow{MB'}$ góc $+\frac{\pi}{2}$.

4) Dễ thấy $\alpha' + \beta' + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma$ nên trọng tâm tam giác $A'B'C'$ trùng với trọng tâm tam giác ABC .

Chú ý: Ta có kết quả tương tự khi dựng các hình vuông về “phía trong” của tam giác ABC .

Ví dụ 3.2.6. Cho tam giác ABC . Dựng bên ngoài tam giác đó các tam giác đều có cạnh BC, CA, AB và gọi trọng tâm của 3 tam giác đều đó theo thứ tự là A', B', C' . Chứng minh rằng $A'B'C'$ là tam giác đều (bài toán Napoleon) và trọng tâm của $A'B'C'$ trùng với trọng tâm của ABC .

Lời giải. Coi A, B, C có tọa vị theo thứ tự là α, β, γ trong mặt phẳng phức và coi ABC định hướng thuận thì các trọng tâm A', B', C' có tọa vị theo thứ tự là:

$$\alpha' = \frac{1}{6} \left((3 + i\sqrt{3})\beta + (3 - i\sqrt{3})\gamma \right)$$

$$\beta' = \frac{1}{6} \left((3 + i\sqrt{3})\gamma + (3 - i\sqrt{3})\alpha \right)$$

$$\gamma' = \frac{1}{6} \left((3 + i\sqrt{3})\alpha + (3 - i\sqrt{3})\beta \right)$$

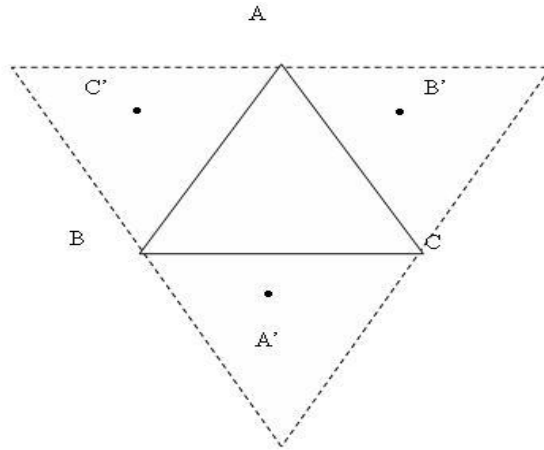
$$\text{Từ đó } \overrightarrow{A'B'} \text{ có tọa vị } \beta' - \alpha' = \frac{1}{6} \left((3 - i\sqrt{3})\alpha - (3 + i\sqrt{3})\beta + 2i\sqrt{3}\gamma \right).$$

$$\overrightarrow{A'C'} \text{ có tọa vị } \gamma' - \alpha' = \frac{1}{6} \left((3 + i\sqrt{3})\alpha - 2i\sqrt{3}\beta - (3 - i\sqrt{3})\gamma \right).$$

$$\text{Và dễ thử rằng } \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\beta' - \alpha') = \gamma' - \alpha'.$$

Tức là véc tơ $\overrightarrow{A'C'}$ có được do quay véc tơ $\overrightarrow{A'B'}$ góc $\frac{\pi}{3}$

(chú ý rằng $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$) tức $A'B'C'$ là tam giác đều (định hướng thuận).



Hình 3.3: Biểu diễn hình học

Rõ ràng $\alpha' + \beta' + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma$ nên trọng tâm $A'B'C'$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC.

(Ta có kết quả tương tự khi dựng các tam giác đều “về phía trong” tam giác ABC).

Ví dụ 3.2.7. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H. Q là điểm đối xứng với H qua O. Kí hiệu A', B', C' là trọng tâm các tam giác BCQ, ACQ, ABQ. Chứng minh rằng: $AA' = BB' = CC' = \frac{4}{3}R$.

Lời giải. Giả sử bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1 và tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với gốc tọa độ.

Giả sử các điểm A, B, C biểu diễn bởi các số a, b, c ($|a| = |b| = |c| = 1$) khi đó trực tâm $h = a + b + c$ và do O là trung điểm nên $q = -a - b - c$.

Do A' là trọng tâm tam giác BCQ nên $a' = \frac{b + c + q}{3} = -\frac{a}{3}$.

Ta có $AA' = \left| a + \frac{a}{3} \right| = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}R$.

Tương tự ta có: $BB' = \left| b + \frac{b}{3} \right| = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}R$.

$CC' = \left| c + \frac{c}{3} \right| = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}R$.

Vậy $AA' = BB' = CC' = \frac{4}{3}R$.

Ví dụ 3.2.8. 1) Cho A_1, B_1, C_1 là hình chiếu trực giao của điểm P lên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Lấy tâm O của đường tròn (ABC) là gốc tọa độ. Cho Rz_1, Rz_2, Rz_3 là tọa vi của các điểm A, B, C, với R là bán kính đường tròn (ABC) ($|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$). Cho p là tọa vi của

điểm P. Hãy tìm tọa vị a_1, b_1, c_1 của các điểm A_1, B_1, C_1 và biểu thị diện tích $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ của tam giác định hướng $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ qua diện tích $\overrightarrow{ABC}$ của tam giác định hướng $\overrightarrow{ABC}$, thông qua độ dài a, b, c của các cạnh BC, CA, AB và tọa vị p của điểm P.

Xét các trường hợp sau:

- 2) Điểm P trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.
- 3) Điểm P trùng với tâm I của đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.
- 4) Điểm P trùng với tâm O của đường tròn (ABC).
- 5) Điểm P trùng với trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải. 1) Phương trình đường thẳng BC:

$$z - z_2R = -z_2z_3(\bar{z} - \bar{z}_2R).$$

Hoặc $z + z_2z_3\bar{z} = R(z_2 + z_3).$

Hoặc

$$z + z_2z_3\bar{z} = R(\sigma_1 - z_1) \quad (3.2)$$

Phương trình đường vuông góc hạ từ P xuống đường thẳng BC có dạng:

$$z - p = z_2z_3(\bar{z} - \bar{p}).$$

Hoặc $z - z_2z_3\bar{z} = p - z_2z_3\bar{p}.$

Hoặc

$$z - z_2z_3\bar{z} = p - \bar{z}_1\sigma_3\bar{p} \quad (3.3)$$

Khi cộng phương trình (3.2) và (3.3), ta tìm được tọa vị a_1 của điểm A_1 :

$$a_1 = \frac{1}{2}(R\sigma_1 + p - Rz_1 - \bar{z}_1\sigma_3\bar{p}).$$

Tương tự : $b_1 = \frac{1}{2}(R\sigma_1 + p - Rz_2 - \bar{z}_2\sigma_3\bar{p}).$

$$c_1 = \frac{1}{2}(R\sigma_1 + p - Rz_3 - \bar{z}_3\sigma_3\bar{p}).$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{A_1B_1C_1} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(R\sigma_1 + p - Rz_1 - \bar{z}_1\sigma_3\bar{p}) & \frac{1}{2}(R\bar{\sigma}_1 + \bar{p} - R\bar{z}_1 - z_1\bar{\sigma}_3\bar{p}) & 1 \\ \frac{1}{2}(R\sigma_1 + p - Rz_2 - \bar{z}_2\sigma_3\bar{p}) & \frac{1}{2}(R\bar{\sigma}_1 + \bar{p} - R\bar{z}_2 - z_2\bar{\sigma}_3\bar{p}) & 1 \\ \frac{1}{2}(R\sigma_1 + p - Rz_3 - \bar{z}_3\sigma_3\bar{p}) & \frac{1}{2}(R\bar{\sigma}_1 + \bar{p} - R\bar{z}_3 - z_3\bar{\sigma}_3\bar{p}) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{16} \begin{vmatrix} Rz_1 + \bar{z}_1 \sigma_3 \bar{p} & R\bar{z}_1 + z_1 \bar{\sigma}_3 p & 1 \\ Rz_2 + \bar{z}_2 \sigma_3 \bar{p} & R\bar{z}_2 + z_2 \bar{\sigma}_3 p & 1 \\ Rz_3 + \bar{z}_3 \sigma_3 \bar{p} & R\bar{z}_3 + z_3 \bar{\sigma}_3 p & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{i}{16} \left(R^2 \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} + p\bar{p} \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{i}{16} \left(-4i\overline{ABC} + \frac{4ip\bar{p}}{R^2} \overline{ABC} \right) = \frac{1}{4} \overline{ABC} \left(1 - \frac{p\bar{p}}{R^2} \right) \\
&= \frac{R^2 - p\bar{p}}{4R^2} \overline{ABC} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} \overline{ABC}
\end{aligned}$$

Ta thấy rằng: $OP^2 - R^2$ là phương tích σ_P của điểm P qua đường tròn (ABC). Do vậy: $\overline{A_1B_1C_1} = -\frac{\sigma_P}{4R^2} \overline{ABC}$.

2) Nếu điểm P trùng với trọng tâm G của tam giác ABC thì:

$$\begin{aligned}
OP^2 = OG^2 = p\bar{p} &= \frac{1}{9} (Rz_1 + Rz_2 + Rz_3) (R\bar{z}_1 + R\bar{z}_2 + R\bar{z}_3) \\
&= \frac{R^2}{9} (3 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3).
\end{aligned}$$

Tuy nhiên:

$$a^2 = (Rz_2 - Rz_3) (R\bar{z}_2 - R\bar{z}_3) = R^2 [2 - (z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2)]$$

$$\text{Suy ra: } z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 = 2 - \frac{a^2}{R^2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3 = 2 - \frac{b^2}{R^2}.$$

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2 - \frac{c^2}{R^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Như vậy thì: } OG^2 &= \frac{R^2}{9} \left(3 + 2 - \frac{a^2}{R^2} + 2 - \frac{b^2}{R^2} + 2 - \frac{c^2}{R^2} \right) \\
&= R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.
\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } R^2 - OG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

$$\text{Nhưng: } R = \frac{abc}{4|\overline{ABC}|}.$$

Do vậy: $\overline{A_1B_1C_1} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2} \overline{ABC^3}$.

3) Nếu P trùng với tâm I của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC thì $p\bar{p} = OP^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$ (công thức Euler), tức là:

$$\begin{aligned} \overline{A_1B_1C_1} &= \frac{R^2 - (R^2 - 2Rr)}{4R^2} \overline{ABC} = \frac{r}{2R} \overline{ABC} \\ &= \frac{2 \frac{|ABC|}{a+b+c}}{abc} \overline{ABC} = \frac{4\overline{ABC^3}}{abc(a+b+c)} \\ &= \frac{2|\overline{ABC}|}{4\overline{ABC^3}} \end{aligned}$$

Do vậy: $\overline{A_1B_1C_1} = \frac{4\overline{ABC^3}}{abc(a+b+c)}$.

Nhận xét: chú ý công thức $\frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}} = \frac{r}{2R}$ với A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của I lên các cạnh BC, CA, AB.

4) Trong trường hợp P trùng với O thì $p\bar{p} = OP^2 = O$, do đó:

$$\overline{A_1B_1C_1} = \frac{R^2}{4R^2} \overline{ABC} = \frac{1}{4} \overline{ABC}$$

(điều này được rút ra từ những kiến thức hình học cơ bản).

5) Trong trường hợp P trùng với trực tâm H của tam giác ABC, ta có:

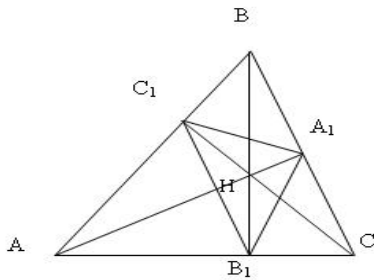
$$\begin{aligned} \overline{A_1B_1C_1} &= \frac{R^2 - OH^2}{4R^2} \overline{ABC} = \frac{R^2 - (3OG)^2}{4R^2} \overline{ABC} \\ &= \frac{R^2 - 9 \left(R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \right)}{4R^2} \overline{ABC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2}{4R^2} \overline{ABC} \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 2 \right) \overline{ABC} = \left(\frac{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2} - 2}{\frac{4(\overline{ABC})^2}{a^2b^2c^2}} \right) \overline{ABC} \\ &= \left(4 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2} \overline{ABC^2} - 2 \right) \overline{ABC} \\ \frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 2 - \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} - 2 \\
&= -\frac{1}{2}(1 + \cos 2C + \cos 2B + \cos 2A) \\
&= -\frac{1}{2}[2\cos^2 C + 2\cos(A+B)\cos(A-B)] \\
&= -\cos^2 C - \cos(A+B)\cos(A-B) \\
&= -\cos^2 C + \cos C \cos(A-B) \\
&= \cos C [\cos(A-B) - \cos C] \\
&= \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\
&= 2 \cos A \cos B \cos C.
\end{aligned}$$

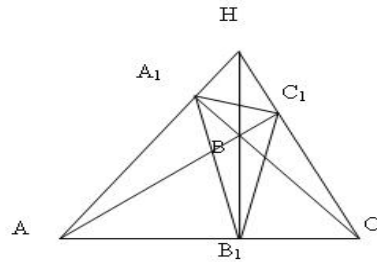
Như vậy nếu $A_1B_1C_1$ là tam giác trực giao với tam giác ABC (tức là A_1, B_1, C_1 là các chân đường cao của tam giác ABC), thì:

$$\frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}} = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Như vậy suy ra nếu tam giác ABC là tam giác nhọn thì tam giác $\overrightarrow{ABC}$ và $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ có cùng hướng (Hình 3.4 a), còn nếu là tam giác tù thì ngược lại (Hình 3.4 b).



Hình 3.4 a



Hình 3.4 b

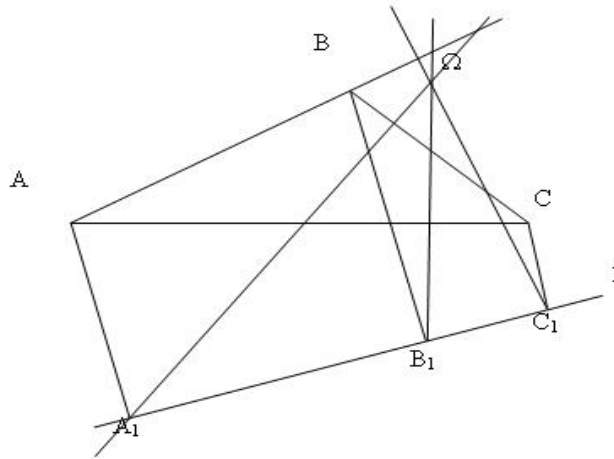
Hình 3.4: Biểu diễn hình học

Ví dụ 3.2.9. Cho tam giác ABC và đường thẳng l . Cho A_1, B_1, C_1 là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên l . Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua các điểm A_1, B_1, C_1 và vuông góc với các đường thẳng BC, CA, AB

thì cắt nhau tại điểm trực chuẩn (Hình 3.5). Khi lấy đường tròn (ABC) là đường tròn đơn vị và xét đường thẳng l được cho bởi phương trình:

$$z - z_0 = \alpha (\bar{z} - \bar{z}_0), |\alpha| = 1 \quad (3.4)$$

Hãy tìm tọa vị ω của trực chuẩn Ω của đường thẳng l đi qua tam giác ABC. Biết tọa vị của các đỉnh của tam giác ABC lần lượt là z_1, z_2, z_3 .



Hình 3.5: Biểu diễn hình học

Lời giải. Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng l có dạng:

$$z - z_1 = -\alpha (\bar{z} - \bar{z}_1) \quad (3.5)$$

Khi viết lại pt (3.4) và (3.5) có dạng:

$$z - \alpha \bar{z} = z_0 - \alpha \bar{z}_0,$$

$$z - \alpha \bar{z} = z_1 - \alpha \bar{z}_1.$$

Và cộng các phương trình này ta tìm được tọa vị a_1 của điểm A_1 :

$$a_1 = \frac{1}{2} (z_0 + z_1 + \alpha \bar{z}_1 - \alpha \bar{z}_0)$$

Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có dạng:

$$z - a_1 = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{a}_1)$$

Hay $z - \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + \alpha\bar{z}_1 - \alpha\bar{z}_0) = z_2z_3 \left[\bar{z} - \frac{1}{2} \left(\bar{z}_0 + \frac{1}{z_1} + \frac{z_1}{\alpha} - \frac{z_0}{\alpha} \right) \right]$.

Hay

$$z - z_2z_3\bar{z} = \frac{1}{2} \left(z_0 + z_1 + \frac{\alpha}{z_1} - \alpha\bar{z}_0 - \frac{z_2z_3}{z_1} - z_2z_3\bar{z}_0 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + \frac{z_2z_3z_0}{\alpha} \right) \quad (3.6)$$

Tương tự phương trình đường vuông góc kẻ từ điểm B_1 đến đường thẳng AC có dạng:

$$z - z_3z_1\bar{z} = \frac{1}{2} \left(z_0 + z_2 + \frac{\alpha}{z_2} - \alpha\bar{z}_0 - \frac{z_3z_1}{z_2} - z_3z_1\bar{z}_0 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + \frac{z_3z_1z_0}{\alpha} \right) \quad (3.7)$$

Khi trừ phương trình (3.6) cho (3.7) ta tìm được số $\bar{\omega}$ đối tiếp với tọa vị ω của giao điểm của đường thẳng (3.6) và (3.7):

$$\begin{aligned} & z_3(z_1 - z_2)\bar{\omega} \\ &= \frac{1}{2} \left[z_1 - z_2 + \alpha \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) + z_3 \left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1} \right) + z_3(z_1 - z_2)\bar{z}_0 - \frac{z_3z_0}{\alpha}(z_1 - z_2) \right]. \end{aligned}$$

Khi giản ước $z_1 - z_2$:

$$z_3\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{z_1z_2} + \frac{z_3z_1 + z_3z_2}{z_1z_2} + z_3\bar{z}_0 - \frac{z_3z_0}{\alpha} \right)$$

$$\text{Do vậy: } \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_3} - \frac{\alpha}{z_1z_2z_3} + \frac{z_1 + z_2}{z_1z_2} + \bar{z}_0 - \frac{z_0}{\alpha} \right).$$

$$\text{Hoặc: } \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{\alpha}{\sigma_3} + \bar{z}_0 - \frac{z_0}{\alpha} \right).$$

$$\text{Suy ra: } \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_3} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\sigma}_3} + z_0 - \alpha\bar{z}_0 \right).$$

$$\text{Nhưng } \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \bar{\sigma}_3 = \frac{1}{\sigma_3} \text{ nên}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + z_0 - \alpha\bar{z}_0 \right) \quad (3.8)$$

Phép đối xứng của phương trình này qua z_1, z_2, z_3 cho phép kết luận rằng đường vuông góc kẻ từ C_1 đến đường thẳng AB và đi qua điểm có tọa vị ω , được xác định bởi công thức (3.8), nghĩa là tọa vị trực chuẩn của đường thẳng l qua tam giác ABC được xác định bằng công thức (3.8). Tuy nhiên, khi viết phương trình đường vuông góc hạ từ C_1 đến đường

thẳng AB , số ω được xác định bởi công thức (3.8), thỏa mãn phương trình của đường vuông góc này.

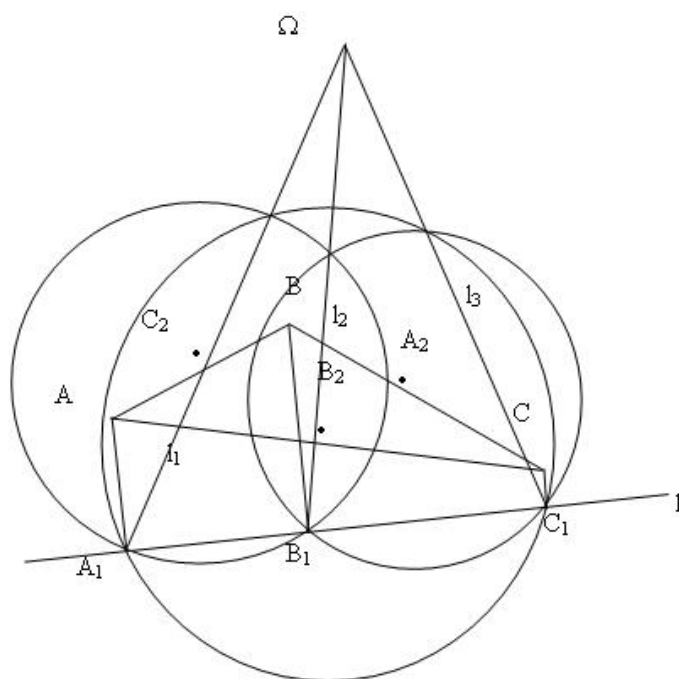
Cụ thể nếu đường thẳng l đi qua tâm O của đường tròn đơn vị $(O) = (ABC)$, thì tọa vị của trục chuẩn qua tam giác ABC sẽ là:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{\alpha} \right)$$

Còn nếu điểm buten là điểm đơn vị thì:

$$\omega = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \bar{\alpha})$$

Trên Hình 3.5 chỉ ra cách dựng điểm trục chuẩn Ω qua tam giác ABC , bởi các đường thẳng BC , CA , AB và giao tại điểm Ω , có thể thực hiện: lấy A_2, B_2, C_2 là trung điểm của BC , CA , AB , khi đó các trục đẳng phương của đường tròn từng cặp (A_2, A_2C_1) , (B_2, B_2A_1) , (C_2, C_2B_1) là các đường thẳng l_1, l_2, l_3 bởi chúng giao nhau tại một điểm Ω (Hình 3.6).



Hình 3.6: Biểu diễn hình học

Ví dụ 3.2.10. Cho A', B', C' là các điểm đối xứng của các đỉnh A, B, C trong tam giác ABC qua các cạnh BC, CA, AB . Với hệ thức nào giữa các góc A, B, C của tam giác ABC là cần và đủ để các đường thẳng AB', BC', CA' đồng quy?

Do đó: $b' = z_1 + z_3 - \frac{z_3 z_1}{z_2}$.

Suy ra: $\bar{b}' = \bar{z}_1 + \bar{z}_3 - \frac{\bar{z}_2}{z_3 z_1} = \frac{z_1 + z_3 - z_2}{z_1 z_3}$.

Ta lập được phương trình đường thẳng AB':

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ b' & \bar{b}' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hoặc: $z(\bar{z}_1 - \bar{b}') + (b' - z_1) + z_1 \bar{b}' - b' \bar{z}_1 = 0$.

Ta có: $\bar{z}_1 - \bar{b}' = \frac{1}{z_1} - \frac{z_3 + z_1 - z_2}{z_3 z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 z_1}$.

$$z_1 - b' = \frac{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3 z_1}} = \frac{z_3(z_1 - z_2)}{z_2}$$

$$b' - z_1 = \frac{z_3(z_2 - z_1)}{z_2}$$

$$\begin{aligned} z_1 \bar{b}' - b' \bar{z}_1 &= z_1 \frac{z_3 + z_1 - z_2}{z_3 z_1} - \frac{1}{z_1} \left(z_3 + z_1 - \frac{z_3 z_1}{z_2} \right) \\ &= \frac{z_3 + z_1 - z_2}{z_3} - \frac{z_3}{z_1} - 1 + \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_1}{z_3} - \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} - \frac{z_2}{z_3} \\ &= \frac{1}{z_3} (z_1 - z_2) + z_3 \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{z_3} (z_1 - z_2) + z_3 \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \\ &= (z_1 - z_2) \left(\frac{1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1 z_2} \right). \end{aligned}$$

Và phương trình đường thẳng AB' chuyển sang dạng:

$$\frac{1}{z_3 z_1} + \frac{z_3}{z_2} \bar{z} - \frac{1}{z_3} - \frac{z_3}{z_1 z_2} = 0$$

$$\text{Hay: } z_2 z + z_3^2 z_1 \bar{z} - z_3^2 - z_1 z_2 = 0$$

Tương tự phương trình đường thẳng BC' và CA' được viết như sau:

$$z_2 z + z_3^2 z_1 \bar{z} - z_3^2 - z_1 z_2 = 0 \quad (AB').$$

$$z_3 z + z_1^2 z_2 \bar{z} - z_1^2 - z_2 z_3 = 0 \quad (BC').$$

$$z_1 z + z_2^2 z_3 \bar{z} - z_2^2 - z_3 z_1 = 0 \quad (CA').$$

K, M, L là giao điểm của các đường thẳng BC' và CA', CA' và AB', AB' và BC'. Khi đó:

$$\overline{KML} = \frac{i}{4\sigma_3(z_2z_3^2 + z_1^3)(z_3z_1^2 + z_2^3)(z_1z_2^2 + z_3^3)} \cdot \begin{vmatrix} z_2 & z_3^2z_1 & z_3^2 + z_1z_2 \\ z_3 & z_1^2z_2 & z_1^2 + z_2z_3 \\ z_1 & z_2^2z_3 & z_2^2 + z_3z_1 \end{vmatrix}^2.$$

Hơn nữa:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} z_2 & z_3^2z_1 & z_3^2 + z_1z_2 \\ z_3 & z_1^2z_2 & z_1^2 + z_2z_3 \\ z_1 & z_2^2z_3 & z_2^2 + z_3z_1 \end{vmatrix} \\ &= z_1^2z_2^4 + z_1^3z_2^3z_3 + z_2^2z_3^4 + z_1z_3^2z_2^3 + z_1^4z_3^2 + z_1^2z_2z_3^3 - z_1^3z_2z_3^2 - z_1^4z_2^2 - z_1^2z_2^3z_3 \\ &\quad - z_2^4z_3^2 - z_1z_2^2z_3^3 - z_1^2z_3^4 \\ &= z_1^2z_2^2(z_2^2 - z_1^2) - z_1^2z_2^2z_3(z_2 - z_1) + z_3^4(z_2^2 - z_1^2) \\ &\quad + z_3^2z_2z_1(z_2^2 - z_1^2) - z_3^2(z_3^4 - z_1^4) - z_3^3z_1z_2(z_2 - z_1) \\ &= (z_2 - z_1)(z_1^2z_2^3 + z_1^3z_2^2 - z_1^2z_2^2z_3 + z_3^4z_2 + z_3^4z_1 + z_3^2z_2^2z_1 \\ &\quad + z_3^2z_2z_1^2 - z_3^2z_2^3 - z_3^2z_2^2z_1 - z_3^2z_2z_1^2 - z_3^2z_1^3 - z_3^3z_1z_2) \\ &= (z_2 - z_1)[z_1^2z_2^2(z_1 - z_3) + z_2^3(z_1^2 - z_3^2) - z_2z_3^2(z_1^2 - z_3^2) \\ &\quad - z_1z_3^2(z_1^2 - z_3^2) + z_3^2z_2z_1(z_1 - z_3)] \\ &= (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)(z_1^2z_2^2 + z_2^3z_1 + z_2^3z_3 - z_2z_1z_3^2 - z_2z_3^3 \\ &\quad - z_1^2z_3^2 - z_1z_3^3 + z_3^2z_1z_2) \\ &= (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)[z_1^2(z_2^2 - z_3^2) + z_1(z_2^3 - z_3^3) + z_2z_3(z_2^2 - z_3^2)] \\ &= (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)(z_1^2z_2^2 + z_2^3z_1 + z_2^3z_3 - z_2z_1z_3^2 - z_2z_3^3 - z_1^2z_3^2 \\ &\quad - z_1z_3^3 + z_3^2z_1z_2) \\ &= (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)[z_1^2(z_2^2 - z_3^2) + z_1(z_2^3 - z_3^3) + z_2z_3(z_2^2 - z_3^2)] \\ &= (z_2 - z_1)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_1^2z_2 + z_1^2z_3 + z_1z_2^2 + z_1z_2z_3 + z_1z_3^2 \\ &\quad + z_2^2z_3 + z_2z_3^2) \\ &= (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1^2z_2 + z_2^2z_1 + z_2^2z_3 + z_3^2z_2 + z_3^2z_1 \\ &\quad + z_1^2z_3 + z_1z_2z_3). \end{aligned}$$

Xét tích:

$$(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)(z_1 + z_2) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = 2z_1z_2z_3 + z_1^2z_2 + z_2^2z_1 + z_2^2z_3 + z_3^2z_2$$

$$+z_3^2 z_1 + z_1^2 z_3.$$

Suy ra thừa số cuối: $\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_3$.

Nên: $\Delta = (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_3)$.

Như vậy: $\overline{KLM} = \frac{i(z_2 - z_1)^2(z_3 - z_1)^2(z_3 - z_2)^2(\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_3)^2}{4 \sigma_3 (z_2 z_3^2 - z_1^3)(z_3 z_1^2 - z_2^3)(z_1 z_2^2 - z_3^3)}$.

Ta thấy rằng:

$$\begin{aligned} & (z_3 - z_2)(z_3 - z_1)(z_2 - z_1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} = \sigma_3 \begin{vmatrix} \overline{z_1} & 1 & z_1 \\ \overline{z_2} & 1 & z_2 \\ \overline{z_3} & 1 & z_3 \end{vmatrix} = \sigma_3 \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = -4i\sigma_3 \overline{ABC} \end{aligned}$$

Nên: $\overline{KLM} = -\frac{4i\sigma_3(\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_3) \overline{ABC^2}}{(z_2 z_3^2 - z_1^3)(z_3 z_1^2 - z_2^3)(z_1 z_2^2 - z_3^3)}$.

Các đường thẳng AB', BC', CA' đồng quy khi và chỉ

$$\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_3 = 0.$$

Hay: $\sigma_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_3} - 2 = 0, \sigma_1 \overline{\sigma_1} - 2 = 0$.

Do đó: $\sigma_1 \overline{\sigma_1} = OH^2 = 2 = 2R^2 \quad (|R| = 1)$

Từ đó suy ra tam giác ABC là tam giác tù. Vì $EH > R$ suy ra trực tâm H nằm ngoài đường tròn ABC.

Tam giác thỏa mãn $OH = R\sqrt{2}$ được dựng như sau: ta dựng 2 đường tròn đồng tâm (O) và (O') có bán kính lần lượt là 1 và $\sqrt{2}$ (xem Hình. 3.7). Trên đường tròn (O') lấy 1 điểm H bất kì, còn trên đường tròn (O) ta lấy 1 điểm A bất kì. Đoạn chia theo tỉ lệ 1: 2

$$\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{GH} = 1 : 2.$$

Có G là trọng tâm của tam giác ABC. Nối A với G, ta có $GA_1 = \frac{AG}{2}$. A_1 là trung điểm của của đoạn BC, vì vậy khi lấy 1 đường thẳng qua A_1 và vuông góc với OA_1 , cắt đường tròn (O) ta được 2 điểm B và C.

Điều kiện cần là điểm A_1 nằm trong đường tròn (O). Do A_1 là ảnh của A qua phép tịnh tiến $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ và phép tịnh tiến này biến đường tròn (O)

thành đường tròn (O'') có bán kính bằng $\frac{1}{2}$, tâm O'' nằm trên đường thẳng

OH, hơn nữa $OO'' = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên đường tròn (O) và (O'') giao

nhau tại các điểm P và Q. Do vậy điểm A có thể dựng được cung mở PRQ của đường tròn (O). Từ tam giác OPO'' ta có :

$$PO''^2 = OP^2 + OO''^2 - 2OP.OO'' \cos \frac{\alpha}{2} \text{ với } \alpha \text{ là cung POQ.}$$

$$\text{Vì } PO'' = \frac{1}{2}, OO'' = \frac{\sqrt{2}}{2}, OP = 1 \text{ nên } \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} - 2.1.\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{4\sqrt{2}}.$$

$$\text{Do vậy: } \cos \alpha = 2.\frac{25}{32} - 1 = \frac{9}{16}, \alpha = \arccos \frac{9}{16}.$$

Điều kiện $OH^2 = 2R^2$ có thể viết sang dạng khác (xem ví dụ 3.2.8).

$$\text{Vì } OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ nên } 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2R^2 \text{ hay } a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2.$$

$$\text{Hay theo cách khác } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Hay là } \cos A \cos B \cos C = -\frac{1}{8}.$$

(từ đó suy ra $\triangle ABC$ là tam giác tù).

Ví dụ 3.2.11. Cho hàm phân số tuyến tính (hàm phân số bậc 1) $u = \frac{az + b}{cz + d}$ với a, b, c, d là những số phức cố định thỏa mãn $ad - bc \neq 0, c \neq 0; z$ là argumen, u là hàm số.

$$\Omega_1 = (0, 1)$$

$$\Omega_2 = \left(\frac{d}{c}, 1\right)$$

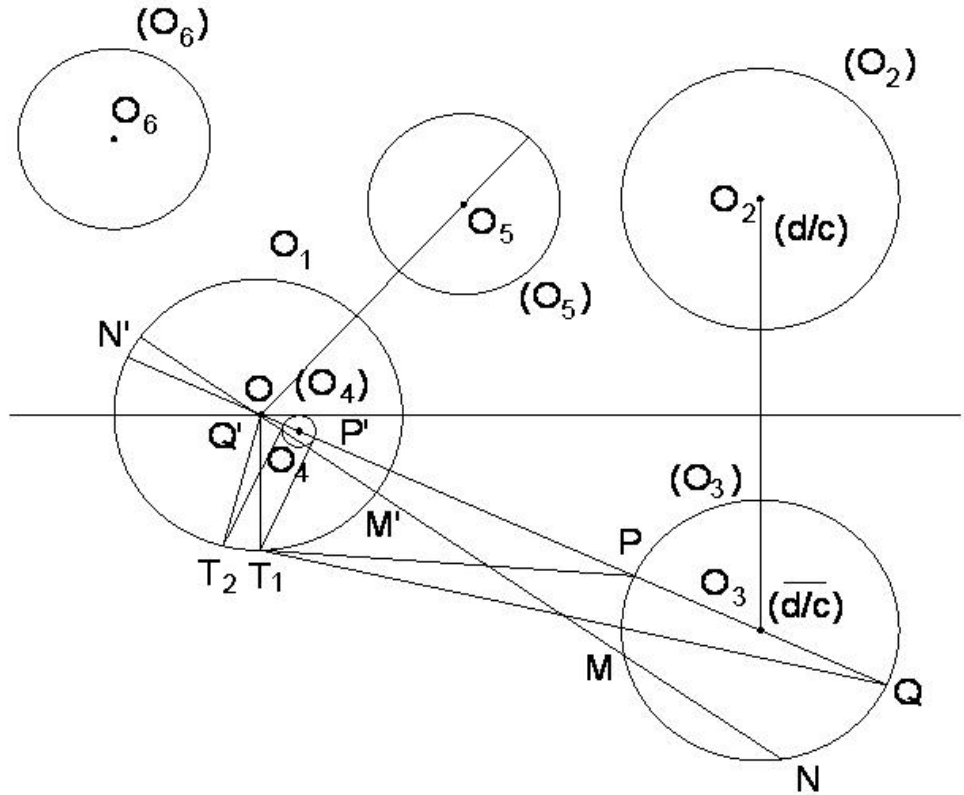
$$\Omega_3 = \left(\frac{\bar{d}}{c}, 1\right)$$

$$\Omega_4 = \left(\frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}}, \frac{c\bar{c}}{|d\bar{d} - c\bar{c}|}\right)$$

$$\Omega_5 = \left(\frac{\bar{d}bc - ad}{c d\bar{d} - c\bar{c}}, \left|\frac{bc - ad}{d\bar{d} - c\bar{c}}\right|\right)$$

$$\Omega_6 = \left(\frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d\bar{d} - c\bar{c}}, \left|\frac{bc - ad}{d\bar{d} - c\bar{c}}\right|\right)$$

Chứng minh rằng: nếu $|c| \neq |d|$ thì ảnh của đường tròn đơn vị qua phép hoán vị này sẽ là một đường tròn. Hãy tìm bán kính và tọa vị tâm đường tròn đó.



Hình 3.8: Biểu diễn hình học

Lời giải. Ta chuyển hàm số u sang dạng sau:

$$u = \frac{a}{c} + \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$$

1) Phép biến đổi $z \rightarrow z + \frac{d}{c}$ biến đường tròn đơn vị $(\Omega_1) = (0, 1)^1$ thành đường tròn $(\Omega_2) = \left(\frac{d}{c}, 1\right)$ (h.???)

2) Phép biến đổi đối xứng $z + \frac{d}{c} \rightarrow \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$ qua trục Ox biến đường tròn

$(\Omega_2) = \left(\frac{d}{c}, 1\right)$ thành đường tròn $(\Omega_3) = \left(\frac{\bar{d}}{c}, 1\right)$, và phép nghịch đảo tiếp theo của đường tròn (Ω_3) qua đường tròn (Ω_1) biến đường tròn (Ω_3) thành

đường tròn (Ω_4) ; đối với việc dựng đường tròn (Ω_4) cần lấy đường thẳng $O\Omega_3$, và dựng ảnh P' , Q' của P và Q là các điểm đầu nút của đường kính. Đường tròn $(P'Q')$ được dựng trên đoạn $P'Q'$ ($P'Q'$ là đường kính) sẽ là đường tròn (Ω_4) . Ta sẽ tính bán kính của đường tròn (Ω_4) và tọa vị của tâm đường tròn. Phép nghịch đảo đối với đường tròn (Ω_1) và phép tịnh tiến $\left(O, \frac{1}{\sigma}\right)$ với σ - là phương tích của điểm O đối với đường tròn (Ω_3) biến đường tròn (Ω_3) thành đường tròn (Ω_4) .

Nhưng phép tịnh tiến $\left(O, \frac{1}{\sigma}\right)$ biến tâm của đường tròn (Ω_3) thành tâm của đường tròn (Ω_4) , tức là tọa vị ω_4 của tâm Ω_4 của đường tròn (Ω_4) sẽ bằng:

$$\omega_4 = \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{d}}{c}$$

Còn bán kính sẽ bằng tích của bán kính $R_3 = 1$ của đường tròn (Ω_3) với modun của hệ số tịnh tiến tức là $\frac{1}{|\sigma|}$:

$$R_4 = R_3 \frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|}$$

$$\text{Hơn nữa: } \sigma = O\Omega_3^2 - R_3^2 = \frac{\bar{d}d}{\bar{c}c} - 1 = \frac{d\bar{d} - c\bar{c}^2}{c\bar{c}}.$$

$$\text{Nên: } (\Omega_4) = \left(\frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}}, \frac{c\bar{c}}{|d\bar{d} - c\bar{c}|} \right).$$

3) Phép biến đổi:

$$\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \rightarrow \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$$

Là phép xoay mặt phẳng tại góc $\arg \frac{bc - ad}{c^2}$ và phép tịnh tiến tâm O với hệ số $\frac{|bc - ad|}{|c|^2}$. Sau 2 phép biến đổi này đường tròn (Ω_5) chuyển thành đường tròn (Ω_4) , tọa vị ω_5 của tâm đường tròn là:

$$\omega_5 = \omega_4 \frac{bc - ad}{c^2} = \frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}} \frac{bc - ad}{c^2} = \frac{\bar{d}bc - ad}{c(d\bar{d} - c\bar{c})}$$

Còn đường kính là: $R_5 = \left| \frac{c\bar{c}}{d\bar{d} - c\bar{c}} \cdot \frac{bc - ad}{c^2} \right| = \left| \frac{bc - ad}{d\bar{d} - c\bar{c}} \right|^1$.

Như vậy: $(\Omega_5) = \left(\frac{\bar{d}bc - ad}{c d\bar{d} - c\bar{c}}, \left| \frac{bc - ad}{d\bar{d} - c\bar{c}} \right| \right)$.

4) Phép biến đổi :

$$\frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} \rightarrow \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$$

Biến đường tròn (Ω_5) thành đường tròn (Ω_6) đồng thời bán kính $R_6 = R_5$, còn tọa vị ω_6 của tâm Ω_6 của đường tròn Ω_6 bằng:

$$\omega_6 = \frac{a}{c} + \frac{\bar{d}bc - ad}{c d\bar{d} - c\bar{c}} = \frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d\bar{d} - c\bar{c}}$$

Kết quả cuối cùng của phép biến đổi:

$$u = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0, c \neq 0, |c| \neq |d|$$

Là đường tròn $(\Omega_1) = (0, 1)$ chuyển thành đường tròn:

$$(\Omega_6) = \left(\frac{b\bar{d} - a\bar{c}}{d\bar{d} - c\bar{c}}, \left| \frac{bc - ad}{d\bar{d} - c\bar{c}} \right| \right)$$

Ví dụ 3.2.12. Cho P, Q, R là các hình chiếu trực giao của M lên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Biết rằng A_1, B_1, C_1 thu được qua phép nghịch đảo của các điểm A_0, B_0, C_0 (là trung điểm của các cạnh MA, MB, MC) qua đường tròn (PQR) và các điểm A_J, B_J, C_J của tam giác tạo thành các cực tuyến của A_0, B_0, C_0 cũng qua đường tròn (PQR) . Chứng minh rằng:

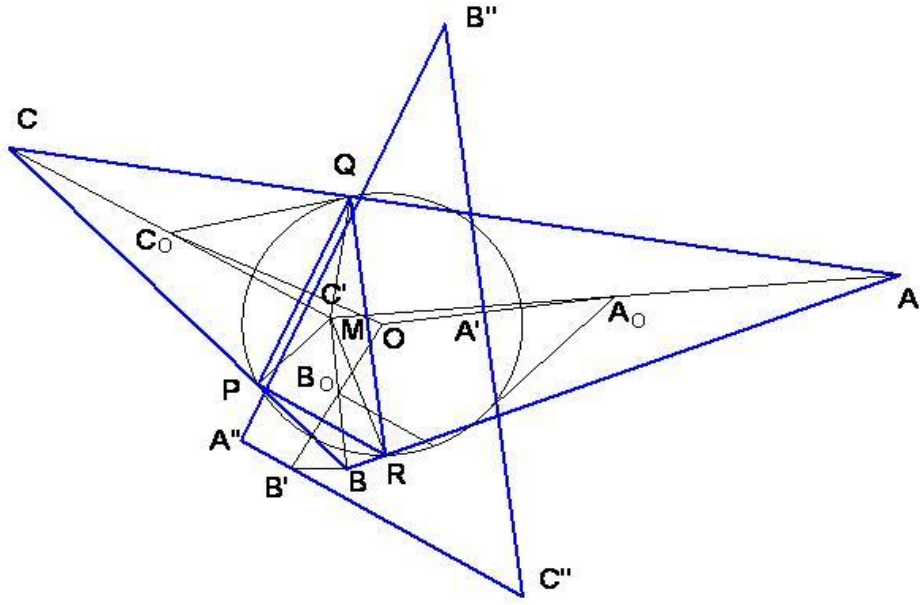
$$\overline{A'B'C'}^2 = \frac{1}{4} \overline{A''B''C''} \cdot \overline{PQR}$$

Lời giải

Coi đường tròn (PQR) là đường tròn đơn vị. Cho z_1, z_2, z_3 là các tọa vị của P, Q, R và là tọa vị của M .

Hệ số góc của đường thẳng MP bằng:

$$\frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1}$$



Hình 3.9: Biểu diễn hình học

Tức là hệ số góc của đường thẳng BC sẽ bằng:

$$-\frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1}$$

Và phương trình đường thẳng BC có dạng:

$$z - z_1 = -\frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1} (\bar{z} - \bar{z}_1) \quad (3.9)$$

Phương trình đường thẳng CA là:

$$z - z_2 = -\frac{\mu - z_2}{\bar{\mu} - \bar{z}_2} (\bar{z} - \bar{z}_2) \quad (3.10)$$

Trừ phương trình (3.9) cho (3.10) ta được số phức $\bar{z}$ liên hợp với tọa vị c của điểm C:

$$z_2 - z_1 = \left(\frac{\mu - z_2}{\bar{\mu} - \bar{z}_2} - \frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1} \right) \bar{z} + \bar{z}_1 \frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1} - \bar{z}_2 \frac{\mu - z_2}{\bar{\mu} - \bar{z}_2}$$

$$\text{Hay: } z_2 - z_1 = \frac{(z_2 - z_1) \left(-\bar{\mu} - \frac{\mu}{z_1 z_2} + \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \right)}{(\mu - \bar{z}_1)(\mu - \bar{z}_2)} \bar{z} + \frac{(z_2 - z_1) \frac{\mu \bar{\mu} - 1}{z_1 z_2}}{(\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\mu - \bar{z}_2)}$$

Rút gọn cho $z_2 - z_1$ và nhân cả 2 vế với $(\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\bar{\mu} - \bar{z}_2)$ ta được:

$$(\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\bar{\mu} - \bar{z}_2) = \left(-\bar{\mu} - \frac{\mu}{z_1 z_2} + \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \right) \bar{z} + \frac{\mu \bar{\mu} - 1}{z_1 z_2}$$

Suy ra:

$$\left(-\bar{\mu} - \frac{\mu}{z_1 z_2} + \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}\right) \bar{z} = (\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\bar{\mu} - \bar{z}_2) - \bar{z}_1 \bar{z}_2 (\mu \bar{\mu} - 1)$$

Hay: $(-\bar{\mu} - \mu \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2) \bar{z} = \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (2 - \mu \bar{\mu}) \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Suy ra: $\bar{c} = \frac{\bar{\mu}^2 - \bar{\mu}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (2 - \mu \bar{\mu}) \bar{z}_1 \bar{z}_2}{-\bar{\mu} - \mu \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2}$

Và: $c = \frac{\mu^2 - \mu(z_1 + z_2) + (2 - \bar{\mu} \mu) z_1 z_2}{-\mu - \bar{\mu} z_1 z_2 + z_1 + z_2}$

Hay: $c = \frac{-\mu^2 + \mu(z_1 + z_2) + (\bar{\mu} \mu - 2) z_1 z_2}{\mu + \bar{\mu} z_1 z_2 - z_1 - z_2}$

Tọa vị c_0 của trung điểm đoạn MC là:

$$c_0 = \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{-\mu^2 + \mu(z_1 + z_2) + (\bar{\mu} \mu - 2) z_1 z_2}{\mu + \bar{\mu} z_1 z_2 - z_1 - z_2} \right) = \frac{(\bar{\mu} \mu - 1) z_1 z_2}{\mu + \bar{\mu} z_1 z_2 - z_1 - z_2}$$

Còn tọa vị c' của C' có được từ điểm C_0 chuyển vị qua đường tròn (PQR) là:

$$c' = \frac{1}{c_0} = \frac{\bar{\mu} + \mu \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2}{(\mu \bar{\mu} - 1) \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{\mu + \bar{\mu} z_1 z_2 - z_1 - z_2}{\mu \bar{\mu} - 1}$$

Tương tự ta tìm được tọa vị a' và b' của các điểm A', B':

$$a'' = \frac{\mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3}{\mu \bar{\mu} - 1}$$

$$b' = \frac{\mu + \bar{\mu} z_3 z_1 - z_3 - z_1}{\mu \bar{\mu} - 1}$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \overline{A'B'C'} &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a' & \bar{a}' & 1 \\ b' & \bar{b}' & 1 \\ c' & \bar{c}' & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{i}{4(\mu \bar{\mu} - 1)^2} \begin{vmatrix} \mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3 & \bar{\mu} + \mu \bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3 & 1 \\ \mu + \bar{\mu} z_3 z_1 - z_3 - z_1 & \bar{\mu} + \mu \bar{z}_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 - \bar{z}_1 & 1 \\ \mu + \bar{\mu} z_1 z_2 - z_1 - z_2 & \bar{\mu} + \mu \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{i}{4(\mu \bar{\mu} - 1)^2} \begin{vmatrix} \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3 & \mu \bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3 & 1 \\ \bar{\mu} z_3 z_1 - z_3 - z_1 & \mu \bar{z}_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 - \bar{z}_1 & 1 \\ \bar{\mu} z_1 z_2 - z_1 - z_2 & \mu \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{i}{4(\mu \bar{\mu} - 1)^2} \begin{vmatrix} \bar{\mu} \sigma_3 \bar{z}_1 - \sigma_1 + z_1 & \mu \bar{\sigma}_3 z_1 - \bar{\sigma}_1 + \bar{z}_1 & 1 \\ \bar{\mu} \sigma_3 \bar{z}_2 - \sigma_1 + z_2 & \mu \bar{\sigma}_3 z_2 - \bar{\sigma}_1 + \bar{z}_2 & 1 \\ \bar{\mu} \sigma_3 \bar{z}_3 - \sigma_1 + z_3 & \mu \bar{\sigma}_3 z_3 - \bar{\sigma}_1 + \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{4(\mu\bar{\mu} - 1)^2} \begin{vmatrix} \bar{\mu}\sigma_3\bar{z}_1 + z_1 & \mu\bar{\sigma}_3z_1 + \bar{z}_1 & 1 \\ \bar{\mu}\sigma_3\bar{z}_2 + z_2 & \mu\bar{\sigma}_3z_2 + \bar{z}_2 & 1 \\ \bar{\mu}\sigma_3\bar{z}_3 + z_3 & \mu\bar{\sigma}_3z_3 + \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{i}{4(\mu\bar{\mu} - 1)^2} \left[\mu\bar{\mu}\sigma_3\bar{\sigma}_3 \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&= \frac{i(1 - \mu\bar{\mu})}{4(1 - \mu\bar{\mu})^2} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\overline{PQR}}{1 - \mu\bar{\mu}}
\end{aligned}$$

Hệ số góc của đường thẳng OA_0 là:

$$\begin{aligned}
\alpha_{OA_0} &= \frac{(\mu\bar{\mu} - 1) z_2 z_3}{\mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3} : \frac{(\mu\bar{\mu} - 1) \bar{z}_2 \bar{z}_3}{\bar{\mu} + \mu \bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3} \\
&= \frac{(\mu\bar{\mu} - 1) z_2 z_3}{\mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3} : \frac{\mu\bar{\mu} - 1}{\mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3} = z_2 z_3
\end{aligned}$$

Do vậy phương trình điểm cực của A_0, B_0 đối với đường tròn (PQR) cũng như các đường thẳng đi qua các điểm A', B' và lần lượt vuông góc với các đường thẳng OA' và OB' là:

$$\begin{aligned}
z - \frac{\mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3}{\mu\bar{\mu} - 1} &= -z_2 z_3 \left(\bar{z} - \frac{\bar{\mu} + \mu \bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3}{\mu\bar{\mu} - 1} \right) \\
z - \frac{\mu + \bar{\mu} z_3 z_1 - z_3 - z_1}{\mu\bar{\mu} - 1} &= -z_2 z_3 \left(\bar{z} - \frac{\bar{\mu} + \mu \bar{z}_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\mu\bar{\mu} - 1} \right)
\end{aligned}$$

Tọa vị c^n của giao điểm C^n có được từ phương trình:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{z_2 z_3} \left(z - \frac{\mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3}{\mu\bar{\mu} - 1} \right) + \frac{\bar{\mu} + \mu \bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3}{\mu\bar{\mu} - 1} \\
&= -\frac{1}{z_3 z_1} \left(z - \frac{\mu + \bar{\mu} z_3 z_1 - z_3 - z_1}{\mu\bar{\mu} - 1} \right) + \frac{\bar{\mu} + \mu \bar{z}_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\mu\bar{\mu} - 1} \\
&-\frac{z}{z_2 z_3} + 2 \frac{\mu + \bar{\mu} z_2 z_3 - z_2 - z_3}{z_2 z_3 (\mu\bar{\mu} - 1)} = -\frac{z}{z_3 z_1} + \frac{\mu + \bar{\mu} z_3 z_1 - z_3 - z_1}{z_3 z_1 (\mu\bar{\mu} - 1)} \\
&\frac{(z_2 - z_1) z}{\sigma_3} = \frac{2}{\mu\bar{\mu} - 1} \left[\frac{\mu}{z_3} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right]
\end{aligned}$$

Suy ra: $c'' = \frac{2}{\mu\bar{\mu} - 1} (\mu - z_3)$.

Tương tự có:

$$a'' = \frac{2}{\mu\bar{\mu} - 1} (\mu - z_1)$$

$$b'' = \frac{2}{\mu\bar{\mu} - 1} (\mu - z_2)$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\overline{A''B''C''} &= \frac{i}{4} \frac{4}{(\mu\bar{\mu} - 1)^2} \begin{vmatrix} \mu - z_1 & \bar{\mu} - \bar{z}_1 & 1 \\ \mu - z_2 & \bar{\mu} - \bar{z}_2 & 1 \\ \mu - z_3 & \bar{\mu} - \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{(\mu\bar{\mu} - 1)^2} \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{4}{(\mu\bar{\mu} - 1)^2} \overline{PQR}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \overline{A'B'C'} = \frac{PQR}{1 - \mu\bar{\mu}}.$$

$$\overline{A''B''C''} = \frac{4}{(1 - \mu\bar{\mu})^2} \overline{PQR}$$

$$\text{Suy ra: } \overline{A'B'C'}^2 = \frac{\overline{PQR}^2}{(1 - \mu\bar{\mu})^2} = \frac{1}{4} \overline{A''B''C''} \cdot \overline{PQR}$$

Tam giác $\overrightarrow{A'B'C'}$ và $\overrightarrow{PQR}$ cùng hướng khi và chỉ khi $1 - \mu\bar{\mu} > 0$, tức là phương tích của điểm M qua đường tròn (PQR) là âm, cũng có nghĩa khi và chỉ khi điểm M nằm bên trong đường tròn (PQR) và thỏa mãn $\overline{A'B'C'} \Downarrow \overline{PQR}$.

Kết luận

Qua luận văn này, tác giả đã đề cập đến 3 nội dung chính sau đây:

- Trình bày những kiến thức cơ bản của số phức, các dạng biểu diễn của số phức và các tính chất đặc trưng của từng dạng.
- Giới thiệu một số ví dụ về vận dụng số phức để giải các bài toán đại số và giải tích.
- Giới thiệu một số ví dụ về vận dụng số phức để giải các bài toán hình học phẳng.

Qua việc nghiên cứu cho thấy rằng:

- Luận văn đã đạt được mục tiêu ban đầu đặt ra.
- Luận văn đã giới thiệu được một số ứng dụng của số phức trong các bài toán sơ cấp để quý thầy (cô) và bạn bè tham khảo.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn mới chỉ dừng lại ở mức tìm hiểu và giới thiệu một số ứng dụng của số phức trong các bài toán sơ cấp. Trong thời gian tới, nếu điều kiện cho phép, tác giả sẽ nghiên cứu, tìm hiểu kỹ hơn để có thể đưa ra một số kết quả có tính ứng dụng thực tiễn hơn phục vụ cho quá trình học tập và nghiên cứu.

Trong quá trình thực hiện nghiên cứu luận văn chắc chắn không tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy (cô) và bạn bè để luận văn được hoàn thiện tốt hơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

- [1] Đoàn Quỳnh - Số phức với hình học phẳng - NXB Giáo dục, 1997.
- [2] P.X. Môđennôp - Bài tập hình học - NXB Khoa học, 1979 (tiếng Nga).
- [3] D.O.Skliarski, N.N.Trenxop, N.M.Iaglom - Những bài toán sơ cấp chọn lọc - NXB Khoa học, 1978 (tiếng Nga).
- [4] Nguyễn Văn Dũng - Phương pháp giải toán số phức và ứng dụng - NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2010.
- [5] Kỷ yếu hội thảo khoa học, lần thứ III, 2010.
- [6] Giải tích 12 - NXB Giáo dục, 2008.