

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ THƠM

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ THƠM

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.0113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS-TSKH HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	1
Lời nói đầu	2
Một số ký hiệu và chữ viết tắt	2
1 Kiến thức cơ bản	4
1.1 Một số tính chất đặc trưng của hàm số	4
1.2 Các phương trình hàm cơ bản	6
2 Một số phương pháp giải phương trình hàm	11
2.1 Phương pháp quy nạp	11
2.2 Phương pháp sử dụng các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh và đơn điệu của hàm số	14
2.3 Phương pháp dự đoán nghiệm và chứng minh nghiệm tìm được là duy nhất	16
2.4 Phương pháp thay thế giá trị cho các biến	19
2.5 Phương pháp chuyển qua giới hạn	21
2.6 Phương pháp chuyển về bài toán xác định dãy số	24
2.7 Phương pháp điểm bất động	26
2.8 Phương pháp chuyển về phương trình hàm Cauchy	28

2.9	Phương pháp sử dụng các tính chất của đạo hàm, nguyên hàm, tích phân	29
2.10	Phương pháp thêm biến	31
2.11	Phương pháp tổng hợp	34
Kết luận		39
Tài liệu tham khảo		40

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành luận văn này, em xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH Hà Huy Khoái, người thầy đã tận tình dạy bảo, hướng dẫn em trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Em xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy giáo, cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2011-2013. Em cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Đồng thời em xin trân trọng cảm ơn Sở giáo dục và đào tạo thành phố Hải Phòng, trường THPT Toàn Thắng, gia đình và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ về mọi mặt trong suốt quá trình em học tập và hoàn thành luận văn.

Hải Phòng, tháng 05 năm 2013.

Tác giả

Vũ Thị Thơm

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình hàm là phương trình có chứa ẩn dưới dạng hàm số chưa biết. Giải phương trình hàm là tìm hàm số chưa biết từ phương trình hàm đã cho.

Lý thuyết phương trình hàm là một trong những lĩnh vực nghiên cứu quan trọng của lý thuyết số và giải tích toán học. Các dạng toán về phương trình hàm rất phong phú, bao gồm các phương trình tuyến tính, phương trình hàm một ẩn hoặc nhiều ẩn...

Phương trình hàm cũng là một chuyên đề quan trọng bồi dưỡng học sinh khá giỏi bậc trung học phổ thông. Các bài toán về phương trình hàm thường có trong các đề thi học sinh giỏi toán trong và ngoài nước. Tuy nhiên, cho đến nay học sinh các trường chuyên lớp chọn nói riêng và người giải toán nói chung còn biết rất ít các phương trình chính thống để giải phương trình hàm, thậm chí còn lúng túng không biết định hướng khi tiếp cận một phương trình hàm.

Mục đích của luận văn là dựa trên việc tìm hiểu các phương trình hàm cũng như một số tài liệu liên quan đến phương trình hàm để hình thành phương pháp phân tích, khai thác các dữ liệu, dự đoán hướng giải, các kỹ thuật biến đổi,...trên cơ sở đó hình thành một số phương pháp giải phương trình hàm.

Nội dung luận văn gồm 2 chương:

- **Chương 1:** *Kiến thức cơ bản:* Trong chương này trình bày một số tính chất đặc trưng của hàm số và các phương trình hàm cơ bản.
- **Chương 2:** *Một số phương pháp giải phương trình hàm.*

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

Với mọi x được viết là $\forall x$

Tập các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N}$

Tập các số nguyên được ký hiệu là $\mathbb{Z}$

Tập các số hữu tỉ được ký hiệu là $\mathbb{Q}$

Tập các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$

Chương 1

Kiến thức cơ bản

1.1 Một số tính chất đặc trưng của hàm số

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định là $D(f) \subset \mathbf{R}$ và tập giá trị $\mathbf{R}(f) \subset \mathbf{R}$.

1.1.1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa 1.1.1.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên M , $M \subset D(f)$, nếu $\forall x \in M$ ta có $-x \in M$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M , $M \subset D(f)$, nếu $\forall x \in M$ ta có $-x \in M$ và $f(-x) = -f(x)$.

1.1.2. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 1.1.2.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số đồng biến trên tập $N \subset D(f)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in N, x_1 \neq x_2$, thì ta có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số nghịch biến trên tập $N \subset D(f)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in N, x_1 \neq x_2$, thì ta có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$.

- Hàm số đồng biến và nghịch biến trên tập N gọi chung là hàm đơn điệu trên tập N .

1.1.3. Hàm số liên tục

Định nghĩa 1.1.3.

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ được xác định tại điểm x_0 . Ta nói rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) .
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) và đồng thời liên tục phải tại a , liên tục trái tại b , có nghĩa:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b). \end{cases}$$

1.1.4. Hàm số khả vi (Tính có đạo hàm của hàm số)

Định nghĩa 1.1.4.

- Cho hàm số $f(x)$, $x_0 \in D(f)$. Ta nói $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Giới hạn đó kí hiệu là $f'(x_0)$ và được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0 . Khi đó, ta cũng nói $f(x)$ khả vi tại x_0 .
- Hàm số $f(x)$ được gọi là khả vi trên tập $D \subset D(f) \Leftrightarrow f(x)$ khả vi tại mọi điểm thuộc $D \Leftrightarrow f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc D .

1.1.5. Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Hàm tuần hoàn cộng tính.

Định nghĩa 1.1.5.1.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ a ($a > 0$) trên M nếu $M \subset D(f)$ và $\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x + a) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$

- Cho $f(x)$ là một hàm tuần hoàn trên M . Khi đó $T (T > 0)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không là hàm tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T .

Hàm phản tuần hoàn cộng tính.

Định nghĩa 1.1.5.2.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $b (b > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và $\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm b \in M \\ f(x + b) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$
- Nếu $f(x)$ là một hàm phản tuần hoàn chu kỳ b_0 trên M mà không là hàm phản tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn b_0 trên M thì b_0 được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$ trên M .

1.1.6. Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.1.6.1.

- $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ $a (a \notin \{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và $\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$

Định nghĩa 1.1.6.2.

- $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ $a (a \notin \{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và $\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$

1.2 Các phương trình hàm cơ bản

1.2.1. Phương trình hàm cơ bản 1 (Phương trình hàm Cauchy)

Bài toán 1: Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Bài giải:

Cho $x = 0, y = 0$ từ (1) ta được $f(0) = 0$. (2)

Cho $x = -y$, từ (1) suy ra $f(-x) = -f(x)$. (3)

Cho $x = 1, y = 1$, từ (1) suy ra $f(2) = 2f(1)$.

Bằng quy nạp ta thu được $f(m) = mf(1), \forall m \in \mathbf{N}$. (4)

Từ (4) và sử dụng kết quả (2) và (3) ta thu được

$$f(m) = mf(1), \forall m \in \mathbf{Z} \quad (5)$$

$$\text{Với } n \in \mathbf{N}^* \text{ ta có } f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1), \forall n \in \mathbf{N}^*. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $f(q) = qf(1), \forall q \in \mathbf{Q}$.

Khi đó $\forall x \in \mathbf{R}$ ta có

- Nếu x hữu tỉ thì $f(x) = xf(1)$.
- Nếu x vô tỉ thì tồn tại dãy hữu tỉ $\{q_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ sao cho q_n hội tụ về x khi $x \rightarrow \infty$

$$\text{Ta có } f(q_n) = q_nf(1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} (q_nf(1))$$

$$\text{Điều này tương đương với } f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) f(1).$$

$$\text{Suy ra } f(x) = xf(1).$$

$$\text{Như vậy ta có } f(x) = ax, \forall x \in \mathbf{R}, a = f(1).$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = ax$ thỏa mãn phương trình (1).

Kết luận $f(x) = ax, \forall a \in \mathbf{R}$ tùy ý.

Nhận xét

- Từ điều kiện (1), ta thấy chỉ cần giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục tại một điểm $x_0 \in \mathbf{R}$ cho trước là đủ. Khi đó hàm $f(x)$ thỏa mãn (1) sẽ liên tục trên $\mathbf{R}$. Thật vậy, theo giả thiết thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ và với mỗi $x_1 \in \mathbf{R}$ ta đều có $f(x) = f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0), \forall x \in \mathbf{R}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_1} f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_1). \end{aligned}$$

- Kết quả của bài toán 1 sẽ không thay đổi nếu ta thay $\mathbf{R}$ bằng $[\alpha, +\infty)$ hoặc $(-\infty, \beta]$ tùy ý.

Chú ý

Ngoài giả thiết liên tục trên $\mathbf{R}$ của hàm cần tìm trong phương trình hàm Cauchy, nếu ta xét các giả thiết dạng khác như giả thiết đơn điệu, bị chặn, khả vi trên $\mathbf{R}$ thì lớp các hàm nhận được không thay đổi. Ta xét bài toán sau:

Bài toán: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbf{R}$, thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Bài giải:

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của (1) theo biến x và y ta được

$$f'(x+y) = f'(x), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

$$f'(x+y) = f'(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Các đẳng thức (2) - (3) cho ta $f'(x) = f'(y)$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$. Do vậy, $f'(x) = \text{const}$ hay $f(x) = ax + b$.

Thế vào (1), ta được $f(x) = ax$ với $a \in \mathbf{R}$ tùy ý ($b = 0$).

Kết luận $f(x) = ax, \forall x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$ tùy ý.

1.2.2. Phương trình hàm cơ bản 2

Bài toán 2: Tìm các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$

Bài giải:

Nhận xét rằng $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của (1). Xét trường hợp $f(x) \neq 0$.

Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$.

Theo (1) thì

$$f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x)f(x_0 - x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Suy ra $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ và

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Đặt $\ln f(x) = g(x)$ ($f(x) = e^{g(x)}$). Khi đó $g(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f(x+y) \\ &= \ln [f(x)f(y)] \\ &= \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Theo bài toán (1) thì $g(x) = bx, b \in \mathbf{R}$ tùy ý.

Vậy $f(x) = e^{bx} = a^x$ với $a > 0$ tùy ý.

Kết luận

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ f(x) = a^x, (a > 0). \end{cases}$$

1.2.3. Phương trình hàm cơ bản 3

Bài toán 3: Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Bài giải:

Thay $y = 1$ vào (1) ta được $f(x)(1 - f(1)) = 0, \forall x \in \mathbf{R}. \quad (2)$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì từ (2) suy ra $f(x) \equiv 0$ và nghiệm này thỏa mãn (1).

Xét $f(1) = 1$. Khi đó

$$f(1) = f\left(x \frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Vậy $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$f(x^2) = f(x)f(x) = [f(x)]^2 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

- Xét $x, y \in \mathbf{R}^+$ (a)

Đặt $x = e^u, y = e^v$ và $f(e^t) = g(t)$. Khi đó ta có

$$g(u+v) = g(u)g(v), \forall u, v \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Theo bài toán 2 thì $(3) \Leftrightarrow g(t) = a^t, \forall t \in \mathbf{R}$ ($a > 0$ tùy ý) và do đó

$$f(x) = f(e^u) = g(u) = a^u = a^{\ln x} = (e^{\ln a})^{\ln x} = x^{\ln a} = x^\alpha, \forall x \in \mathbf{R}^+$$

(4), trong đó $\alpha = \ln a$.

- Khi $x, y \in \mathbf{R}^-$ thì $xy \in \mathbf{R}^+$ (b). Với $y = x$ từ (1) và theo kết quả phần a) ta có

$$[f(x)]^2 = f(x^2) = (x^2)^\beta = (|x|^\beta)^2, \forall x \in \mathbf{R}^-, \beta \in \mathbf{R} \text{ tùy ý.}$$

Do $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbf{R}^-$ nên

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta, \forall x \in \mathbf{R}^+ \\ -|x|^\beta, \forall x \in \mathbf{R}^- \end{cases}$$

Kết hợp a) và b) và thử lại các kết quả ta có

Kết luận

Nghiệm của (1) là một trong các hàm số sau

$$1) f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

$$2) f(x) = |x|^\alpha, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbf{R} \text{ tùy ý,}$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta, & \forall x \in \mathbf{R}^+ \\ -|x|^\beta, & \forall x \in \mathbf{R}^-, \beta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1.2.4. Phương trình hàm cơ bản 4

Bài toán 4: *Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Bài giải:

- Trước hết xét $x, y \in \mathbf{R}^+$. Đặt $x = e^u$, $y = e^v$ và $f(e^t) = g(t)$. Khi đó (1) có dạng $g(u+v) = g(u) + g(v)$, $\forall u, v \in \mathbf{R}$. (2)
Theo bài toán 1 thì (2) $\Leftrightarrow g(t) = bt$ và do đó $f(x) = a \ln x$, $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $a \in \mathbf{R}$ tùy ý.

- Khi $x, y \in \mathbf{R}^-$ thì $xy \in \mathbf{R}^+$.

Với $y = x$ từ (1) và theo kết quả phần trên ta có

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x^2) = \frac{1}{2}b \ln(x^2) = b \ln |x|, \forall x \in \mathbf{R}^- \text{ với } b \in \mathbf{R} \text{ tùy ý.}$$

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = b \ln |x|$ với $b \in \mathbf{R}$ tùy ý, thỏa mãn các điều kiện của bài toán đặt ra.

Kết luận

$$f(x) = b \ln |x|, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \text{ với } b \in \mathbf{R} \text{ tùy ý.}$$

Chương 2

Một số phương pháp giải phương trình hàm

2.1 Phương pháp quy nạp

2.1.1. Nội dung phương pháp

Phương pháp này dựa trên việc sử dụng giá trị $f(1)$ để tìm tất cả $f(n)$ đối với mọi n là số nguyên. Sau đó, tìm $f(\frac{1}{n})$ và $f(r)$ đối với r hữu tỷ. Phương pháp quy nạp thường dùng để xét những hàm số xác định trên tập $\mathbf{N}$ và lấy giá trị trên tập $\mathbf{N}$, sau đó mở rộng cho trường hợp hàm cần tìm xác định trên $\mathbf{Z}$ và $\mathbf{Q}$. Tuy nhiên, trong một vài trường hợp ta có thể sử dụng phương pháp này để xác định hàm $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ trong đó f là hàm số liên tục và sử dụng đến tính chất trù mật của tập $\mathbf{Q}$.

2.1.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = 2$ và $f(xy) = f(x).f(y) - f(x + y) + 1, \forall x, y \in \mathbf{Q}$. (1)*

Bài giải:

Đây là một ví dụ cổ điển của một vấn đề có thể giải quyết bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Chú ý rằng nếu ta cho $\begin{cases} x = 1 \\ y = n \end{cases}$ thì khi đó (1) trở thành $f(n) = 2f(n) - f(n + 1) + 1$
 $\Leftrightarrow f(n + 1) = f(n) + 1$

Với $f(1) = 2$ thì $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbf{N}$.

- Tương tự cho $\begin{cases} x = 0 \\ y = n \end{cases}$ ta được

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0).f(n) - f(n) + 1 \\ \Leftrightarrow f(0) &= f(0).f(n+1) - f(n) + 1 \\ \Leftrightarrow f(0).n &= f(n) - 1 \\ \Leftrightarrow f(0).n &= n \\ \text{nghĩa là } f(0) &= 1. \end{aligned}$$

- Bây giờ mục tiêu là phải tìm $f(z), \forall z \in \mathbf{Z}$.

Cho $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ ta được

$$\begin{aligned} f(-1) &= f(-1).f(1) - f(0) + 1 \\ \Leftrightarrow f(-1) &= f(0) - 1 \\ \Leftrightarrow f(-1) &= 0. \end{aligned}$$

Cho $\begin{cases} x = -1 \\ y = n \end{cases}$ ta được

$$\begin{aligned} f(-n) &= f(-1).f(n) - f(-1+n) + 1 \\ \Leftrightarrow f(-n) &= -f(n-1) + 1 = -n + 1 \end{aligned}$$

Do đó $f(z) = z + 1, \forall z \in \mathbf{Z}$.

- Bây giờ, chúng ta phải xác định $f(\frac{1}{n})$.

Cho $\begin{cases} x = n \\ y = \frac{1}{n} \end{cases}$ ta được

$$\begin{aligned} f(1) &= f(n).f(\frac{1}{n}) - f(n + \frac{1}{n}) + 1 = (n+1).f(\frac{1}{n}) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1. \\ (2) \end{aligned}$$

Hơn nữa cho $\begin{cases} x = 1 \\ y = m + \frac{1}{n} \end{cases}$ ta được

$$\begin{aligned} f\left(m + \frac{1}{n}\right) &= f(1).f\left(m + \frac{1}{n}\right) - f\left(1 + m + \frac{1}{n}\right) + 1 \\ \Leftrightarrow f\left(1 + m + \frac{1}{n}\right) &= f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1. \end{aligned}$$

Do đó bằng phương pháp quy nạp suy ra $f(m + \frac{1}{n}) = m + f(\frac{1}{n})$.

Từ (2) ta có $2 = (n + 1) \cdot f(\frac{1}{n}) - n - f(\frac{1}{n}) + 1$

$$\Leftrightarrow n \cdot f(\frac{1}{n}) = n + 1$$

$$\Leftrightarrow f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- Mặt khác cho $\begin{cases} x = m \\ y = \frac{1}{n} \end{cases}$ ta được

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = (m + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - m - 1 - \frac{1}{n} + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1.$$

nghĩa là $f(r) = r + 1, \forall r \in \mathbf{Q}^+$.

Cho $\begin{cases} x = -1 \\ y = r \end{cases}$ ta được

$$f(-r) = f(-1) \cdot f(r) - f(-1 + r) + 1$$

$$\Leftrightarrow f(-r) = -f(-1 + r) + 1$$

$$\Leftrightarrow f(-r) = -r + 1.$$

do đó $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbf{Q}$.

Thử lại do $xy + 1 = (x + 1)(y + 1) - (x + y + 1) + 1, \forall x, y \in \mathbf{Q}$.

Vậy $f(x) = x + 1$ là hàm số cần tìm.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ thỏa mãn hệ thức

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y), \forall x, y \in \mathbf{Q}.$$

Bài giải:

Trước hết cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$.

Lại cho $x = 0$ ta có $f(y) + f(-y) = 2f(y) \Rightarrow f(-y) = f(y), \forall y$.

Vậy f là hàm chẵn và ta chỉ cần xét trên tập các số hữu tỉ dương.

Ta sẽ chứng minh $f(nx) = n^2 f(x), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{Q}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp

$$f((n + 1)x) = 2f(nx) - f((n - 1)x) + 2f(x)$$

$$= 2n^2 f(x) - (n-1)^2 f(x) + 2f(x)$$

$$= [2n^2 - n^2 + 2n - 1 + 2] f(x) = (n+1)^2 f(x).$$

Suy ra rằng với mọi số tự nhiên n thì $f(n) = n^2 f(1)$.

Từ đó bằng cách thay x bởi $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}, n \neq 0$ ta được

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(m)}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1).$$

Vậy $f(x) = ax$ với a là số hữu tỉ tùy ý.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = ax, \forall x \in \mathbf{Q}, (a \in \mathbf{Q} \text{ tùy ý})$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

2.2 Phương pháp sử dụng các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh và đơn điệu của hàm số

2.2.1. Nội dung phương pháp

Trong quá trình vận dụng các tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh và tính đơn điệu của hàm số vào giải toán phương trình hàm ta chú ý đến một số điểm sau:

- Nếu một vế có chứa $f(x)$ và vế còn lại có chứa biến x bên ngoài thì thông thường f là đơn ánh.
- Nếu f là đơn ánh thì cố gắng biến đổi phương trình hàm đã cho về dạng: $f[f(x)] = f[g(x)]$ trong đó $g(x)$ là hàm số đã biết trước. Suy ra hàm số cần tìm chính là $f(x) = g(x)$.
- Nếu biết f là đơn ánh thì trong một số trường hợp có thể thực hiện phép giản ước cả hai vế của phương trình hàm đã cho để chuyển về phương trình hàm đơn giản hơn.
- Một số bài toán về phương trình hàm có thể giải bằng cách tìm tính chất của tập xác định của biến số x hoặc tập giá trị của hàm số f . Thông thường ta tìm trên tập xác định con $\mathbf{X}$ nào đó của $D(f)$, sau đó tìm hàm f trên cả tập xác định $D(f)$. Ở đây tính chất toàn ánh của f là quan trọng.
- Trong một số trường hợp, nếu dự đoán được công thức của hàm số cần tìm, chẳng hạn $f(x) = g(x)$, thì ta có thể xét $f(x) > g(x)$ và

$f(x) < g(x)$. Sau đó sử dụng tính đơn điệu của hàm f để dẫn tới điều vô lí.

- Nếu hàm f đơn điệu và đã có công thức của f trên tập số hữu tỉ thì có thể chọn hai dãy số hữu tỉ trong $\mathbf{Q}$ đơn điệu ngược nhau, rồi sau đó chuyển qua giới hạn.

2.2.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: (BMO 2000) Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Nhận xét: Bài này thuộc lớp bài toán chứng minh hàm số là hàm đơn ánh, toàn ánh, rồi sử dụng tính chất của lớp hàm đó để khai thác bài toán.

Bài giải:

- Cho $x = 0, y \in \mathbf{R}$ ta có $f(f(y)) = y + f^2(0)$. Từ kết quả này dễ thấy f là toàn ánh. Mặt khác f là toàn ánh nên tồn tại t sao cho $f(t) = 0$, do đó
 Cho $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ ta có $f(f(t)) = t + f^2(0)$
 suy ra $f(0) = t + f^2(0)$.
 Cho $\begin{cases} x = t \\ y = y \end{cases}$ ta có $f(tf(t) + f(y)) = y + f^2(t)$
 suy ra $f(f(y)) = y$.
 do đó $t = f(f(t)) = f(0) = t + f^2(0)$
 suy ra $f(0) = 0$.
- Thay thế $x = f(x)$ trong giả thiết (1) ta có
 $f(f(x)x + f(y)) = y + x^2, \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (2)$
 Do đó từ (1) và (2) ta có $f^2(x) = x^2, \forall x \in \mathbf{R}$.
 - Xét trường hợp 1: $f(1) = 1$.
 Cho $x = 1$ trong (1) ta có
 $f(f(1) + f(y)) = y + f^2(1)$
 $\Leftrightarrow f(1 + f(y)) = y + 1$
 do đó
 $(1 + y)^2 = f^2(1 + f(y)) = (1 + f(y))^2 = 1 + 2f(y) + y^2$
 suy ra $f(y) = y, \forall y \in \mathbf{R}$.
 - Xét trường hợp 2: $f(1) = -1$.

Cho $x = -1$ trong (1) ta có

$$f(-f(-1) + f(y)) = y + f^2(-1)$$

$$\Leftrightarrow f(-1 + f(y)) = y + 1$$

$$\text{do đó } (1 + y)^2 = f^2(-1 + f(y)) = (-1 + f(y))^2 = 1 - 2f(y) + y^2$$

suy ra $f(y) = -y, \forall y \in \mathbf{R}$.

Vậy $f(x) = x$ và $f(x) = -x$ là hàm số cần tìm.

Ví dụ 2: *Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x + f(y)) = f(x) + y, \forall x, y \in \mathbf{R}$.* (1)

Bài giải:

Giả sử có x_1, x_2 mà $f(x_1) = f(x_2)$ thì với mọi x ta có

$$f(x + f(x_1)) = f(x + f(x_2)) \Rightarrow f(x) + x_1 = f(x) + x_2 \text{ hay } x_1 = x_2.$$

Vậy f là đơn ánh.

Thay $y = 0$ từ (1) ta có $f(x + f(0)) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$. Thay $x = 0$ từ (1) ta có $f(f(y)) = f(0), \forall y \in \mathbf{R}$.

$$\text{Hay } f(f(x)) = f(0) + x, \forall x \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Thay x bởi $f(x)$ từ (1) và (2) ta được

$$f[f(x) + f(y)] = f(f(x)) + f(y) = x + f(0) + f(y) = f[f(x + y)].$$

Do f đơn ánh nên $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Theo kết quả đã biết phần phương trình Cauchy ta được

$$f(x) = a.x, \forall x \in \mathbf{R} \quad (a \text{ là số thực tùy ý}).$$

Thay kết quả vừa tìm được vào (1) ta được

$$f[x + f(y)] = f(x + ay) = f(x) + f(ay) = a.x + a^2y \text{ và}$$

$$f(x) + y = a.x + y.$$

Do đó ta phải có

$$a.x + a^2y = a.x + y = a^2y - y = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 1)y = 0, \forall y \in \mathbf{R}.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm 1$

$$\text{nghĩa là ta có } \begin{cases} f(x) = x \\ f(x) = -x \end{cases} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Thử lại ta thấy hai hàm số vừa tìm được thỏa mãn điều kiện bài toán.

2.3 Phương pháp dự đoán nghiệm và chứng minh nghiệm tìm được là duy nhất

2.3.1. Nội dung phương pháp

- Giống như cách giải các phương trình thông thường, khi giải các phương trình hàm ta có thể đoán nhận các nghiệm của phương trình hàm.
- Sau đó dùng phương pháp thích hợp để chứng minh rằng ngoài các nghiệm đó ra thì không còn nghiệm nào khác.
- Thông thường ta hay thử các hàm đặc biệt như hàm hằng $f(x) = c$, hàm đồng nhất $f(x) = x$, hàm tuyến tính $f(x) = ax + b$, ... để xem chúng có là nghiệm phương trình hàm hay không.

2.3.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: *Tìm tất cả các hàm $f : [1; +\infty) \rightarrow [1; +\infty)$ thỏa mãn*

i) $f(x) \leq 2(1+x), \forall x \in [1; +\infty)$

ii) $xf(x+1) = f(x)^2 - 1, \forall x \in [1; +\infty).$

Bài giải:

- Dễ thấy $f(x) = x + 1$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.
- Ta sẽ chứng minh $f(x) = x + 1$ là hàm duy nhất nghiệm đúng phương trình hàm đã cho.

Thật vậy

+ Từ giả thiết ta có $f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \leq x[2(x+1)] + 1 < 2(1+x)^2$.

Suy ra $f(x) < \sqrt{2}(1+x), \forall x \in [1; +\infty)$ nên $f(x)$ bị chặn trên.

+ Tương tự như trên ta có

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \leq x \left[\sqrt{2}(x+1) \right] + 1 < 2^{\frac{1}{4}}(1+x)^2$$

Bằng phương pháp quy nạp ta có

$$f(x) = 2^{\frac{1}{2k}}(1+x), \forall k$$

Khi $k \rightarrow +\infty$ thì $2^{\frac{1}{2k}} \rightarrow 1$. Cố định x suy ra $f(x) \leq x + 1, \forall x \in [1; +\infty)$.

+ Ta cần chứng minh $f(x) \geq x + 1, \forall x \in [1; +\infty)$

Thật vậy, xét $\frac{f(x)^2 - 1}{x} = f(x+1) \geq 1, \forall x \in [1; +\infty)$

suy ra $f(x) \geq \sqrt{x+1} > x, \forall x \in [1; +\infty)$.

Hơn nữa $f(x)^2 = 1 + xf(x+1) \geq 1 + x\sqrt{x+2} > x^{\frac{3}{2}}$. Bằng phương pháp quy nạp ta có $f(x) > x^{1-\frac{1}{2k}}$

Khi $k \rightarrow +\infty$ thì $f(x) \geq x$

Sử dụng giả thiết $f(x)^2 = 1 + xf(x+1)$

suy ra $f(x)^2 \geq 1 + x(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

Do đó $f(x) \geq x + \frac{1}{2}, \forall x \in [1; +\infty)$.

Bằng phương pháp quy nạp ta có $f(x) \geq x + 1 - \frac{1}{2^k}$.

Khi $k \rightarrow +\infty$ thì suy ra $f(x) \geq x + 1, \forall x \in [1; +\infty)$.

Ví dụ 2: *Tìm tất cả các hàm $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn*
 $f(f(x) + y) = xf(1 + xy), \forall x, y \in (0; +\infty)$. (1)

Bài giải:

+ Rõ ràng $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm thỏa mãn yêu cầu bài ra.

+ Ta sẽ chứng minh hàm này là duy nhất. Mặt khác, bằng phương pháp phản chứng, ta chỉ ra rằng hàm thỏa mãn điều kiện bài ra là hàm không tăng trên $(0; +\infty)$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $0 < x < y$ mà $0 < f(x) < f(y)$.

Giả sử $z = \frac{yf(y) - xf(x)}{y - x}$.

Dễ thấy $z = \frac{yf(y) - xf(x)}{y - x} > 0$ và $z = \frac{yf(y) - xf(x)}{y - x} > f(y)$.

Thay $\begin{cases} x = x \\ y = z - f(y) \end{cases}$ vào (1) ta có

$$f(f(x) + z - f(y)) = xf(1 + x(z - f(y))).$$

Thay $\begin{cases} x = x \\ y = z - f(x) \end{cases}$ vào (1) ta có

$$f(f(x) + z - f(x)) = xf(1 + x(z - f(x))).$$

Từ đó suy ra $x = y$ mâu thuẫn với $0 < x < y$.

Vậy f là hàm không tăng.

+ Ta chứng minh $f(1) = 1$.

Thật vậy, giả sử $f(1) \neq 1$, thay $x = 1$ vào (1) ta được

$$f(f(1) + y) = f(1 + y),$$

do đó $f(u + |f(1) - 1|) = f(u)$ với $u > 1$.

suy ra $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên $(1; +\infty)$.

Do f đơn điệu tuần hoàn nên f là hàm hằng.

Hơn nữa theo giả thiết (1) thì vế trái là hằng vế phải không là hằng (vô lí). Vậy $f(1) = 1$.

+ Ta sẽ chứng minh $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x > 1$.

Cho $y = 1 - \frac{1}{x}$ ta được $f(f(x) - \frac{1}{x} + 1) = xf(x)$. (2)

Giả sử $f(x) \geq \frac{1}{x}$ suy ra $f(f(x) - \frac{1}{x} + 1) = xf(x)$ (3)

và $xf(x) > 1$. (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra vô lí.

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x > 1$

+ Ta chứng minh $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x < 1$.

Đặt $y = \frac{1}{x}$ từ (1) ta có $f(f(x) + \frac{1}{x}) = xf(2) = \frac{x}{2}$. (5)

Do $\frac{1}{x} \geq 1$ từ (5) ta có $f(x) + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x < 1$.

Kết luận $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$.

2.4 Phương pháp thay thế giá trị cho các biến

2.4.1. Nội dung phương pháp

Ý tưởng của phương pháp này là lựa chọn các giá trị biến phù hợp để thay vào đẳng thức hàm cần thỏa mãn. Hầu hết các giá trị ban đầu có thể lấy là hằng số ví dụ $x = 0, x = 1 \dots$ từ đó tìm ra một tính chất quan trọng nào đó, hoặc các giá trị đặc biệt của hàm, hoặc tìm cách chứng minh hàm số là hàm hằng.

2.4.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: (IMO 1979) Cho hàm $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sao cho với hai số thực bất kỳ x, y , ta có $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$. Chứng minh rằng $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Bài giải:

Theo giả thiết $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$. (1)

+ Cho $x = y = 0$ từ (1) suy ra $f(0) = 0$.

+ Trong (1) cho $y = -1$ suy ra $f(x) + f(-x) = 0$. Trong (1) cho $y = 1$ suy ra $f(2x + 1) = 2f(x) + f(1)$.

Do đó $f(2(u + v + uv) + 1) = 2f(u + v + uv) + f(1)$
 $f(2(u + v + uv) + 1) = 2f(uv) + 2f(v) + 2f(u) + f(1), \forall u, v \in \mathbf{R}$ (2).

Mặt khác, thay $x = u, y = 2v + 1$ trong (1) ta có

$$\begin{aligned} f(2(u + v + uv) + 1) &= f(u + (2v + 1) + u(2v + 1)) \\ f(2(u + v + uv) + 1) &= f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv + u). \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1) &= f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv + u) \\ \Leftrightarrow f(2uv + u) &= 2f(uv) + f(u). \end{aligned} \quad (4)$$

Trong (4) cho $v = \frac{-1}{2}$ ta được

$$\begin{aligned} f(0) &= 2f\left(\frac{-u}{2}\right) + f(u) \\ \Leftrightarrow 0 &= -2f\left(\frac{u}{2}\right) + f(u) \\ \Leftrightarrow f(u) &= 2f\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } f(u) = 2f\left(\frac{u}{2}\right). \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $f(2uv + u) = f(2uv) + f(u)$.

Đặt $\begin{cases} u = y \\ 2uv = x \end{cases}$ ta có $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^*$.

Mặt khác $f(0) = 0$ nên $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 2: Cho hàm $f : \mathbf{Q} \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

- $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbf{Q}$ (1)
- $f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x + 1) \leq 1, \forall x \in \mathbf{Q}$ (2)
- $f\left(\frac{2003}{2002}\right) = 2$ (3)

Tìm các giá trị có thể có của $f\left(\frac{2004}{2003}\right)$.

Bài giải:

Cho $x = y = 0$, từ (1) ta có $f(0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Nếu $f(0) = 1$ thì cho $y = 0$ ta có $f(0) = f(x)f(0) \Rightarrow f(x) = 1, \forall x \in \mathbf{Q}$.

Điều này mâu thuẫn với (3). Vậy $f(0) = 0$.

Bây giờ giả sử có $x \neq 0$ mà $f(x) = 0$. Khi đó với mọi $y \in \mathbf{Q}$ ta có

$$f(y) = f\left(\frac{y}{x}x\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)f(x) = 0, \text{ trái với (3).}$$

Vậy với mọi $x \neq 0$ thì $f(x) > 0$.

Từ đó, bằng cách cho $x = y = 1$, ta được $f(1) = 1$ và cho $x = y = -1$ ta được $f(-1) = 1$.

Suy ra từ (2) rằng với mọi x nguyên ta đều có $f(x) \leq 1$.

Bây giờ giả sử $0 < f(x) \leq f(y)$.

Ta có $f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} \leq 1$.

Do đó từ (2) ta có $f\left(\frac{x}{y} + 1\right) \leq 1$. Như thế $f(x + y) = f\left(\frac{x}{y} + 1\right) f(y) \leq f(y)$.

Suy ra rằng với mọi $x, y \in \mathbf{Q}$ ta đều có

$$f(x + y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (*)$$

Nếu $f(p) = 1$ với mọi số nguyên tố p thì mâu thuẫn với (3). Vậy $f(p) \neq 1$ với số nguyên tố p nào đó. Khi đó với mọi số nguyên tố $q \neq p$ tồn tại các số nguyên a, b sao cho $ap + bq = 1$.

Từ đó áp dụng (*) ta được

$$1 = f(1) = f(ap + bq) \leq \max\{f(ap), f(bq)\}.$$

Do 1 là giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbf{Z}$ và $f(p) \neq 1$ nên $f(p) < 1$.

Từ đó $f(ap) < 1$. Vậy ta phải có $f(bq) = 1$ và như thế $f(q) = 1$.

Tóm lại với mọi số nguyên tố $q \neq p$ ta đều có $f(q) = 1$.

$$\text{Bây giờ từ (1) và (3) ta có } 2 = f\left(\frac{2003}{2002}\right) = \frac{f(2003)}{f(2)f(7)f(11)f(13)}$$

suy ra một và chỉ một trong các giá trị $f(2), f(7), f(11), f(13)$ là bằng $\frac{1}{2}$.

$$\text{Do đó } f(3) = f(167) = f(2003) = 1.$$

$$\text{Từ đó } f\left(\frac{2004}{2003}\right) = \frac{(f(2))^2 f(3) f(167)}{f(2003)} = (f(2))^2$$

$$\text{Nếu } f(2) = \frac{1}{2} \text{ thì } f\left(\frac{2004}{2003}\right) = \frac{1}{4}; \text{ nếu trái lại thì } f\left(\frac{2004}{2003}\right) = 1.$$

2.5 Phương pháp chuyển qua giới hạn

2.5.1. Nội dung phương pháp

Đối với một số phương trình hàm có kèm theo giả thiết hàm số liên tục, thì trong nhiều trường hợp, bằng cách xây dựng một dãy số hợp lý và sử dụng phương pháp chuyển qua giới hạn, ta sẽ tìm được hàm $f(x)$.

Phương pháp này thường được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy a là một giá trị thuộc tập xác định của hàm số. Xây dựng dãy số $\{x_n\}$ thích hợp với $x_1 = a$ thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện:

- Hàm f không đổi trên dãy $\{x_n\}$, có nghĩa:

$$f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n)$$

- Dãy $\{x_n\}$ hội tụ về b , có nghĩa: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$.

Bước 2: Sử dụng tính chất liên tục của $f(x)$ ta có:

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(b).$$

Do a tùy ý nên suy ra $f(x) = f(b)$.

2.5.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Gọi F là tập hợp các hàm: $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ thỏa mãn

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x, \forall x \in \mathbf{R}^+$$

• Tìm số α lớn nhất sao cho với mọi $f \in F$ ta có

$$f(x) \geq \alpha x, \forall x \in \mathbf{R}^+$$

• **Bài giải:**

Ta thấy hàm số $f(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in \mathbf{R}^+$ thuộc F , do đó $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Hơn nữa, xét một hàm bất kỳ $f \in F$. Từ giả thiết ta có

$$f(x) \geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \geq \frac{x}{3} \quad (1).$$

+ Ý tưởng như sau: Ta kí hiệu $\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3}, \forall n = 1, 2, \dots$, ta xây dựng dãy $\{\alpha_n\}$ mà $f(x) \geq \alpha_n x, \forall x \in \mathbf{R}^+$ và dãy $\{\alpha_n\}$ hội tụ, có giới hạn bằng $\frac{1}{2}$. Điều này có nghĩa rằng $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Và do đó $\alpha = \frac{1}{2}$.

+ Bằng quy nạp ta chứng minh $f(x) \geq \alpha_n x, \forall x \in \mathbf{R}^+$. Từ (1) ta có khẳng định đúng với $n = 1$.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, nghĩa là $f(x) \geq \alpha_k x$.

Khi đó cũng từ (1) ta có

$$f(x) \geq \alpha_k f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} \geq \alpha_k \cdot \alpha_k \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3} \cdot x = \alpha_{k+1} \cdot x, \forall x \in \mathbf{R}^+$$

Như vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$ và do đó đúng với mọi n .

Cũng bằng quy nạp dễ dàng chứng minh $\alpha_n \leq \frac{1}{2}, \forall n$

$$\text{suy ra } \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{3}(\alpha_n - 1)(2\alpha_n - 1) \geq 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} \geq \alpha_n, \forall n.$$

Như vậy, dãy $\{\alpha_n\}$ hội tụ và dễ thấy $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có $f(x) \geq \frac{x}{2}, \forall x \in \mathbf{R}^+$.

Vậy giá trị cần tìm là $\alpha = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: (Đề dự tuyển IMO-1982)

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \forall x \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Bài giải:

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ nên $g(x)$ cũng liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn điều kiện $g(x^2) + g(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R} \quad (2)$.

Từ (2) cho $x = 0$ suy ra $g(0) = 0$.

Cho $x = 1$ suy ra $2g(1) = 0$ do đó $g(1) = 0$.

Mặt khác $g(-x) = -g((-x^2)) = -g(x^2) = g(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

Suy ra $g(x)$ là hàm số chẵn.

Lại có $g(x) = -g(x^2) = g(x^4). \quad (3)$

Vì $g(x)$ là hàm chẵn và $g(0) = 0$ nên chỉ cần tìm hàm $g(x)$ với $x > 0$.

Đặt $t = x^4 (x > 0)$ suy ra $x = t^{\frac{1}{4}} (t > 0)$. (4)

Từ (3) ta có $g(t) = g\left(t^{\frac{1}{4}}\right) (t > 0)$ hay $g(x) = g\left(x^{\frac{1}{4}}\right), \forall x > 0$.

Cố định $x > 0$, xét dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = x, x_2 = x \dots x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbf{N}^*$ trong đó $g(x) = x^{\frac{1}{4}}$.

Bằng quy nạp ta thu được $x_n = x^{\frac{1}{4^n}}$.

Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{4^n}} = 1$.

Từ (4) và từ cách xác định dãy, ta thu được

$$g(x) = g(x_1) = g\left(x_1^{\frac{1}{4}}\right) = g(x_2) = \dots g(x_n)$$

Lấy giới hạn hai vế và sử dụng tính liên tục của hàm số $f(x)$ ta được

$$g(x) = g(1) = 0, \forall x > 0$$

. Kết hợp với $g(x) = 0$ và $g(x)$ là hàm chẵn ta được $g(x) = 0, \forall x$.

Suy ra $f(x) = \frac{c}{1-x^2}, \forall x \in (-1; 1)$ $f(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2.6 Phương pháp chuyển về bài toán xác định dãy số

2.6.1. Nội dung phương pháp

Phương pháp này thường được dùng cho các phương trình hàm có dạng: $a.f(f(x)) + b.f(x) + c.x = 0$ trong đó a, b, c là các số thực đã biết.

Giải phương trình hàm dạng này, ta lập dãy số $\{u_n\}$ với

$$\begin{cases} u_0 \in D_f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Khi đó bài toán giải phương trình hàm chuyển về bài toán xác định dãy số $a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0$

Suy ra phương trình đặc trưng của dãy là: $a.y^2 + b.y + c = 0$. Giải phương trình này ta được các nghiệm là y_1, y_2 .

Khi đó $u_n = c_1(y_1)^n + c_2(y_2)^n$ trong đó c_1, c_2 là hằng số. Từ cách xác định dãy số để tìm $f(x)$ ta đi tìm u_1 (với $u_1 = f(u_0)$).

2.6.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: (Đề dự tuyển IMO-1992)

Cho a, b là hai số thực dương. Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một hàm số xác định trên tập các số thực dương nhận giá trị trên tập các số thực dương và thỏa mãn điều kiện

$$f[f(x)] + bf(x) = a(a+b)x, \forall x \in \mathbf{R}^+. \quad (1)$$

Bài giải:

Với mỗi $x \in \mathbf{R}^+$ ta xét dãy $u_0 = x, u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbf{N}$.

$$\text{Từ (1) ta có } \begin{cases} u_{n+2} + bu_{n+1} = a(a+b)u_n \\ u_n > 0, \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng của dãy là:

$$y^2 + by = a(a+b) \Leftrightarrow y^2 + by - a(a+b) = 0.$$

Giải ra ta được $y_1 = a, y_2 = -(a+b)$.

Do đó $u_n = c_1 a^n + c_2 [-(a+b)]^n$.

Xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1: nếu $c_2 > 0$ thì $u_n < 0$ với n lẻ đủ lớn. Mâu thuẫn với $u_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

+ Trường hợp 2: nếu $c_2 > 0$ thì $u_n < 0$ với n chẵn đủ lớn. Mâu thuẫn với $u_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

Vậy $c_2 = 0$ suy ra $u_n = c_1 a^n$ do đó $u_0 = c_1 a^0 = c_1$.

Suy ra $c_1 = x$. Do đó $f(x) = ax$.

Vậy $f(x) = ax, \forall x \in \mathbf{R}^+$.

Thử lại ta thấy hàm số vừa tìm được thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Tìm hàm số $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{3x}{5}, \forall x \in \mathbf{R}. (*)$$

Bài giải:

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{2x}{3}.$$

Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_1 \in \mathbf{R}, x_n = g(x_{n-1}), \forall n \geq 2$. Ta thấy dãy $\{x_n\}$ là dãy không tuần hoàn nên ta không thể đưa phương trình về hệ phương trình đại số có hữu hạn phương trình. Nhưng vì $x_n = x_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ nên dãy $\{x_n\}$ là cấp số nhân lùi vô hạn, do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \forall x_1 \in \mathbf{R}$.

Thay x bởi $x_1 \dots x_{n-1}$ vào phương trình (*) ta được

$$\begin{cases} f(x_1) + f(x_2) = \frac{3x_1}{5} (1) \\ f(x_2) + f(x_3) = \frac{3x_2}{5} (2) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) + f(x_n) = \frac{3x_{n-1}}{5} (n) \end{cases}$$

Nhân dòng phương trình thứ i với $(-1)^{i+1}$ rồi cộng lại ta được

$$f(x) + (-1)^{n+1} f(x_n) = \frac{3}{5} x \left[1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \dots + \left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1} \right] (**)$$

Xét

$$\lim \left| \left[(-1)^{n+1} f(x_n) \right] \right| = \lim |[f(x_n)]| = \left| f\left(\lim x_n\right) \right| = |f(0)|.$$

Mặt khác do $f(0) = 0$ nên $\lim (-1)^{n+1} f(x_n) = 0$.

Lấy giới hạn 2 vế của (**) ta được

$$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9}{25}x$$

Thử lại ta thấy hàm số thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = \frac{9}{25}x$.

2.7 Phương pháp điểm bất động

2.7.1. Nội dung phương pháp

Ta nhắc lại: x_f được gọi là điểm bất động của hàm số $f(x)$ nếu: $f(x_f) = x_f$

Ý tưởng của phương pháp điểm bất động là như sau. Bằng các phép biến đổi thích hợp, ta đưa phương trình hàm đã cho về dạng :

$$f[h(f(x))] = h(f(x))$$

trong đó $f(x)$ là hàm số cần tìm và $h(x)$ là hàm số đã biết. Khi đó ta có thể đưa vào ẩn phụ $u = h(f(x))$ để chuyển phương trình hàm về tìm u thỏa mãn phương trình $f(u) = u$, tức là tìm điểm bất động của hàm $f(u)$. Khi xác định được u ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình đã cho.

2.7.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: (IMO-1994) Cho $S = (1; +\infty)$. Tìm tất cả các hàm $f : S \rightarrow S$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện

- $f[x + f(y) + xf(y)] = y + f(x) + f(x), \forall x, y \in S$ (1)
- $\frac{f(x)}{x}$ là tăng với $-1 < x < 0$ và $0 < x < +\infty$. (2)

Bài giải:

Cho $x = y$ từ điều kiện (1) ta có

$$f[x + f(x) + xf(x)] = x + f(x) + f(x)$$

$$\Leftrightarrow f[x + (x+1)f(x)] = x + (x+1)f(x). \quad (i)$$

Đặt $u = x + (x+1)f(x)$ thì từ (i) ta suy ra $f(u) = u$. (ii)

Từ (i) cho $x = u$ ta được $f[u + (u+1)f(u)] = u + (u+1)f(u)$. Mặt khác từ điều kiện (2) ta có nhận xét rằng $\frac{f(x)}{x}$ là hàm tăng với $-1 < x < 0$

và $0 < x < +\infty$. Do đó, phương trình $f(x) = x$ có nhiều nhất ba nghiệm, và nếu có một nghiệm nằm trong $(-1; 0)$, một nghiệm bằng 0, một nghiệm nằm trong $(0; +\infty)$ thì các nghiệm này đều là điểm bất động của f .

Ta xét các trường hợp sau

- Giả sử $-1 < u < 0 \Rightarrow -1 < u^2 + 2u < 0$. Vì các điểm bất động nếu có trên $(-1; 0)$ là duy nhất nên từ (i), (ii) ta có $u^2 + 2u = u \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -1 \end{cases}$.

Các nghiệm này đều không thỏa mãn vì $u \in (-1; 0)$.

- Nếu $u > 0$ thì khi đó $u^2 + 2u > 0$. Theo nhận xét trên, trên $(0; +\infty)$ phương trình $f(u) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất, do đó từ (i) và (ii) ta có $u^2 + 2u = u \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -1 \end{cases}$. Các nghiệm này đều không thỏa mãn vì $u \in (0; +\infty)$.

Vậy chỉ có $u = 0$.

Từ (i) ta có $f[x + (x + 1)f(x)] = x + (x + 1)f(x), \forall x \in S$. Suy ra $x + (x + 1)f(x)$ là một điểm bất động của f .

Do vậy $\forall x \in S$ thì $x + (x + 1)f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{1+x}, \forall x \in S$.

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy nghiệm cần tìm là hàm số $f(x) = -\frac{x}{1+x}$.

Ví dụ 2: Gọi S là tập các số nguyên không âm. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ sao cho $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$. (1)

Bài giải:

Cho $m = n = 0$ thì từ (1) ta có

$$f(0 + f(0)) = f(f(0)) + f(0), \text{ suy ra } f(0) = 0$$

suy ra $f(f(0)) = 0$.

Cho $m = 0$ ta có

$$f(f(n)) = f(n), \text{ do đó (1) có thể viết thành}$$

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n).$$

Theo trên, $f(n)$ là điểm bất động.

Gọi k là điểm bất động khác 0 bé nhất của hàm f .

- Nếu k không tồn tại thì $f(n) = 0, \forall n$.
Vậy $f(n) = 0$ là một nghiệm của bài toán.
- Nếu tồn tại k thì bằng quy nạp ta chứng minh được $f(q.k) = q.k$ với

q nguyên không âm.

Bây giờ giả sử f có điểm bất động n khác ta viết

$$N = k.q + r \text{ với } 0 \leq r < k$$

Lúc đó

$$f(n) = f(r + f(k.q)) = f(r) + f(k.q) = k.q + f(r).$$

$$\text{Suy ra } f(r) = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Như thế điểm bất động của hàm số là bội của k .

Tuy nhiên, $\forall n, f(n)$ là điểm bất động, do đó $f(n)$ là bội của $k \forall n$.

Ta lấy các số nguyên không âm $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ và chọn $n_0 = 0$ thì hàm tổng quát cần tìm là

$$f(q.k + r) = q.k + n_r.k \text{ với } 0 \leq r < k.$$

2.8 Phương pháp chuyển về phương trình hàm Cauchy

2.8.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm hàm f liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn

- $f(0) = f(1) = 0$ (1)
- $2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \forall x, y \in \mathbf{R}$. (2)

Bài giải:

$$+ \text{ Từ (2) cho } x = 0 \text{ ta được: } f\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}f(y), \forall y \in [0; 1].$$

$$+ \text{ Cho } y = 0 \Rightarrow 2f(x) = 3f\left(\frac{2x}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{2}{3}f(x).$$

$$\text{Khi đó (2) } \Leftrightarrow \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) = f\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{3}\right) \forall x, y \in [0; 1]$$

$$\text{hay } f(x+y) = f(x) + f(y) = \forall x, y \in [0; 1].$$

$$\text{Do đó } f(x) = ax \text{ với } a = f(1) = 0. \text{ Vậy } f(x) = 0, \forall x \in [0; 1].$$

Ví dụ 2: Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Bài giải:

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - f(0) \text{ thì } g(0) = 0. \text{ Trong (1) cho } y = 0 \text{ ta được}$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + f(0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0) = \frac{f(x) - f(0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}g(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \frac{1}{2}[f(x) - f(0) + f(y) - f(0)]$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[g(x) + g(y)]$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Do đó $g(x) = ax$, $f(x) = g(x) + g(0) = ax + b$ với $b = f(0)$ và $a = f(1) - f(0)$.

Ví dụ 3: Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và thoả mãn

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = xy, \forall x, y \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Bài giải:

Từ (1) cho $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Cho $y = -x \Rightarrow f(x) + f(-x) + x^2 = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}.$$

Khi đó từ (1) ta có $g(x) + g(y) = g(x+y), \forall x, y \in \mathbf{R}$. Đây là hàm Cauchy do đó $g(x) = ax$.

Vậy hàm cần tìm là $f(x) = ax - \frac{x^2}{2}$.

Thử lại ta thấy hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ thoả mãn $f(0) = 1, f(1) = 2002$

$$\text{và } f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{1}{3}[f(x) + f(y) + f(z)], \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Bài giải:

$$\text{Đặt } z = \frac{x+y}{2} \text{ thì từ giả thiết suy ra } f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)].$$

Do đó theo ví dụ 2 suy ra $f(x) = ax + b$.

Vì $f(0) = 1, f(1) = 2002$ suy ra $f(x) = 2001x + 1$ là hàm số cần tìm.

2.9 Phương pháp sử dụng các tính chất của đạo hàm, nguyên hàm, tích phân

2.9.1. Nội dung phương pháp

Phương pháp này thường được sử dụng chủ yếu đối với một số phương trình hàm mà giả thiết là hàm khả vi, liên tục. Khi đó bằng các kỹ thuật biến đổi ta quy phương trình hàm đã cho về dạng thích hợp

- Lấy đạo hàm hai vế của phương trình hàm theo biến thích hợp.
- Lấy nguyên hàm, hoặc tích phân với cận thích hợp.

Khi đó nhờ các tính chất của đạo hàm, nguyên hàm và tích phân ta tìm được hàm số cần tìm.

2.9.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: *Xác định tất cả các hàm $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ khả vi vô hạn và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Bài giải:

Cho $x = y = 0$ thì từ (1) ta có $f(0) = 2f(0)$, suy ra $f(0) = 0$.

Với $f(x) = x^2 + 2a.x, \forall a \in \mathbf{R}, y \neq 0$ từ giả thiết

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

$$\text{hay } f(x+y) - f(x) = f(y) + 2xy.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + 2x.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{f(y)}{y} + 2x \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(0) + 2x.$$

Mặt khác

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x (2t + f'(0))dt = x^2 + f'(0).x$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2a.x \text{ (với } a = f'(0)).$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x^2 + 2a.x, \forall a \in \mathbf{R}$ là nghiệm của bài toán.

Ví dụ 2: *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định khả vi trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn*

$$f\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Bài giải:

Lần lượt lấy đạo hàm 2 vế theo x và y ta có

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{f'(x)}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{f'(y)}{2}, \forall y \in \mathbf{R}.$$

Suy ra $f'(x) = f'(y)$ do đó $f'(x) = 0$.
 Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = a.x + b$.

2.10 Phương pháp thêm biến

2.10.1. Nội dung phương pháp

Khi gặp những phương trình hàm với cặp biến tự do x, y , bằng cách thêm biến mới z ta sẽ tính một biểu thức nào đó chứa x, y, z theo hai cách khác nhau, từ đó thu được một phương trình hàm theo ba biến x, y, z . Sau đó chọn z những giá trị đặc biệt để thu được phương trình hàm mới, hướng tới kết quả bài toán.

2.10.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ : *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1. \quad (1)$$

Bài giải:

Thay $x = y = 0$ vào (1) ta được $f(0)^2 - 2f(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow [f(0) - 1]^2 = 0$ tức là $f(0) = 1$.

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ vào (1) ta được $f(-1) = f(1)f(-1) - f(0) + 1$

$$\Leftrightarrow f(-1) = f(1)f(-1)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

- Trường hợp $f(-1) = 0$

Trong trường hợp này ta thiết lập biến yz thay y ta có

$$\begin{aligned} f(xyz) &= f(x) \cdot f(yz) - f(x+yz) + 1 \\ &= f(x) \cdot [f(z)f(y) - f(y+z) + 1] - f(x+yz) + 1 \\ &= f(x)f(y)f(z) - f(x)f(y+z) + f(x) - f(x+yz) + 1. \quad (2) \end{aligned}$$

Mặt khác ta cũng có

$$\begin{aligned} f(xyz) &= f(z)f(xy) - f(z+xy) + 1 \\ &= f(z)[f(x)f(y) - f(x+y) + 1] - f(z+xy) + 1 \\ &= f(x)f(y)f(z) - f(z)f(x+y) + f(z) - f(z+xy) + 1. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi số thực x, y, z ta có

$$f(x)f(y+z) - f(x) + f(x+yz) = f(z)f(x+y) + f(z) - f(z+xy) \quad (4)$$

Trong (4) cho $z = -1$ ta được

$$f(x)f(y-1) - f(x) + f(x-y) = f(xy-1)$$

và cho $x = 1$, ta được: $f(1)f(y-1) - f(1) + f(1-y) = f(y-1)$

$$\Leftrightarrow f(y-1)[1-f(1)] = f(1-y) - f(1). \quad (5)$$

Từ (5) cho $y = 2$ ta được $f^2(1) - f(1) = f(1)$

$$\Leftrightarrow f(1)[2-f(1)] = 0$$

Suy ra $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 2$.

Điều này có nghĩa ta có hai trường hợp

+ Xét $f(1) = 0$. Khi đó (5) viết lại thành

$$f(1-y) = f(y-1).$$

Sau đó ta thay y bởi $y+1$ ta được

$$f(-y) = f(y). \quad (6)$$

Tiếp theo thay y bởi $-y$ vào (1) và sử dụng (6) ta có

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x-y) + 1. \quad (7)$$

Kết hợp (7) và (1) suy ra

$$f(x+y) = f(x-y)$$

Đặc biệt trong phương trình này cho $x = y$ ta có

$$f(2x) = f(0) + 1, \forall x \in \mathbf{Q}.$$

Từ đó suy ra $f(1) = 1$ mâu thuẫn với $f(1) = 0$.

- Xét $f(1) = 2$ khi đó (5) có thể viết lại thành

$$2f(y-1) - 2 + f(1-y) = f(y-1)$$

$$\Leftrightarrow f(y-1) = 2 - f(1-y). \quad (8)$$

Trong (8) thay y bởi $y+1$ ta được

$$f(y) = 2 - f(-y)$$

$$\Leftrightarrow 1 - f(y) = f(-y) - 1 = -[1 - f(-y)]$$

Đặt $1 - f(y) = g(x)$.

Từ (9) suy ra hàm số g thỏa mãn $g(-x) = -g(x)$

và phương trình (1) trở thành

$$1 - g(xy) = [1 - g(x)][1 - g(y)] - 1 + g(x+y) + 1.$$

Nhân và rút gọn ta được $g(xy) = g(x) + g(y) - g(x)g(y) - g(x+y)$.

(10)

Ở phương trình (10) thay y bởi $-y$ ta được:

$$-g(xy) = g(x) - g(y) + g(x)g(y) - g(x-y). \quad (11)$$

Cộng (10) và (11) về theo về ta có

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x). \quad (12)$$

Từ (12) cho $x = y$ ta thu được $g(2x) = 2g(x)$ (do $g(0) = 0$).

Do đó (12) có thể viết lại thành

$$g(x+y) + g(x-y) = g(2x). \quad (13)$$

Với mọi u, v đặt $\frac{u+v}{2} = x, \frac{u-v}{2} = y$

Khi đó theo (13) ta có

$$g(u) + g(v) = g(u+v)$$

$$\text{hay } g(x+y) = g(x) + g(y). \quad (14)$$

Từ (10) và (14) ta suy ra $g(xy) = -g(x)g(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$. (15)

Từ (14) ta thấy đây là phương trình hàm Cauchy ta có

$$g(rx) = rg(x), \forall x \in \mathbf{R}, \forall r \in \mathbf{Q}. \quad (16)$$

Từ (15) cho $y = x$ ta được

$$g(x^2) = -[g(x)]^2, \forall x \in \mathbf{R}$$

suy ra

$$f(x) \leq 0, \forall x \geq 0$$

.

Từ (15) và (16) ta có

$$rg(x) = g(rx) = -g(r)g(x), \forall x \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{Q}. \quad (17)$$

Dễ thấy hàm số $g(x) \equiv 0$ thỏa mãn (10) nên ở đây ta sẽ xét trường hợp $g(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $g(x_0) \neq 0$.

Thay $x = x_0$ vào (17) ta thu được $g(r) = -r, r \in \mathbf{Q}$. (18)

Tiếp theo ta chứng minh g là hàm không tăng.

Giả sử $x < y$, khi đó ta có $y - x > 0$ suy ra $g(y - x) \leq 0$.

Từ đây sử dụng (14) ta được

$$g(y) = g((y-x) + x) = g(y-x) + g(x) \leq g(x).$$

Điều này chứng tỏ g là hàm không tăng trên $\mathbf{R}$.

Bây giờ với mỗi $x \in \mathbf{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{và } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x.$$

Vì g là hàm không tăng nên $g(u_n) \geq g(x) \geq g(v_n)$. Kết hợp với (18)

ta được

$$-u_n \geq g(x) \geq -v_n, \forall n = 1, 2, \dots$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta thu được $-x \geq g(x) \geq -x$

Từ đây ta suy ra $g(x) = -x, \forall x \in \mathbf{R}$ và do đó $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

- Trường hợp $f(1) = 1$.

Từ (4) cho $z = 1$, ta được

$$f(x)f(y+1) - f(x) + f(x+y) = f(x+y) - 1 + f(1+xy), \\ \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$\text{hay } f(x)f(y+1) - f(x) = -1 + f(1+xy), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (19)$$

Ở phương trình (19) lấy $y = -1$ ta được $f(1-x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$. Từ đây dễ dàng suy ra $f(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

Kết luận

Có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài $f(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$ và $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$

2.11 Phương pháp tổng hợp

2.11.1. Nội dung phương pháp

Để tìm được con đường đi đến lời giải các phương trình hàm đôi khi không hề đơn giản. Trong phần cuối này ta xét những phương trình hàm mà việc giải chúng đòi hỏi khả năng suy luận cao, huy động nhiều kiến thức liên quan và đôi khi là sự kết hợp nhuần nhuyễn của nhiều phương pháp giải như đã trình bày ở trên. Chúng ta tìm hiểu qua một số ví dụ dưới đây.

2.11.2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: *Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^+. \quad (1)$$

Bài giải:

Cho $x = y = 2$ thay vào (1) ta được

$$f(4) + (f(2))^2 = f(4) + 2f(2) \Leftrightarrow (f(2))^2 = 2f(2) \Leftrightarrow f(2)[f(2) - 2] = 0$$

Do $f(x) > 0$ nên ta có $f(2) = 2$.

Ta lại cho $x = y = 1$ ta có

$$f(2) + (f(1))^2 = f(1) + 2f(1) \Leftrightarrow 2 + (f(1))^2 = 3f(1) \Leftrightarrow (f(1))^2 - 3f(1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

- Xét trường hợp $f(1) = 2$.

Từ giả thiết bài toán cho $y = 1$ ta được

$$f(x+1) + 2f(x) = f(x) + f(x) + f(1) = 2f(x) + 2$$

$$\text{hay } f(x+1) = 2.$$

Từ đây suy ra $f(x) = 2, \forall x > 1$.

Với $0 < x < 1$ ta chọn $y = \frac{1}{x} > 1$. Khi đó ta có

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) + f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) + f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

suy ra $2 + 2f(x) = 2 + f(x) + 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$ với mọi $0 < x < 1$.

Như vậy ta có một hàm số cần tìm là $f(x) = 2, \forall x \in \mathbf{R}^+$.

- Xét trường hợp $f(1) = 1$.

Thay $y = 1$, từ giả thiết ta được

$$f(x+1) + f(x) = f(1) + f(x) + f(x)$$

$$\text{hay } f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbf{R}^+. \text{ (i)}$$

Từ (i) bằng phương pháp quy nạp ta thu được $f(n) = n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Và $f(x+n) = f(x) + n, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}^+. \text{ (ii)}$

Cho $x = n, y = \frac{1}{n}$, từ giả thiết bài toán ta có

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) + f(n)f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) + f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right)$$

kết hợp với (ii) ta thu được

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) = n + f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Vậy } n + f\left(\frac{1}{n}\right) + nf\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Với mọi số hữu tỉ $\frac{m}{n}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*$ ta cho $x = m, y = \frac{1}{n}$ từ giả thiết bài toán ta thu được

$$f\left(m + \frac{1}{n}\right) = f(m) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f(m) + f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Vậy } f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Như thế ta đã chứng minh được rằng $\forall x \in \mathbf{Q}^+$ thì $f(x) = x$.

Bây giờ ta chứng minh f đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Trước hết ta chú ý rằng với mọi $x > 1$ ta chọn $y = \frac{x}{x-1} > 0$ thì ta

có $x + y = xy$. Suy ra $f(x + y) = f(xy)$.

Khi đó, từ giả thiết bài toán ta thu được

$$f(x) f\left(\frac{x}{x-1}\right) = f(x) + f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right) [f(x) - 1] = f(x). \text{ Từ đây suy ra}$$

$$f(x) - 1 > 0 \text{ hay là } f(x) > 1.$$

$$\text{Và } f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{f(x)}{f(x) - 1}, \forall x > 1. \text{ (iii)}$$

Mặt khác từ (iii) ta có

$$1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{f(x+1)}{f(x+1) - 1} = \frac{f(x) + 1}{f(1)}.$$

Như vậy $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}, \forall x \in \mathbf{R}^+$. Do đó nếu $x > 1$ thì $f(x) > 1$ và

nếu $0 < x < 1$ thì $0 < f(x) < 1$.

+ Xét $0 < x < y < 1$ ta có

$$f(y - x + x) + f(y - x) f(x) = f[(y - x)x] + f(y - x) + f(x)$$

$$\text{hay } f(y) = f[(y - x)x] + f(y - x) + f(x) - f(y - x) f(x).$$

Để ý rằng do $0 < x < 1$ nên $f(x) < 1$, vì thế $f(x) < f(y)$. Do đó hàm f đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

$$+ \text{ Xét } 1 < x < y \text{ ta có } 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) < f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{f(y)} < \frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(y) > f(x).$$

Như thế f đồng biến trên $(1; +\infty)$. Và do đó f đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Cuối cùng, với mỗi $x > 0$ ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}, \{v_n\}$ sao cho

$$u_n < x < v_n$$

và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x$. Khi đó do f đồng biến nên

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow u_n \leq f(x) \leq v_n$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $f(x) = x$.

Thử lại ta thấy hàm số vừa tìm được thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có hai hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = 2$ và $f(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}^+$.

Ví dụ 2: *Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện*

- $f[x - f(y)] + f(y) = f(x - y), \forall x, y \in \mathbf{R}$ (1)
- Tập hợp $A = \{x \in \mathbf{R} / f(x) = 0\}$ là tập hữu hạn. (2)

Bài giải:

Đặt $f(0) = a$. Thay $x = y + f(y)$ ta có:

$$f[x - f(y)] + f(y) = f(x - y) \Leftrightarrow f(y) + f(y) = f(f(y))$$

hay $f(f(y)) = 2f(y), \forall y \in \mathbf{R}$.

Vì vậy ta có $f(a) = f(f(0)) = 2f(0) = 2a$.

Thay $x = 2a, y = a$ vào hệ thức (1) ta có

$$f(2a - a) + f(a) = f(2a - a) \Leftrightarrow f(0) + f(a) = f(a). \text{ Suy ra } f(0) = 0.$$

Bây giờ thay $x = 2y$ ta có

$$f[2y - f(y)] + f(y) = f(2y - y) = f(y) \Rightarrow f[2y - f(y)] = 0, \forall y \in \mathbf{R}.$$

Xét số b mà $f(b) = 0$. Từ kết quả trên thay $y = b$ ta có $f(2b) = 0$.

Lại thay $y = 2b$ ta có $f(4b) = 0$

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$f(2^n b) = 0, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Nếu $b \neq 0$ thì các giá trị $2^n b$ là phân biệt, nghĩa là tập $A = \{x \in \mathbf{R} / f(x) = 0\}$ là tập vô hạn. Trái với giả thiết (2), do đó $b = 0$.

Tóm lại $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Từ điều kiện (1) ta có

$$f[2y - f(y)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y - f(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(y) = 2y, \forall y \in \mathbf{R}$$

$$\text{hay } f(x) = 2x, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số vừa tìm được thỏa mãn yêu cầu bài toán.

KẾT LUẬN

Với đề tài "Một số phương pháp giải phương trình hàm", luận văn đã nêu lên một cách khá chi tiết các phương pháp giải phương trình hàm thông dụng hiện nay. Ngoài việc trình bày hệ thống nội dung các phương pháp, luận văn cũng nêu ra các ví dụ điển hình minh họa cho các phương pháp đó. Qua đó giúp người giải toán dễ hình dung và nắm bắt được phương pháp giải từng loại phương trình hàm.

Mặc dù đã cố gắng, nhưng do năng lực và thời gian có hạn nên chắc chắn luận văn còn nhiều chỗ thiếu sót. Em rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Đoàn Quỳnh, Hà Huy Khoái, Văn Như Cương, Đặng Hùng Thắng. *Tài liệu chuyên Toán lớp 12*, NXB Giáo dục 2012.
- [2] Nhiều tác giả. *Tài liệu tập huấn phát triển chuyên môn Giáo viên trường THPT chuyên Môn Toán - 2012*. Dự án PTGDTHPT.
- [3] Marko Radovanović. *Functional Equation*. Olympiad training materials, 2012.