

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LOAN

VẬN DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN
VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LOAN

VẬN DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN
VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.0113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	1
Lời nói đầu	2
Một số ký hiệu và chữ viết tắt	3
1 Bốn nguyên lý cơ bản	5
1.1 Nguyên lý quy nạp	5
1.2 Nguyên lý bù-trừ	12
1.3 Nguyên lý Dirichlet	21
1.4 Nguyên lý lùi dần	26
2 Các vấn đề liên quan	33
2.1 Phương pháp đại lượng bất biến	33
2.2 Phủ của một tập hợp	44
2.3 Ứng dụng trong bài toán hình học tổ hợp.	50
Kết luận	57
Tài liệu tham khảo	58

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được trình bày dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo PGS. TS Đàm Văn Nhĩ. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến cô giáo TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy giáo cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2011 - 2013, những người đã đem tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho tôi nhiều kiến thức cơ sở.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K5B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Hải Phòng, tháng 05 năm 2013.

Tác giả

Vũ Thị Loan

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết tổ hợp là một phần rất quan trọng của toán học rời rạc chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối tượng. Khi giải bài toán tổ hợp ta phải liệt kê, đếm các đối tượng theo các tính chất nào đó. Tổ hợp nghiên cứu các bài toán thường được kết hợp một số ràng buộc và có nhiều nghiệm. Nó chỉ ra số lượng nghiệm, lớp các nghiệm cụ thể hay lớp các nghiệm thỏa mãn thêm một số điều kiện nào đấy. Các thuật toán tổ hợp ngày càng được biến đổi hoàn thiện để dễ sử dụng và có độ phức tạp tính toán nhỏ dần. Khi thực hiện các thuật toán tổ hợp, các nghiệm của bài toán thường được xây dựng theo một vài nguyên lý nào đấy. Do vậy, luận văn này đặt vấn đề trình bày lại bốn nguyên lý cơ bản trong lý thuyết Tổ hợp và xây dựng một số ví dụ áp dụng.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo. Chương 1 tập trung trình bày bốn nguyên lý. Chương 2 trình bày các vấn đề liên quan như: Phương pháp đại lượng bất biến, phủ của một tập hợp và ứng dụng vào bài toán hình học tổ hợp.

Nội dung chương 1 gồm bốn mục. Mục 1.1 được dành để trình bày **Nguyên lý quy nạp**: Để chỉ ra mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n \geq \alpha$, ta chỉ cần kiểm tra $P(\alpha)$ đúng và $P(n+1)$ đúng khi $P(n)$ đúng. Từ đó suy ra $P(n)$ luôn luôn đúng với mọi $n \geq \alpha$.

Nguyên lý thứ hai được xét đến là **Nguyên lý Bù-Trừ** và được trình bày ở Mục 1.2. Khi xét bài toán tổ hợp, ta thường phải đếm xem có bao nhiêu cấu hình có thể tạo ra với những yêu cầu đặt trước. Nói chung, để đếm các cấu hình đã cho người ta tìm cách đưa các cấu hình về loại quen thuộc qua việc phân ra thành các lớp để áp dụng quy tắc cộng. Nhưng khi nhiều công việc có thể làm đồng thời thì quy tắc cộng không còn đúng nữa. Do vậy chúng ta phải xét Nguyên lý cộng dưới đây:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Tổng quát Nguyên lý cộng ta có Nguyên lý Bù-Trừ. Cái khó của việc vận dụng Nguyên lý Bù-Trừ là việc phân lớp như thế nào để dễ dàng có được các số đếm.

Mục 1.3 trình bày nguyên lý thứ ba, đó là **Nguyên lý Dirichlet**. ” Nếu có n đồ vật được cất vào k hộp, sẽ có một hộp chứa ít nhất $\left[\frac{n}{k}\right]$ vật.” Cái khó của việc vận dụng Nguyên lý Dirichlet là việc coi cái gì là số vật và cái gì được coi là số hộp.

Còn nguyên lý thứ tư là **Nguyên lý lùi dần**, được trình bày ở Mục 1.4. Đây là một phương pháp do Piere de Fermat đưa ra khi giải phương trình nghiệm nguyên. Xét phương trình $f(x, y, z) = 0$ trong $\mathbb{Z}$. Giả sử $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$ là nghiệm của phương trình $f(x, y, z) = 0$. Dựa vào giả thiết để suy ra $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{Z}^3$ là nghiệm của phương trình $f(x, y, z) = 0$ với $|x_0| > |x_1|$, chẳng hạn. Lặp lại được dãy lùi dần các số tự nhiên $|x_0| > |x_1| > |x_2| > \dots$. Sau một số hữu hạn bước, ta đi đến lời giải phương trình. Cái khó của dạng toán này là với bài toán đã cho phải xây dựng được một phép chuyển từ bộ nọ đến bộ kia để lùi. Nguyên lý lùi dần đã và đang được vận dụng để xét các bài toán trong nhiều lĩnh vực. Tương tự ta cũng có Nguyên lý tăng dần.

Trong chương 2 tập trung trình bày ba vấn đề liên quan đến bốn nguyên lý trên. Mục 2.1 trình bày về phương pháp đại lượng bất biến. Mục 2.2 trình bày về phủ của một tập hợp. Mục 2.3 trình bày một vài bài toán hình học tổ hợp.

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

Tập rỗng được ký hiệu qua ϕ

Với mọi x được viết là $\forall x$

Tập các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N}$

Tập các số nguyên được ký hiệu là $\mathbb{Z}$

Tập các số hữu tỉ được ký hiệu là $\mathbb{Q}$

Tập các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$

Lực lượng của tập A được ký hiệu là $\text{card}A$

Chương 1

Bốn nguyên lý cơ bản

Chương này tập trung trình bày bốn nguyên lý cơ bản, như: Nguyên lý quy nạp, Nguyên lý Bù-Trừ, Nguyên lý Dirichlet và Nguyên lý lùi dần.

1.1 Nguyên lý quy nạp

Mệnh đề 1.1.1. *Tập tất cả các số tự nhiên $\mathbb{N}$ cùng quan hệ thứ tự là một tập sắp thứ tự tốt.*

Mệnh đề 1.1.2. *Nếu tập bất kỳ $M \subset \mathbb{N}$ có các tính chất: $0 \in M$ và $n + 1 \in M$ khi $n \in M$, thì $M = \mathbb{N}$.*

Hai kết quả dưới đây thường được gọi là nguyên lý thứ nhất và nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học.

Mệnh đề 1.1.3.[Nguyên lý thứ nhất] *Nếu mệnh đề $P(n)$, phụ thuộc vào số tự nhiên n thỏa mãn:*

- (i) $P(\alpha)$ đúng với một $\alpha \in \mathbb{N}$.
- (ii) $P(n + 1)$ đúng khi $P(n)$ đúng, ở đó $n \geq \alpha, n \in \mathbb{N}$ thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq \alpha$.

Mệnh đề 1.1.4.[Nguyên lý thứ hai] *Nếu mệnh đề $P(n)$, phụ thuộc vào số tự nhiên n , thỏa mãn:*

- (i) $P(\alpha)$ đúng với một $\alpha \in \mathbb{N}$.
- (ii) $P(n + 1)$ đúng khi $P(\alpha), P(\alpha + 1), \dots, P(n)$ đúng, ở đó $n \geq \alpha, n \in \mathbb{N}$ thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq \alpha$.

Bây giờ ta sẽ vận dụng hai nguyên lý này để xét các bài toán sơ cấp.

Ví dụ 1.1.5. Với số nguyên $n \geq 2$ và $P_n = n!$, hãy chứng minh $2P_n \geq 2^n$.

Bài giải: Với $n = 2$ có $2P_2 = 4 = 2^2$. Như vậy kết luận đúng cho $n = 2$. Giả sử kết luận đúng cho $n > 2$. Khi đó $2P_n \geq 2^n$. Xét tích

$$2P_{n+1} = (n+1).2P_n \geq (n+1)2^n > 2.2^n = 2^{n+1}.$$

Từ đó suy ra $2P_n \geq 2^n, \forall n \geq 2$. $\square$

Ví dụ 1.1.6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 6$ ta luôn có $n! > 3^n$.

Bài giải: Bởi vì $7! = 5040 > 2187 = 3^7$ nên kết luận đúng với $n = 7$. Giả sử kết luận đã đúng với n . Khi đó ta có $n! > 3^n$. Với $n+1$ có $(n+1)! = n!(n+1) > 3^n(n+1)$ theo giả thiết quy nạp. Vì $n+1 > 3$ nên $(n+1)! > 3^{n+1}$ và như thế $n! > 3^n$ đúng với mọi số nguyên $n > 6$. $\square$

Ví dụ 1.1.7. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta luôn có bất đẳng thức:

$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Bài giải: Bởi vì $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ nên ta nhận được bất đẳng thức $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

Hiển nhiên $1 < 2$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n . Khi đó ta có $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$. Lại có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

và như thế

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2n+1+1}{\sqrt{n+1}}$$

hay $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$. Tóm lại kết quả đúng với mọi số nguyên $n > 0$. $\square$

Ví dụ 1.1.8. Dãy (a_n) được cho như sau: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 15, a_5 = 21, \dots$. Xác định a_n theo n và chứng minh bất đẳng thức

$$T = (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{10}) \cdots (1 - \frac{1}{a_n}) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Bài giải: Từ $a_1 = 3 = a_0 + 2, a_2 = 6 = a_1 + 3, a_3 = 10 = a_2 + 4, a_4 = 15 = a_3 + 5, a_5 = 21 = a_4 + 6$ suy ra $a_n = a_{n-1} + n + 1$ và điều này dễ dàng có được qua quy nạp. Vậy $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

và suy ra $1 - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - 1}{a_k} = \frac{(k+1)(k+2) - 2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$. Như vậy $1 - \frac{1}{a_k} = (1 - \frac{1}{k+1})(1 + \frac{1}{k+2})$ và ta có được phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} T &= (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1})(1 + \frac{1}{n+2}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{5^2}) \cdots (1 - \frac{1}{(n+1)^2})(1 + \frac{1}{n+2}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{3^2 - 1}{3^2})(\frac{4^2 - 1}{4^2})(\frac{5^2 - 1}{5^2}) \cdots (\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2})(1 + \frac{1}{n+2}) \\ &= \frac{2.3.4^2.5^2 \cdots (n-1)^2 n^2 (n+1)(n+2)(n+3)}{2.3^2.4^2.5^2 \cdots (n-1)^2 n^2 (n+1)^2 (n+2)} \\ &= \frac{n+3}{3(n+1)} < \frac{n+3}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tóm lại $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ và nhận được bất đẳng thức $T < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$. $\square$

Ví dụ 1.1.9. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta có đồng nhất thức:

$$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Bài giải: Với $n = 1$ ta có $1.2 = 2 = (1-1)2^{1+1} + 2$ và như vậy kết luận đúng. Giả sử kết luận đúng với n . Khi đó

$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$. Với $n+1$ ta có kết quả sau:

$$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} = n.2^{n+2} + 2$$

và như thế kết luận cũng đúng với $n+1$. Tóm lại, ta có đồng nhất thức

$$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

□

Ví dụ 1.1.10. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta có đồng nhất thức:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right].$$

Bài giải: Với $n = 1$ ta có $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2 \cdot 1 + 3}{3^1} \right]$. Giả sử kết luận đúng với n . Khi đó $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$. Với $n+1$ ta có kết quả sau:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right] + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+1}} \right]$$

và như thế kết luận cũng đúng với $n+1$. Tóm lại, ta có đồng nhất thức

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right].$$

□

Ví dụ 1.1.11. Với dãy số thực $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = n+1, n \geq 1$ có

$$\sum_{i=0}^n \frac{|a_i - a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2 + 1} \sqrt{a_{i+1}^2 + 1}} > \frac{2n}{3(n+2)}.$$

Bài giải: Với ba số a, b, c ta đặt $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$. Khi đó bất đẳng thức $\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{b^2+1}\sqrt{c^2+1}} \geq \frac{|c-a|}{\sqrt{c^2+1}\sqrt{a^2+1}}$ tương đương $|\sin(x-y)| + |\sin(y-z)| \geq |\sin(x-z)|$.

Từ $|\sin(u+v)| = |\sin u \cos v + \sin v \cos u| \leq |\sin u| + |\sin v|$ ta suy ra bất đẳng thức sau:

$$|\sin(x-z)| = |\sin(x-y+y-z)| \leq |\sin(x-y)| + |\sin(y-z)|.$$

Sử dụng kết quả này: $\frac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{a_1^2 + 1} \sqrt{a_2^2 + 1}} + \frac{|a_2 - a_3|}{\sqrt{a_2^2 + 1} \sqrt{a_3^2 + 1}} \geq \frac{|a_1 - a_3|}{\sqrt{a_1^2 + 1} \sqrt{a_3^2 + 1}}$.

Quy nạp theo n được:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{|a_i - a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2 + 1} \sqrt{a_{i+1}^2 + 1}} &\geq \frac{|a_0 - a_{n+1}|}{\sqrt{a_0^2 + 1} \sqrt{a_{n+1}^2 + 1}} \\ &\geq \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 4n + 4}} > \frac{n}{\sqrt{2}(n+2)} > \frac{2n}{3(n+2)}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.1.12. Với số tự nhiên n ta xét dãy $a_0 = 0, a_i > 0$ với mọi số $i = 1, 2, \dots, n$ và thỏa mãn $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1 + (a_0 + \dots + a_{i-1})^2} \sqrt{1 + (a_0 + \dots + a_i)^2}} < \frac{\pi}{4}.$$

Bài giải: Đặt $u_i = \arctan(a_0 + \dots + a_{i-1} + a_i)$ với $i = 0, 1, \dots, n$. Khi đó các góc $u_i \in [0; \frac{\pi}{4}]$ và có các hệ thức sau:

$$a_i = (a_0 + \dots + a_{i-1} + a_i) - (a_0 + \dots + a_{i-1}) = \tan u_i - \tan u_{i-1}$$

$$\frac{1}{\cos u_i} = \sqrt{1 + \tan^2 u_i} = \sqrt{1 + (a_0 + \dots + a_{i-1} + a_i)^2}, i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Vậy } S = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1 + (a_0 + \dots + a_{i-1})^2} \sqrt{1 + (a_0 + \dots + a_i)^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{\tan u_i - \tan u_{i-1}}{\frac{1}{\cos u_{i-1} \cos u_i}}$$

$$\text{hay } S = \sum_{i=1}^n \sin(u_i - u_{i-1}) < \sum_{i=1}^n (u_i - u_{i-1}) = u_n = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

Mệnh đề 1.1.13.[Cauchy] Với các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ta luôn có

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \Gamma_n.$$

Chứng minh: Với $n = 1$ bất đẳng thức đúng là hiển nhiên. Với $n = 2$ ta có $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ vì $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$. Xét trường hợp $n > 2$. Giả sử đã có $A_n \geq \Gamma_n$. Khi đó $A = \frac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_{n+1} A_{n+1}^{n-1}} = \Gamma$ theo giả thiết quy nạp. Lại có $A_{n+1} = \frac{A_n + A}{2} \geq \sqrt{A_n A} \geq \sqrt{\Gamma_n \Gamma}$ và như vậy $A_{n+1} \geq \sqrt{\Gamma_n \Gamma} = \sqrt[n]{\Gamma_{n+1}^{n+1} A_{n+1}^{n-1}}$ hay $A_{n+1} \geq \Gamma_{n+1}$. □

Ví dụ 1.1.14. Cho $a + b \geq 0$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta đều có

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2} \right)^n.$$

Bài giải: Với $n = 1$, bất đẳng thức luôn đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng cho $n = k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Với $n = k + 1$, theo giả thiết quy nạp sẽ nhận được:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \frac{a+b}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2} = \frac{(a+b)(a^k + b^k)}{4}.$$

Xét hiệu $T = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} - \frac{(a+b)(a^k + b^k)}{4} = \frac{(a-b)(a^k - b^k)}{4}$. Bởi vai trò của a và b như nhau nên có thể giả thiết $a \geq b$. Kết hợp với giả thiết $a + b \geq 0$ hay $a \geq -b$ ta nhận được $a \geq |b|$. Vậy $a^k \geq |b|^k \geq b^k$ và suy ra $(a-b)(a^k - b^k) \geq 0$.

Do đó $\frac{(a+b)(a^k + b^k)}{4} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$ và như vậy $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$.

Tóm lại bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 0$ $\square$

Ví dụ 1.1.15. Cho các số $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ và k là một hằng số dương tùy ý sao cho $k \geq n - 1$. Vậy ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{k + a_1} + \frac{1}{k + a_2} + \cdots + \frac{1}{k + a_n} \leq \frac{n}{k + 1}.$$

Bài giải: Với $n = 2$ bất đẳng thức trở thành $\frac{1}{k + a_1} + \frac{1}{k + a_2} \leq \frac{2}{k + 1}$ hay $a_1 + a_2 \geq 2$ vì $a_1 a_2 = 1$. Từ $a_1 a_2 = 1$ suy ra $a_1 + a_2 \geq 2$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng với $n = 2$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh đúng với n . Không mất tính chất tổng quát, có thể coi $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1}$. Đặt $t = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $h = \frac{k}{t}$ và $b_i = \frac{a_i}{t}$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$. Biểu diễn tổng qua h và các b_i :

$$\frac{1}{k + a_1} + \frac{1}{k + a_2} + \cdots + \frac{1}{k + a_n} = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{h + b_1} + \frac{1}{h + b_2} + \cdots + \frac{1}{h + b_n} \right).$$

Vì $k \geq n + 1 - 1 = n$ và $t \leq 1$ nên $h \geq \frac{n}{t} > n - 1$. Như vậy, theo

giả thiết quy nạp có $\frac{1}{h + b_1} + \frac{1}{h + b_2} + \cdots + \frac{1}{h + b_n} \leq \frac{n}{h + 1}$. Từ đó

suy ra $\frac{1}{k + a_1} + \frac{1}{k + a_2} + \cdots + \frac{1}{k + a_n} \leq \frac{1}{t} \frac{n}{h + 1} = \frac{n}{k + t}$. Bây giờ sẽ chỉ

ra $\frac{n}{k + t} + \frac{1}{k + a_{n+1}} \leq \frac{n + 1}{k + 1}$ với $t^n a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$. Thật vậy,

$\frac{n}{k + t} + \frac{1}{k + a_{n+1}} \leq \frac{n + 1}{k + 1}$ tương đương $\frac{n}{k + t} + \frac{t^n}{k t^n + 1} \leq \frac{n + 1}{k + 1}$ hay

$M = (k(n+1) - (k+1))t^{n+1} - k(n+1)t^n + (n+1)t + (k-n) \geq 0$. Viết $M = (t-1)^2(k(n+1)(t^{n-1} + \dots + 1)) - (k+1)(t^{n-1} + 2t^{n-2} + \dots + n) \geq 0$. Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. $\square$

Ví dụ 1.1.16. Cho ánh xạ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. f là hàm đa thức bậc d khi và chỉ khi $\Delta f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ xác định bởi $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ là một hàm đa thức bậc $d-1$.

Bài giải: Giả sử f là hàm đa thức bậc d . Khi đó có đa thức $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ bậc d thỏa mãn $f(n) = g(n)$ với mọi số tự nhiên $n \geq 0$. Đặt $h(x) = g(x+1) - g(x)$. Vì $h(x)$ là đa thức bậc $d-1$ và $\Delta f(n) = h(n)$ với mọi số tự nhiên $n \geq 0$ nên $\Delta f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ xác định bởi $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ là một hàm đa thức bậc $d-1$.

Ngược lại, giả sử $\Delta f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ xác định bởi $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ là một hàm đa thức bậc $d-1$. Ta chỉ ra f là hàm đa thức bậc d bằng phương pháp quy nạp theo d . Nếu $d = 1$ thì $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = a_0 \in \mathbb{Q}$ khi $n \geq 0$. Vậy $f(n+1) - a_0(n+1) = f(n) - a_0n = b$ khi $n \geq 0$. Với $g(x) = a_0x + b$ có $f(n) = g(n)$, $n \geq 0$. Do vậy f là hàm đa thức bậc $1 = d$. Giả sử $d > 1$ và $h(x) = a_0x^{d-1} + a_1x^{d-2} + \dots + a_{d-1} \in \mathbb{Q}[x]$ với $a_0 \neq 0$ và $\Delta f(n) = h(n)$ với mọi $n \geq 0$. Như vậy:

$$f(n+1) - f(n) = \frac{a_0}{d}[(n+1)^d - n^d] + p(n) \text{ với hàm đa thức } p(x) \in \mathbb{Q}[x]$$

bậc nhỏ hơn hoặc bằng $d-2$. Do đó, nếu $k(n) = f(n) - \frac{a_0n^d}{d}$ thì Δk là hàm đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng $d-2$. Theo giả thiết quy nạp, $k(x)$ là hàm đa thức bậc $d-1$. Vậy $f(n) = k(n) + \frac{a_0n^d}{d}$, $a_0 \neq 0$, là hàm đa thức bậc d . $\square$

Ví dụ 1.1.17. Với số nguyên $n \geq 1$ và số thực $a > 0$ luôn có đồng nhất thức

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{ak+1} = \frac{n!a^n}{\prod_{k=1}^n (1+ka)}.$$

Bài giải: Sẽ chỉ ra $\int_0^1 (1-x^a)^n dx = \frac{n!a^n}{\prod_{k=1}^n (1+ka)}$ bằng quy nạp theo n .

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{ak+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^1 x^{ak} dx = \int_0^1 (1-x^a)^n dx = \frac{n!a^n}{\prod_{k=1}^n (1+ka)}.$$

Thật vậy, với $n=1$ ta có $\int_0^1 (1-x^a) dx = \frac{1!a^1}{1+1.a}$. Đặt $I_n = \int_0^1 (1-x^a)^n dx$.

Giả sử $I_n = \frac{n!a^n}{\prod_{k=1}^n (1+ka)}$. Khi đó:

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x^a)^{n+1} dx = (n+1) \int_0^1 x^a (1-x^a)^n dx = (n+1)a[I_n - I_{n+1}]$$

hay $I_{n+1} = \frac{(n+1)a}{1+(n+1)a} I_n$. Theo giả thuyết quy nạp ta có:

$$I_{n+1} = \frac{(n+1)!a^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1} (1+ka)} \text{ và từ đây nhận được đồng nhất thức như trên. } \quad \square$$

Ví dụ 1.1.18. Với những con tem 5 xu và 6 xu ta có thể tạo được những loại bưu phí nào?

Bài giải: Ta có ngay những loại bưu phí 5, 6, $10 = 2.5$, $11 = 5 + 6$, $12 = 2.6$, $15 = 3.5$, $16 = 2.5 + 6$, $17 = 2.6 + 5$, $18 = 3.6$, $20 = 4.5$, $21 = 3.5 + 6$, $22 = 2.5 + 2.6$, $23 = 3.6 + 5$, $24 = 4.6$ được dán bằng hai loại tem trên. Bây giờ ta chỉ ra, mọi bưu phí lớn hơn 24 xu cũng được dán bằng hai loại tem trên. Giả sử $n > 24$ được biểu diễn bằng $n = k.5 + h.6$. Nếu $k \geq 1$ thì $n+1 = (k-1).5 + (h+1).6$; nếu $k=0$ thì $h > 4$. Khi đó $n+1 = 5.5 + (h-4).6$. Do vậy $n+1 = s.5 + r.6$ và từ đó suy ra điều cần chứng minh. $\square$

1.2 Nguyên lý bù-trừ

Khi xét bài toán tổ hợp, ta thường phải đếm xem có bao nhiêu cấu hình có thể tạo ra với yêu cầu đặt trước. Nói chung, để đếm được các cấu hình đã cho người ta tìm cách đưa các cấu hình về loại quen thuộc qua việc phân thành các lớp để áp dụng nguyên lý cộng dưới đây:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Tổng quát nguyên lý cộng ta có nguyên lý bù-trừ. Cái khó của việc sử dụng nguyên lý bù-trừ là việc phân lớp như thế nào để dễ dàng có được các số đếm.

Ký hiệu lực lượng của tập hợp A gồm một số hữu hạn các phần tử qua $|A|$. Giả sử $A_1, \dots, A_n$ là những tập con của tập A. Các số s_k được xác định qua

$$\begin{aligned} s_0 &= |A| \\ s_1 &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ s_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\dots \\ s_k &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \\ &\dots \\ s_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

và các số e_k được định nghĩa bởi : e_k là số tất cả các phần tử của A chứa trong đúng k tập con trong số các tập con $A_1, \dots, A_n$. Ta sẽ tìm quan hệ giữa các số s_i và e_k . Trước tiên ta chứng minh một kết quả rất đẹp sau đây:

Định lí 1.2.1.[Nguyên lý Bù-Trừ] Cho các tập hữu hạn $A_1, \dots, A_n$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|. \end{aligned}$$

Chứng minh: Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Trước tiên ta thấy $n = 1$ kết luận đúng. Với $n = 2$, xét hai tập hợp A, B với lực lượng hữu hạn. Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì hiển nhiên $|A \cup B| = |A| + |B|$. Nếu $C = A \cap B \neq \emptyset$ thì ta có $A \cup B = (A \setminus B) \cup C \cup (B \setminus A)$. Vì các tập này đôi một giao nhau bằng rỗng, nên $|A \cup B| = |A \setminus B| + |C| + |B \setminus A|$. Vì $|A \setminus B| = |A| - |C|$ và $|B \setminus A| = |B| - |C|$, nên $|A \cup B| = |A| + |B| - |C|$, (1).

Khi $n > 2$ giả thiết kết luận đúng cho $n - 1$ tập. Đặt $A = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. Theo

công thức (1) ta có

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = |A \cup A_n| = |A| + |A_n| - |A \cap A_n|.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp cho $|A|$ và $|A \cap A_n|$ sẽ nhận được công thức $\square$

Hệ quả 1.2.2. $e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - \dots + (-1)^n s_n$; $s_0 = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

Chứng minh: Hiển nhiên $e_0 = |A| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$ và theo Định lý 1.2.1 ta

nhận được $e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - \dots + (-1)^n s_n$. Vì $|A| = |A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i| + \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$ nên ta nhận được $s_0 = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_n$. $\square$

Ví dụ 1.2.3. Có bao nhiêu số tự nhiên $n \in [1, 2005]$ mà không chia hết cho một số nào trong các số 2, 3, 11, 13.

Bài giải: Kí hiệu $A = \{1, 2, \dots, 2005\}$ và A_i là tập con của A gồm tất cả các số nguyên dương chia hết cho i . Ta có $|A_2| = \left\lfloor \frac{2005}{2} \right\rfloor = 1002$,

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{2005}{3} \right\rfloor = 668, |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2005}{11} \right\rfloor = 182 \text{ và } |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{13} \right\rfloor = 154;$$

$$\text{ta lại có } |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{2005}{6} \right\rfloor = 334, |A_2 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2005}{22} \right\rfloor = 91,$$

$$|A_2 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{26} \right\rfloor = 77, |A_3 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2005}{33} \right\rfloor = 60,$$

$$|A_3 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{39} \right\rfloor = 51, |A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{143} \right\rfloor = 14.$$

$$\text{Tính } |A_2 \cap A_3 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2005}{66} \right\rfloor = 30, |A_2 \cap A_3 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{78} \right\rfloor = 25,$$

$$|A_2 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{286} \right\rfloor = 7, |A_3 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{429} \right\rfloor = 4,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2005}{858} \right\rfloor = 2.$$

Số T các số thuộc A không chia hết cho 2, 3, 11, 13 là:

$$\begin{aligned} T &= |A| - |A_2 \cup A_3 \cup A_{11} \cup A_{13}| \\ &= 2005 - (1002 + 668 + 182 + 154) + (334 + 91 + 77 + 60 + 51 + 14) \\ &\quad - (30 + 25 + 7 + 4) + 2 = 562. \end{aligned}$$

Vậy $T = 562$. $\square$

Ví dụ 1.2.4. Nếu số nguyên dương $n > 1$ có sự phân tích tiêu chuẩn thành tích $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ thì hàm Euler $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i})$, trong đó $\varphi(n)$ là tất cả các số nguyên $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $(k, n) = 1$.

Chứng minh: Với mỗi $1 \leq i \leq s$ ta định nghĩa tập $A_i = \{p_i, 2p_i, \dots, \frac{n}{p_i}p_i\}$. Khi đó các A_i là những tập con của tập $T = \{1, 2, \dots, n\}$ và $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. Với mỗi cặp $i, j, i \neq j$, tập $A_i \cap A_j$ bao gồm các số thuộc T là bội của $p_i p_j$ và $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$. Tương tự tính lực lượng của các tập khác. Theo Nguyên lý bù-trừ, Định lý 1.2.1 ta có:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - |\bigcup_{i=1}^s A_i| = n - \sum_{i=1}^s \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \frac{n}{p_i p_j} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq s} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_s}. \end{aligned}$$

Vậy ta nhận được công thức cho hàm Euler φ : $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s (1 - \frac{1}{p_i})$. $\square$

Ví dụ 1.2.5. Giả thiết n sinh viên có n chiếc ô khác nhau để ngoài giảng đường. Tìm số khả năng để không có sinh viên nào lấy lại đúng ô của mình.

Bài giải: Kí hiệu D_n là số khả năng để không có sinh viên nào lấy lại đúng ô của mình. Thay tập n sinh viên qua tập $T = \{1, 2, \dots, n\}$. Kí hiệu $|A|$ là tập tất cả các khả năng lấy ô của n sinh viên và A_i là tập con của A gồm tất cả các khả năng lấy ô của n sinh viên sao cho sinh viên thứ i lấy đúng ô. Hiển nhiên:

$$D_n = |A| - |\bigcup_{i=1}^n A_i|, |A| = n!, |A_i| = (n-1)!, |\bigcap_{j=1}^s A_{i_j}| = (n-s)!.$$

Theo Định lý 1.2.1 ta có:

$$D_n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \dots + (-1)^n C_n^n(n-n)!.$$

Vậy $D_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i i!$ với quy ước $D_0 = 1$. $\square$

Ví dụ 1.2.6. Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, và

$$a_n = \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2} + (-1)^n(1 - \frac{n}{2})$$

với $n \geq 3$. Tìm công thức xác định a_n theo n ?

Bài giải: Ta có $a_n = \frac{1}{2}na_{n-1} + (-1)^n + \frac{n}{2}[(n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1}]$. Bằng quy nạp theo n được $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$ với số nguyên $n \geq 2$. Từ đây suy ra $a_n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \dots + (-1)^nC_n^n(n-n)! = D_n$ với mọi số nguyên $n \geq 2$. $\square$

Định lý 1.2.7. Giả thiết tập V có n phần tử và tập W có m phần tử. Khi đó số tất cả các toàn ánh từ V lên W bằng

$$N = a_{n,m} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Chứng minh: Không hạn chế có thể xem $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi ánh xạ $f : V \rightarrow W$ tương ứng đúng một dãy $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ với $y_i \in W$. Mỗi y_i có m khả năng chọn. Vậy dãy $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ có m^n cách chọn. Vậy số tất cả các ánh xạ $f : V \rightarrow W$ đúng bằng m^n .

Giả sử $W = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Kí hiệu T_k là tập tất cả các ánh xạ $f : V \rightarrow W$ để $y_k \notin f(V)$ với $k = 1, 2, \dots, m$. Khi đó $f(V) \neq W$ khi và chỉ khi $f \in \bigcup_{k=1}^m T_k$. Tính số phần tử của $\bigcup_{k=1}^m T_k$.

Chú ý rằng với mỗi dãy số tùy ý $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$, tập giao $T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \dots \cap T_{i_k}$ là tập tất cả các ánh xạ $f : V \rightarrow W$ sao cho $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k} \notin f(V)$. Lực lượng của tập giao này đúng bằng số tất cả các ánh xạ $h : V \rightarrow W \setminus \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$ và bằng $(m-k)^n$ theo nhận xét ban đầu. Tập k phần tử $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\} \subseteq W$ có thể chọn được bằng $\binom{m}{k}$ cách. Vậy theo Định lý 1.2.1 ta có:

$$N = m^n - |\bigcup_{k=1}^m T_k| = m^n - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Tóm lại $N = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$. $\square$

Ví dụ 1.2.8. Xác định tập hợp A với lực lượng $|A|$ nhỏ nhất sao cho tồn tại một ánh xạ $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow A$ thỏa mãn: Nếu $i, j \in \mathbb{N}^*$ với $|i - j|$ là một số nguyên tố thì $f(i) \neq f(j)$.

Bài giải: Tập $M = \{1, 3, 6, 8\}$ thỏa mãn: Với mọi $i, j \in M, i \neq j$, có $|i - j| \in \{2, 3, 5, 7\}$. Vậy ảnh các phần tử thuộc tập M là khác nhau. Do đó $|A| \geq 4$.

Bây giờ ta chỉ ra $|A|_{nn} = 4$. Đặt $N_i = \{i + 4k | k \in \mathbb{Z}\}$ với $i = 0, 1, 2, 3$. Xét tập $A = \{N_0, N_1, N_2, N_3\}$. Tương ứng $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow A, x \mapsto N_i$ nếu $x \in N_i$. Hiển nhiên $f(x) = f(y)$ khi và chỉ khi $x, y \in N_i$ hay $|x - y|$ chia hết cho 4. Như vậy, $|x - y|$ không là số nguyên tố. Tóm lại, ta đã xây dựng được ánh xạ $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow A$ thỏa mãn đầu bài. Do đó $|A|_{nn} = 4$. $\square$

Ví dụ 1.2.9. Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $t < p$ là một số nguyên dương. Tìm số các tập con A của tập $X = \{1, 2, \dots, p\}$ thỏa mãn tính chất sau:

- (i) A chứa đúng t phần tử
- (ii) $S(A) \equiv r \pmod{p}$, trong đó $S(A)$ là tổng các phần tử của tập A và r là một hằng số, $0 \leq r < p$.

Bài giải: Kí hiệu M là tập tất cả các tập con A của X với

$$|A| = t < p.$$

Giả sử tập con $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$. Với hằng số m , gọi $a_{m_i} \in Y$ sao cho $a_{m_i} \equiv a_i + m \pmod{p}$, $i = 1, \dots, t$. Xét tập con $A_m = \{a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_t}\}$ và ánh xạ $\phi_m : A \rightarrow A_m$ với $\phi_m(a_i) = a_{m_i} \equiv a_i + m \pmod{p}$. Ta thấy ngay, $a_i \neq a_j$ khi và chỉ khi $a_{m_i} \neq a_{m_j}$ với $i \neq j$. Do đó ϕ_m là đơn ánh. Hiển nhiên, ϕ_m là toàn ánh. Do vậy ϕ_m là một song ánh và A_m có m phần tử phân biệt. Dễ thấy, quan hệ $A \phi_m A_m$ giữa các tập con thuộc M gồm t phần tử của X là một quan hệ tương đương. Khi đó M được phân ra làm các lớp tương đương rời nhau, mỗi lớp gồm p tập, vì $m = 0, 1, \dots, p-1$, và mỗi tập chứa đúng t phần tử. Do vậy, số các lớp của M là $\frac{C_p^t}{p}$.

Tính tổng $S(A_m) \equiv S(A) + mt \pmod{p}$. Do mt không chia hết cho p nên $S(A_m)$ và $S(A)$ có số dư khác nhau khi chia cho p mà mỗi lớp có đúng p tập (do $m = 0, 1, \dots, p-1$). Vậy trong mỗi lớp phải có đúng một tập có số dư bằng r khi chia cho p . Với mỗi $r, 0 \leq r \leq p-1$ ta gọi s_r là số các tập A thuộc M mà $S(A) \equiv r \pmod{p}$ và ta có $s_0 = s_1 = \dots = s_{p-1} = \frac{C_p^t}{p}$. $\square$

Ví dụ 1.2.10. Một hoán vị $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ của tập hợp $\{1, 2, \dots, 2n\}$ với n nguyên dương, được gọi là có tính chất P nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$, với ít nhất một giá trị $i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$. Chứng minh rằng với mỗi số n , số hoán vị có tính chất P lớn hơn số hoán vị không có tính chất P .

Bài giải: Đặt $M = \{1, 2, \dots, n, n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$. Lưu ý $|1 - (n + 1)| = n$ và $|2 - (n + 2)| = n$. Gọi A_k là tập tất cả các hoán vị của M sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử k và $k + n$ đứng kề nhau. Gọi A là tập tất cả các hoán vị có tính chất P . Ta thấy $A = \bigcup_k A_k$ nên:

$$|A| \geq \left| \bigcup_k A_k \right| = \sum_k |A_k| - \sum_{k < h} |A_k \cap A_h| + \sum_{k < h < m} |A_k \cap A_h \cap A_m| \dots$$

Vì đây là tổng các số hạng của dãy đơn điệu giảm và đan dấu nhau nên

$$|A| \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k < h} |A_k \cap A_h|$$

Ngoài ra $|A_k| = 2(2n - 1)!$ và $|A_k \cap A_h| = 4(2n - 2)!$. Do đó

$$|A| \geq (2n - 2)! \left(2n(2n - 1) - \frac{n(n - 1)}{2} \cdot 4 \right) = 2n^2(2n - 2)! > \frac{(2n)!}{2}$$

□

Ví dụ 1.2.11. [Ucraina 1996] Gọi M là tập tất cả các số nguyên dương (viết theo hệ thập phân) có n chữ số 1, n chữ số 2 và không còn chữ số nào khác; N là tập tất cả các số nguyên dương có n chữ số thuộc tập $\{1, 2, 3, 4\}$ và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh rằng $|M| = |N| = C_{2n}^n$.

Bài giải: Ta chứng minh tồn tại một song ánh từ N vào M . Phương pháp như sau:

Số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 và số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2 được "nhân đôi" thành số có $2n$ chữ số theo quy tắc: Đầu tiên, hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có $2n$ chữ số; sau đó, các chữ số 3 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 1, các chữ số 3 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 2. Tương tự, các chữ số 4 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 2, các chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1. Như thế, ta thu được một số có đúng n số 1 và n số 2. Rõ ràng đây là một đơn ánh. Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau:

Với một số có n chữ số 1 và n chữ số 2, ta cắt n chữ số đầu, n chữ số cuối và đặt chúng "song song" với nhau như khi thực hiện phép "cộng". Thực hiện phép cộng theo quy tắc:

$$1 + 1 = 1; 2 + 2 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 1 = 4.$$

Ta sẽ thu được một số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 với số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2. Vậy song ánh giữa hai tập hợp đã được thiết lập. Ta tính được $|M| = |N| = C_{2n}^n$. $\square$

Ví dụ 1.2.12.[VMO 1995, Bảng B] *Hỏi từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

- (i) *Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần.*
- (ii) *Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.*

Bài giải: Gọi s là số cần tìm và A là tập gồm tất cả các số có 10 chữ số, lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 thỏa mãn điều kiện (i) của đề bài. Với mỗi $i = 1, \dots, 5$, kí hiệu A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A , mà trong mỗi số đều có hai chữ số i đứng cạnh nhau. Khi đó, theo Nguyên lý bù-trừ

$$\begin{aligned} s &= \left| A \setminus \bigcup_{i=1}^5 A_i \right| = |A| - \left| \bigcup_{i=1}^5 A_i \right| \\ &= |A| - \sum_{i=1}^5 |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| - \left| \bigcap_{i=1}^5 A_i \right| \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } |A| = \frac{10!}{2^5} \quad (**)$$

Xét k bất kì thuộc tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ và xét bộ $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ bất kì thỏa mãn $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 5$. Gọi T là tập gồm tất cả các số có $(10 - k)$ chữ số, lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 mà trong mỗi số đó: mỗi chữ số $i_1, i_2, \dots, i_k$ đều có mặt đúng một lần, còn các chữ số khác, mỗi chữ số có mặt đúng hai lần. Đặt tương ứng mỗi số $a \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$, với số nhận được từ a bằng cách bỏ đồng thời ở a một chữ số i_1 , một chữ số $i_2, \dots$, một chữ số i_k .

Tiếp theo, ta chứng minh tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ

$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ đến T . Khi đó

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = T = \frac{(10-k)!}{2^{5-k}} \quad (***)$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$s = \frac{10!}{2^5} - C_5^1 \cdot \frac{9!}{2^4} + C_5^2 \cdot \frac{8!}{2^3} - C_5^3 \cdot \frac{7!}{2^2} + C_5^4 \cdot \frac{6!}{2^1} - \frac{5!}{2^0} = 39480.$$

□

Ví dụ 1.2.13. Cho hai số nguyên dương m và n sao cho $n+2$ chia hết cho m . Hãy tính các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) sao cho tổng $x+y+z$ chia hết cho m , trong đó mỗi số x, y, z đều không lớn hơn n .

Bài giải: Đặt $k = \frac{n+2}{m} \in \mathbb{N}^*$. Ta có $n = km - 2$. Xét các tập hợp:

$$D = \{km - 1, km\}; \quad E = \{1, 2, \dots, km\};$$

$$A = \{(x, y, z) | x, y, z \in E | D; x+y+z:m\};$$

$$B = \{(x, y, z) | x, y, z \in E; x+y+z:m\};$$

$$C = \{(x, y, z) | x, y, z \in E; x \in D \text{ hoặc } y \in D \text{ hoặc } z \in D; x+y+z:m\}.$$

Dễ thấy $|A| = |B| - |C|$.

- . *Tính $|B|$.* Có km cách chọn $x \in E$. Với mỗi cách chọn $x \in E$, ta có km cách chọn $y \in E$. Với mỗi cách chọn x và y như trên, ta có k cách chọn $z \in E$ sao cho $x+y+z:m$. Do đó $|B| = km \cdot km \cdot k = k^3 m^2$.

- . *Tính $|C|$.* Đặt

$$X = \{(x, y, z) | x \in D, y \in E, z \in E, x+y+z:m\},$$

$$Y = \{(x, y, z) | y \in D, x \in E, z \in E, x+y+z:m\},$$

$$Z = \{(x, y, z) | z \in D, x \in E, y \in E, x+y+z:m\}.$$

Khi đó $C = X \cup Y \cup Z$. Do đó

$$|C| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Tương tự

$$|X| = |Y| = |Z| = 2k^2 m, |X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 4k,$$

$$|X \cap Y \cap Z| = \tau(m) = \begin{cases} 2^{4-m} & \text{với } m = 1, 2, 3 \\ 1 & \text{với } m > 3 \end{cases} \quad (*)$$

Do đó: $|C| = 6k^2m - 12k + \tau(m)$. Thay $k = \frac{n+2}{m}$ được

$$|A| = |B| - |C| = \frac{n^3 + 8}{m} - \tau(m) \text{ với } \tau(m) \text{ xác định bởi } (*). \quad \square$$

1.3 Nguyên lý Dirichlet

Định lý 1.3.1 [Nguyên lý lồng-chim] Giả sử dùng n chiếc lồng để nhốt tất cả r con chim Bồ câu với $r > n$. Khi đó có chiếc lồng phải nhốt ít nhất $\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil$ con chim.

Chứng minh: Giả sử không có chiếc lồng nào nhốt nhiều hơn hoặc bằng $\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil$ con chim, có nghĩa: Mỗi lồng nhốt nhiều nhất là $\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil - 1$ con chim. Vì $\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \leq \frac{r}{n} + 1$ nên $\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil - 1 < \frac{r}{n}$. Khi đó tổng số chim được nhốt hết trong n lồng nhiều nhất là $n \left(\left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil - 1 \right) < n \frac{r}{n} = r$: mâu thuẫn. $\square$

Nguyên lý này được vận dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau để chỉ ra sự tồn tại một đối tượng với tính chất nào đó. Cái khó của việc vận dụng nguyên lý này là trong bài toán đang xét thì cái gì được coi là Lồng và cái gì được coi là chim Bồ câu.

Ví dụ 1.3.2. *Tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5 .*

Bài giải: Cho k lần lượt lấy $10^5 + 1$ giá trị liên tiếp từ 1 trở đi ta được $10^5 + 1$ giá trị khác nhau của $1983^k - 1$. Chia $10^5 + 1$ số này cho 10^5 , ta có nhiều nhất là 10^5 số dư. Theo Nguyên lý Dirichlet phải có ít nhất 2 số cho cùng số dư khi chia cho 10^5 . Giả sử đó là hai số $1983^m - 1$ và $1983^n - 1, m > n$. Thế thì hiệu hai số này phải chia hết cho 10^5 :

$$(1983^m - 1) - (1983^n - 1) = 1983^n(1983^{m-n} - 1):10^5.$$

Nhưng $(1983, 10^5) = 1$ nên phải có $(1983^{m-n} - 1):10^5$. Như vậy ta tìm được $k = m - n$, đó là điều phải chứng minh. Nếu áp dụng Định lý Euler ta tìm được cụ thể $k = 4 \cdot 10^4$ $\square$

Ví dụ 1.3.3. *Cho số nguyên dương m không là bội của 2 và 5. Chứng minh rằng luôn tìm được một số gồm toàn chữ số 1 chia hết cho m .*

Bài giải: Ta sẽ chứng tỏ trong các số $1; 11; \dots; \underbrace{11\dots 1}_m$ có ít nhất một số chia hết cho m . Gọi $r_1, r_2, \dots, r_m$ là các dư của các số trên cho m . Nếu có số dư nào bằng 0 thì bài toán được chứng minh. Nếu các số dư đều khác 0 thì vì $m > r_i, \forall i = \overline{1, m}$, từ số số dư nhiều hơn số giá trị chúng có thể lấy nên suy ra: $r_i = r_k, i > k$. Như thế số $\underbrace{11\dots 1}_i - \underbrace{11\dots 1}_k = \underbrace{11\dots 1}_{i-k} \cdot 10^k$ sẽ chia hết cho m . Theo giả thiết $(m, 10^k) = 1$, do đó số $\underbrace{11\dots 1}_{i-k} : m$. $\square$

Ví dụ 1.3.4. Cho số nguyên dương $n > 1$ và dãy số nguyên dương $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < a_{n+2} \leq 3n$. Chứng minh rằng, luôn tìm được hai số p, q với $1 \leq p < q \leq n+2$ để $n < a_q - a_p < 2n$.

Bài giải: Với số nguyên không âm h ta đặt $b_k = a_k + h$. Khi đó $a_i - a_j = b_i - b_j$ với mọi i, j . Chọn h sao cho $b_{n+2} = 3n$. Xét dãy:

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{n+1} < b_{n+2} = 3n.$$

Nếu có r để $n < b_r < 2n$ thì $n < b_{n+2} - b_r < 2n$. Nếu không tồn tại r nào để $n < b_r < 2n$ thì ta xét n cặp $(1, 2n), (2, 2n+1), (3, 2n+2), \dots, (n, 3n-1)$. Ta thấy ngay các $b_k, k < n+2$, là các thành phần của n cặp này. Vì có $n+1$ số b_k và n cặp số như trên nên theo Nguyên lý Dirichlet có cặp p, q với $1 \leq p < q < n+2$ để $n < b_q - b_p < 2n$. Do đó luôn tìm được hai số p, q với $1 \leq p < q \leq n+2$ để $n < a_q - a_p < 2n$. $\square$

Ví dụ 1.3.5. Cho dãy số nguyên dương $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ thỏa mãn $a_{n+1} \leq 2n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên dương n luôn tìm được hai số p, q để $a_p - a_q = n$.

Bài giải: Ta có n nhóm $(1, n+1), (2n+2), \dots, (n, 2n)$. Vì $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} \leq 2n$ nên trong số $n+1$ số hạng k phải có hai số hạng rơi vào cùng một nhóm, có nghĩa: $(a_p, a_q) = (n+k, k)$ hay $a_p - a_q = n$. $\square$

Ví dụ 1.3.6. Chứng minh rằng, với 2010 số nguyên phân biệt lấy tùy ý từ tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 2009^{2010}\}$ luôn tồn tại hai số nguyên a và b thỏa mãn $0 < |\sqrt[2010]{a} - \sqrt[2010]{b}| < 1$.

Bài giải: Đánh số và sắp xếp các số được lấy là $a_1 > a_2 > \dots > a_{2010}$. Xét 2009 số sau đây: $b_k = \sqrt[2010]{a_k} - \sqrt[2010]{a_{k+1}}$ với $k = 1, 2, \dots, 2009$. Nếu:

$b_1, b_2, \dots, b_{2009} \geq 1$ thì:

$$2009 \leq b_1 + b_2 + \dots + b_{2009} = \sqrt[2010]{a_1} - \sqrt[2010]{a_{2010}} < \sqrt[2010]{a_1}.$$

Do vậy $a_1 > 2009^{2010}$: mâu thuẫn. Vậy ta dẫn tới điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 1.3.7. Cho 2010 hình chữ nhật với độ dài các cạnh là những số nguyên a, b mà $100 \geq a \geq b \geq 1$. Hình chữ nhật với độ dài các cạnh (a, b) được gọi là chứa được trong hình chữ nhật với độ dài các cạnh (c, d) nếu $c \geq a, d \geq b$. Khi đó có ít nhất 41 hình chữ nhật lần lượt chứa được nhau.

Bài giải: Ta chia 2010 hình chữ nhật này ra làm 50 lớp

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(100, b_1) \mid 100 \geq b_1 \geq 1\} \cup \{(a_1, 1) \mid 100 \geq a_1 \geq 1\} \\ \{(99, b_2) \mid 99 \geq b_2 \geq 2\} \cup \{(a_2, 2) \mid 99 \geq a_2 \geq 2\} \\ \{(98, b_3) \mid 98 \geq b_3 \geq 3\} \cup \{(a_3, 3) \mid 98 \geq a_3 \geq 3\} \\ \dots \\ \{(52, b_{49}) \mid 52 \geq b_{49} \geq 49\} \cup \{(a_{49}, 49) \mid 52 \geq a_{49} \geq 49\} \\ \{(51, b_{50}) \mid 51 \geq b_{50} \geq 50\} \cup \{(50, 50)\}. \end{array} \right.$$

Hình chữ nhật (a, b) thuộc một trong 50 lớp trên và các hình chữ nhật thuộc cùng một lớp thì chứa nhau. Do số hình chữ nhật là 2010 phân vào 50 lớp, nên phải có ít nhất một lớp chứa nhiều hơn 40 hình chữ nhật. $\square$

Ví dụ 1.3.8. Cho dãy 9 số tự nhiên dương phân biệt sao cho mỗi số nguyên đó không có ước nguyên tố nào khác 3, 5 và 7. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong 9 số đã cho ở trên thỏa mãn điều kiện tích của chúng là một số chính phương.

Bài giải: Theo giả thiết, dãy 9 số nguyên dương phân biệt có dạng $3^a 5^b 7^c$ với a, b, c nguyên, không âm. Kí hiệu hình thức cho số $x = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ chẵn} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ lẻ.} \end{cases}$

Khi đó bộ ba số nguyên $(a; b; c)$ thuộc tập T gồm 8 phần tử dưới đây:

$$\{(0; 0; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 0), (1; 0; 1), (1; 1; 0), (1; 1; 1)\}.$$

Vì dãy 9 số nguyên dương đã cho là phân biệt nên có 9 bộ ba số nguyên phân biệt $(a; b; c)$. Vậy có 2 bộ số nguyên phân biệt $(a; b; c)$ và $(a'; b'; c')$ tương ứng cùng một phần tử thuộc T theo Nguyên lý Dirichlet. Từ đây suy ra tích $3^a 5^b 7^c \cdot 3^{a'} 5^{b'} 7^{c'}$ là một số chính phương. $\square$

Ví dụ 1.3.9. Cho dãy 17 số tự nhiên dương phân biệt sao cho mỗi số nguyên đó không có ước nguyên tố nào khác 3, 5, 7 và 19. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong 17 số trên thỏa mãn điều kiện tích của chúng là một số chính phương.

Bài giải: Theo giả thiết, dãy 17 số nguyên dương phân biệt có dạng $3^a 5^b 6^c 19^d$ với a, b, c, d nguyên, không âm. Đặt $E = \{0, 1\}$ và kí hiệu

hình thức cho số nguyên $x = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ chẵn} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ lẻ.} \end{cases}$ Khi đó bộ 4 số nguyên

$(a; b; c; d)$ thuộc tập 16 phần tử $E^4 = E \times E \times E \times E$. Vì dãy 17 số nguyên dương đã cho là phân biệt nên có 17 bộ 4 số nguyên phân biệt $(a; b; c; d)$. Vậy có 2 bộ số nguyên phân biệt $(a; b; c; d)$ và $(a'; b'; c'; d')$ tương ứng cùng một phần tử thuộc E^4 theo Nguyên lý Dirichlet. Từ đây suy ra tích $3^a 5^b 7^c 19^d \cdot 3^{a'} 5^{b'} 7^{c'} 19^{d'}$ là một số chính phương. $\square$

Ví dụ 1.3.10. Cho dãy số nguyên tố bất kì

$$p_1 = 2, p_2 \geq 3, p_{n+1} - p_n \geq 2, n \geq 1.$$

Đặt $s_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Chứng minh rằng khi đó giữa s_n và s_{n+1} có ít nhất một số chính phương với mọi n nguyên dương.

Bài giải: Giả sử có n để giữa s_n và s_{n+1} không có một số chính phương nào. Khi đó có k để $k^2 \leq s_n < s_{n+1} \leq (k+1)^2, (*)$. Vậy

$$p_{n+1} = s_{n+1} - s_n \leq (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

và suy ra $p_n \leq p_{n+1} - 2 \leq 2k - 1$. Ta có dãy bất đẳng thức

$$\begin{cases} p_{n+1} \leq 2k + 1 \\ p_n \leq 2k - 1 \\ p_{n-1} \leq 2k - 3, \\ p_{n-2} \leq 2k - 5 \\ \dots \\ p_{n+1-i} \leq 2k + 1 - 2i := x. \end{cases}$$

Do $p_1 = 2$ và x lẻ, nên $x \geq 3$. Nếu $x = 3$ thì tất cả các bất phương trình phải trở thành phương trình. Khi đó:

$$s_{n+1} = 2 + p_2 + \dots + p_{n+1} > 1 + 3 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

mâu thuẫn với (*). Nếu $x \geq 5$ thì $x - 2 \geq 3$ và

$$s_n = 2 + p_2 + \cdots + p_n < 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2,$$

cũng mâu thuẫn với (*). Vậy không có x thỏa mãn dãy bất đẳng thức. $\square$

Ví dụ 1.3.11. Cho số nguyên $n \geq 1$. Chứng minh rằng, trong số $2n + 1$ số nguyên bất kỳ và khác với môđun không vượt quá $2n - 1$ thì có thể tìm thấy ba số với tổng bằng 0.

Bài giải: Quy nạp theo số nguyên $n \geq 1$. Với $n = 1$ kết luận hiển nhiên đúng vì ba số đó là $-1, 0, 1$.

Giả sử kết luận đúng cho $n = k - 1, k \geq 2$. Xét tập bất kỳ A bao gồm từ $2k + 1$ số nguyên với môđun không vượt quá $2k - 1$. Nếu trong số đó có $2k - 1$ số nguyên với môđun không vượt quá $2k - 3$ thì kết luận là đúng theo giả thiết quy nạp.

Xét trường hợp khác: Trong A hoặc chứa $2k - 1, 2k - 2, -2k + 1, (1)$, hoặc chứa $2k - 1, 2k - 2, -2k + 2, (2)$.

Trường hợp (1) : Với các cặp $(1, 2k - 2), (2, 2k - 3), (3, 2k - 4), \dots, (k - 1, k)$ và các cặp $(0, -2k + 1), (-1, -2k + 2), (-2, -2k + 3), \dots, (-k + 1, -k)$. Ta thấy ngay có tối thiểu một cặp bao gồm từ những số xuất hiện trong A . Vậy cặp $(h, 2k - h - 1)$ và $-2k + 1$ thỏa mãn tổng của chúng bằng 0. Trường hợp (2) : Với các cặp $(1, 2k - 3), (2, 2k - 4), (3, 2k - 5), \dots, (k - 2, k)$ và các cặp $(0, -2k + 1), (-1, -2k + 2), (-2, -2k + 3), \dots, (-k + 1, -k)$. Vậy cặp $(-h, -2k + h + 1)$ và $2k - 1$ thỏa mãn tổng của chúng bằng 0. $\square$

Ví dụ 1.3.12. Giả sử tập các số nguyên dương được phân ra thành r tập không giao nhau: $\mathbb{N}^+ = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$ với $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Chứng minh rằng tồn tại i để A_i có tính chất: Tồn tại số nguyên dương n để sao cho với bất kỳ k luôn tìm được các số $a_1, \dots, a_k \in A_i$ thỏa mãn $0 < a_{j+1} - a_j \leq n, 1 \leq j \leq k - 1$.

Bài giải: Nếu A_1 không có tính chất đã nêu ra thì với số nguyên dương bất kỳ n có thể tìm thấy $k > 0$ sao cho bất kỳ dãy $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ trong A_1 đều có j với $a_{j+1} - a_j > n$. Phần bù của A_1 trong $\mathbb{N}^+$ là $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r$ có một dãy các số nguyên liên tiếp dài tùy ý, vì với n bất kỳ có dãy $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ trong A_1 sao cho có j để $a_{j+1} - a_j > n$. Vậy các số nằm giữa a_j và a_{j+1} là ở trong $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r$ có độ dài tùy ý $\square$

Ví dụ 1.3.13. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n đủ lớn luôn luôn tồn tại hai cặp số cộng a_1, a_2, a_3 và b_1, b_2, b_3 các số nguyên dương thỏa mãn $n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Chứng minh rằng khi $a_1 = b_1 = 1$ thì có nhiều vô hạn số tự nhiên n không thể biểu diễn được thành dạng $n = 1.1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Bài giải: Xét $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$ và $b_1 = a, b_2 = a + b, b_3 = a + 2b$. Giả sử $n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Khi đó $n = 2a + 3(a + b) + 4(a + 2b) = 9a + 11b$. Vì $(9, 11) = 1$ nên, theo Định lý Euclide, với số tự nhiên n đủ lớn luôn luôn tồn tại số nguyên dương a, b để có biểu diễn $n = 9a + 11b$. Chú ý rằng, từ $9.5 - 11.4 = 1$ và biểu diễn $n = 11r + s$ với $1 \leq s \leq 10$ ta suy ra

$$n = 11r + s(9.5 - 11.4) = 9.5s + 11.(r - 4s) = 9a + 11b.$$

Vậy, ta chỉ cần xét n đủ lớn để $r > 4s$ là đủ, chẳng hạn $n > 11.41$. Từ $n = 1 + (1 + x)(1 + y) + (1 + 2x)(1 + 2y)$ suy ra $5n - 6 = (5x + 3)(5y + 3)$. Vì x, y nguyên dương nên $5x + 3, 5y + 3$ không bao giờ bằng 1. Như vậy, $5n - 6$ là hợp số. Nếu $5n - 6$ là số nguyên tố thì không thể có biểu diễn $n = 1 + (1 + x)(1 + y) + (1 + 2x)(1 + 2y)$ với x, y nguyên dương. Do $(5, 6) = 1$ nên có nhiều vô hạn số nguyên dương n để $5n - 6$ là số nguyên tố theo Nguyên lý Dirichlet. Tóm lại, có nhiều vô hạn số tự nhiên n không thể biểu diễn được thành dạng $n = 1 + a_2b_2 + a_3b_3$. $\square$

1.4 Nguyên lý lùi dần

Nguyên lý lùi dần là một phương pháp do Piere de Fermat đưa ra khi giải phương trình nghiệm nguyên. Xét phương trình $f(x, y, z) = 0$ trong $\mathbb{Z}$. Giả sử $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$ là nghiệm của phương trình $f(x, y, z) = 0$. Dựa vào giả thiết để suy ra $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{Z}^3$ là nghiệm của phương trình $f(x, y, z) = 0$ với $|x_0| > |x_1|$. Chẳng hạn, lặp lại ta được dãy $|x_0| > |x_1| > |x_2| > \dots$. Sau một số hữu hạn bước, ta đi đến lời giải phương trình. Cái khó của dạng toán này là với bài toán đã cho phải xây dựng được một phép chuyển từ bộ nọ đến bộ kia để lùi. Nguyên lý lùi dần đã và đang được vận dụng để xét các bài toán trong nhiều lĩnh vực. Tương tự ta cũng có Nguyên lý tăng dần.

Ví dụ 1.4.1. Giải phương trình: $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ trong $\mathbb{Z}$.

Bài giải: Hiển nhiên $(0, 0, 0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình. Xét $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$ hoặc $z \neq 0$, chẳng hạn $x \neq 0$. Giả sử (x, y, z)

là một nghiệm nguyên của phương trình đã cho. Đặt $d = (x, y, z)$ và $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$. Khi đó $(x_1, y_1, z_1) = 1$. Từ $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ suy ra $x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0$. Vậy $x_1 = 2x_2$ với $x_2 \in \mathbb{Z}$ và ta lại có $y_1 = 2y_2$ với $y_2 \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra $z_1 = 2z_2$ với $z_2 \in \mathbb{Z}$. Như vậy $(x_1, y_1, z_1) > 1$: mâu thuẫn. Tóm lại, phương trình đã cho có đúng một nghiệm $(0, 0, 0)$. $\square$

Ví dụ 1.4.2. Giải phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ trong $\mathbb{Z}$.

Bài giải: Hiển nhiên $(0, 0, 0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình. Ta thấy x, y, z không thể cùng lẻ. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm nguyên của phương trình đã cho với $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$ hoặc $z \neq 0$, chẳng hạn $x \neq 0$. Đặt $d = (x, y, z)$ và $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$. Khi đó $(x_1, y_1, z_1) = 1$. Từ $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ suy ra $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2dx_1y_1z_1$, và như vậy x_1, y_1, z_1 không thể cùng lẻ. Dễ dàng suy ra $x_1 = 2x_2, y = 2y_2, z = 2z_2$ với $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}$ hay $(x_1, y_1, z_1) > 1$: mâu thuẫn. Tóm lại, phương trình đã cho có đúng một nghiệm $(0, 0, 0)$. $\square$

Mệnh đề 1.4.3. Chứng minh rằng phương trình: $x^4 + y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên x, y, z khác 0.

Chứng minh: Hiển nhiên, nếu (x, y, z) là nghiệm thì $(-x, -y, -z)$ cũng là nghiệm. Do vậy, ta chỉ cần xét $x, y, z > 0$. Trước tiên xét phương trình Pythagore: $x^2 + y^2 = z^2$. Ta biết $(\ell) : x^2 + y^2 = 1$ có không điểm tổng quát $(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1})$ với t là một biến mới. Khi cho $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ với $(m, n) = 1$ ta có ngay nghiệm $\{(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2) | (n, m) = 1\}$ hoặc $\{(n^2 - m^2, 2mn, n^2 + m^2) | (n, m) = 1\}$. Tập tất cả các bộ ba Pythagore nguyên thủy của $x^2 + y^2 = z^2$ là hợp của $\{(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)\}$ và $\{(n^2 - m^2, 2mn, n^2 + m^2)\}$ với $m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1$ và $n > m \geq 1$ khác tính chẵn lẻ.

Giả sử phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ có nghiệm nguyên x, y, z khác 0. Ta có thể giả sử x, y, z là các số nguyên dương. Ta cũng có thể giả sử $(x, y) = 1$. Thật vậy, nếu $(x, y) = d$ thì $x = dx_1, y = dy_1$ với $(x_1, y_1) = 1, x_1, y_1$ nguyên dương. Vì $x^4 + y^4 = z^2$ nên $d^4x_1^4 + d^4y_1^4 = z^2$, do đó $d^4 | z^2$, suy ra $d^2 | z$. Đặt $z = d^2z_1$, khi đó ta có: $x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$.

Ta nhận được nghiệm của phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ với $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ và $(x_1, y_1) = 1$.

Ta giả sử nghiệm nguyên dương của phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ là x_0, y_0, z_0 với $(x_0, y_0) = 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại nghiệm nguyên dương khác của

phương trình gồm các số x_1, y_1, z_1 trong đó $(x_1, y_1) = 1$ và $z_1 < z_0$. Thật vậy, vì $x_0^4 + y_0^4 = z_0^4$ nên $\{x_0^2, y_0^2, z_0\}$ và $(x_0, y_0) = 1$ một bộ ba số Pithagore nguyên thủy. Theo Định lý Pithagore, tồn tại số nguyên dương m, n sao cho $(m, n) = 1, m \not\equiv n \pmod{2}$ và $x_0^2 = m^2 - n^2, y_0^2 = 2mn, z_0 = m^2 + n^2$ trong đó ta xem y_0^2 là số chẵn (Nếu cần ta đổi vai trò của x_0 và y_0).

Ta lại có $x_0^2 + n^2 = m^2$ và do $(m, n) = 1$ nên $\{x_0, m, n\}$ lại là một bộ ba số Pithagore nguyên thủy. Theo kết quả trên, tồn tại các số nguyên dương r, s sao cho $(r, s) = 1, r \not\equiv s \pmod{2}$ và $x_0^2 = r^2 - s^2, n = 2rs, m = r^2 + s^2$. Vì m lẻ và $(m, n) = 1$, ta có $(m, 2n) = 1$. Do $y_0^2 = (2n)m$ nên tồn tại số nguyên dương z_1, t sao cho $m = z_1^2, 2n = t^2$. Vì t^2 chẵn nên t chẵn tức $t = 2v$, v là số nguyên dương, nên $v^2 = \frac{n}{2} = rs$. Lại do $(r, s) = 1$ nên tồn tại các số nguyên dương x_1, y_1 sao cho $r = x_1^2, s = y_1^2$. Suy ra $x_1^4 + y_1^4 = z_1^4$ trong đó x_1, y_1, z_1 là các số nguyên dương với $(x_1, y_1) = 1$.

Hơn nữa, ta có $z_1 < z_0$, vì $z_1 \leq z_1^4 = m^2 < m^2 + n^2 = z_0$. Do nguyên lý sắp thứ tự tốt, trong các nghiệm nguyên dương x_0, y_0, z_0 với $(x_0, y_0) = 1$ ta chọn nghiệm có z_0 nhỏ nhất. Theo chứng minh trên, ta chỉ ra nghiệm nguyên dương x_1, y_1, z_1 với $(x_1, y_1) = 1$ và $z_1 < z_0$. Từ đó suy ra mâu thuẫn. $\square$

Hệ quả 1.4.4. Phương trình $F_4 : x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên x, y, z đều khác 0.

Ví dụ 1.4.5. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x, y, z \in \mathbb{Q} \\ x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0. \end{cases}$$

Bài giải: Đặt $u = 2x + 3, v = 2y + 3, w = 2z + 3$. Khi đó $u^2 + v^2 + w^2 = 7$. Nếu phương trình này có nghiệm hữu tỷ thì phương trình $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ phải có nghiệm nguyên a, b, c, d với $d \neq 0$. Giả sử a, b, c, d là nghiệm nguyên với $|a| + |b| + |c| + |d|$ là nhỏ nhất. Xét phương trình:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2 \pmod{4}.$$

Vì mỗi số chính phương sẽ đồng dư 0 hoặc 1 theo modulo 4 nên khi d là số chẵn thì a, b, c cũng phải chẵn. Khi đó $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d}{2}$ là nghiệm của phương trình $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$, nhưng mâu thuẫn với điều kiện $|a| + |b| + |c| + |d|$ là nhỏ nhất. Nếu d lẻ thì a, b, c cũng phải là số lẻ.

Giả sử $a = 2u + 1, b = 2v + 1, c = 2w + 1$ và $d = 2t + 1$. Ta có $u(u + 1) + v(v + 1) + w(w + 1) = 7t(t + 1) + 1$: mâu thuẫn. Tóm lại, hệ đã cho vô nghiệm. $\square$

Ví dụ 1.4.6. *Giải phương trình: $6x^3 + 12y^3 + 2010xyz = 2011z^3$ trong $\mathbb{Z}$.*

Bài giải: Hiển nhiên $(0, 0, 0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình. Xét $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$ hoặc $z \neq 0$, chẳng hạn $x \neq 0$. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm nguyên của phương trình đã cho. Đặt $d = (x, y, z)$ và $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$. Khi đó $(x_1, y_1, z_1) = 1$. Từ $6x_1^3 + 12y_1^3 + 2010x_1y_1z_1 = 2011z_1^3$ suy ra z_1 chẵn. Tiếp tục suy ra x_1 chẵn và y_1 chẵn. Như vậy $(x_1, y_1, z_1) > 1$: mâu thuẫn. Tóm lại, phương trình đã cho có đúng một nghiệm $(0, 0, 0)$. $\square$

Ví dụ 1.4.7. *Không thể vẽ được đa giác đều n đỉnh với $n = 5$ hoặc $n \geq 7$ có tọa độ nguyên.*

Bài giải: Trước tiên nhận xét: Nếu ba điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ có tọa độ nguyên thì điểm thứ tư $D(x_4 = x_1 + x_3 - x_2; y_4 = y_1 + y_3 - y_2)$ có tọa độ nguyên để $ABCD$ là một hình bình hành.

Xét trường hợp $n = 5$. Giả thiết $ABCDE$ là ngũ giác đều với 5 đỉnh có tọa độ nguyên. Với 5 đường chéo của ngũ giác $ABCDE$ ta được 5 hình bình hành với các đỉnh đều có tọa độ nguyên theo nhận xét trên là $ABCM, BCDN, CDEP, DEAQ, EABR$. Như vậy, có tiếp ngũ giác đều $MNPQR$ với 5 đỉnh có tọa độ nguyên nằm trong ngũ giác $ABCDE$. Tiếp tục như vậy, chúng ta đã dựng được một dãy các ngũ giác đều với tọa độ các đỉnh nguyên lần lượt chứa trong ngũ giác $ABCDE$. Nhưng trong $ABCDE$ chỉ có một số hữu hạn điểm nguyên. Vậy không thể có ngũ giác đều mà các đỉnh có tọa độ nguyên.

Xét trường hợp $n \geq 7$. Giả sử đa giác đều $A_1A_2A_3 \dots A_n$ có tọa độ các đỉnh nguyên. Lần lượt dựng các hình bình hành $A_1A_2A_3B_1, A_2A_3A_4B_2, \dots, A_nA_1A_2B_n$ đều có tọa độ các đỉnh nguyên. Lặp lại, sẽ xây dựng được một dãy các n giác đều với tọa độ các đỉnh nguyên lần lượt chứa nhau trong n giác đều $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Nhưng trong $A_1A_2A_3 \dots A_n$ chỉ có một số hữu hạn điểm nguyên. Vậy không thể có n giác đều mà các đỉnh có tọa độ nguyên. $\square$

Ví dụ 1.4.8. *Có 10 số thuộc khoảng $(10; 149)$. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 số là số đo độ dài 3 cạnh một tam giác.*

Bài giải: Ký hiệu 10 số đó là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, a_{10}$. Không hạn chế có thể coi $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_9 \leq a_{10}$. Giả sử không có 3 số nào từ tập $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, a_{10}\}$ thỏa mãn kết luận. Khi đó $a_{10} > a_9 + a_8$, $a_9 > a_8 + a_7$, $\dots$, $a_4 > a_3 + a_2$ và $a_3 > a_2 + a_1$. Từ các bất đẳng thức này ta suy ra

$$a_9 > a_1 + 2a_2 + a_3 + \dots + a_7 > 80$$

$$a_8 > a_1 + 2a_2 + a_3 + \dots + a_6 > 70.$$

Từ đây suy ra $a_{10} > a_9 + a_8 > 150$: vô lý. Vậy luôn luôn tồn tại 3 số là số đo độ dài 3 cạnh một tam giác. $\square$

Ví dụ 1.4.9. Chứng minh rằng có nhiều vô hạn số nguyên tố dạng $6n + 5$.

Bài giải: Giả sử số các số nguyên tố dạng $6n + 5$ là hữu hạn, chẳng hạn $p_1 = 5, p_2 = 11, \dots, p_r$ với số lớn nhất là p_r . Xét $q = 6p_r! - 1$ cũng là một số tự nhiên dạng $6n + 5$. Do vậy q sẽ có ước nguyên tố dạng $6n + 5$, chẳng hạn ước nguyên tố p . Vì $p_1, \dots, p_r$ không là ước của p nên $p \neq p_k$ với $k = 1, 2, \dots, r$. Vậy $p > p_r$: mâu thuẫn. Do đó có nhiều vô hạn số nguyên tố dạng $6n + 5$. $\square$

Ví dụ 1.4.10. Chứng minh rằng với số tự nhiên $n \geq 1$ thì $2n$ điểm phân biệt bất kì trong mặt phẳng (P) sẽ là đầu mút của n đoạn thẳng không cắt nhau.

Bài giải: Kẻ n đoạn thẳng với các đầu mút là $2n$ điểm đã cho. Nếu n đoạn này không có hai đoạn nào cắt nhau thì bài toán đã được giải xong. Nếu n đoạn này có hai đoạn cắt nhau thì ta xét phép toán f : Thế hai đoạn cắt nhau AB và CD bởi hai đoạn không cắt nhau là AC và BD . Vì $ABCD$ là tứ giác lồi nên $AB + CD > AC + BD$. Do đó tổng độ dài n đoạn nối trước lớn hơn tổng độ dài n đoạn nối sau mà trong đó $AB + CD$ được thay bằng $AC + BD$. Xét tập S gồm tất cả các tổng độ dài của n đoạn nối có thể có của $2n$ điểm đã cho. Hiển nhiên S là một tập hữu hạn. Xét một bộ gồm n đoạn nối như trên. Nếu n đoạn này không có hai đoạn nào cắt nhau thì bài toán đã được giải xong. Nếu n đoạn này có hai đoạn cắt nhau thì sử dụng phép toán f để loại bỏ hai đoạn cắt với bộ gồm n đoạn nối có tổng độ dài nhỏ hơn. Sau hữu hạn lần vận dụng f ta có một bộ gồm n đoạn nối với tổng độ dài các đoạn là nhỏ nhất. Bộ gồm n đoạn nối với tổng độ dài các đoạn nhỏ nhất sẽ là n đoạn thẳng không cắt nhau. $\square$

Ví dụ 1.4.11. Cho hai số nguyên m, n thỏa mãn $m \geq n \geq 2$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ là các biến nguyên dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Bài giải: Ký hiệu P là tập tất cả các bộ số nguyên dương $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$. Tập P là hữu hạn với lực lượng $\binom{m-1}{n-1}$. Ký hiệu S là tập tất cả các số $T = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ khi $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P$. Hiển nhiên S là một tập hữu hạn. Giả sử $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in P$ sao cho $T_z = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất trong S . Nếu có $z_i - z_j = a > 1$, chẳng hạn $z_2 - z_1 = a > 1$ thì thay $z = z_2 - 1$ và $z' = z_1 + 1$ ta vẫn có

$$z' + z + z_3 + \dots + z_n = z_1 + 1 + z_2 - 1 + z_3 + \dots + z_n = m$$

nhưng $z'^2 + z^2 = (z_1 + 1)^2 + (z_2 - 1)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2(z_2 - z_1 - 1) < z_1^2 + z_2^2$. Vậy bộ $(z', z, z_3, \dots, z_n) \in P$ với $z'^2 + z^2 + z_3^2 + \dots + z_n^2 < T_z$: mâu thuẫn. Từ kết luận này suy ra các số z_i chỉ hơn kém nhau 1 khi chúng khác nhau. Đổi chỉ số nếu cần thiết, ta có thể coi $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$ và $m = nk + d$ với $0 \leq d < n$. Bởi vì dãy không giảm nên có $z_1 = z_2 = \dots = z_{n-d} = k$ và $z_{n-d+1} = z_{n-d+2} = \dots = z_n = k + 1$. Vậy $T_{nn} = (n-d)k^2 + d(k+1)^2$. $\square$

Ví dụ 1.4.12. Cho bốn số a, b, c, d không phải tất cả bằng nhau. Xây dựng bốn dãy số $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ như sau: $a_0 = a - b, b_0 = b - c, c_0 = c - d, d_0 = d - a$. Giả sử đã có a_n, b_n, c_n, d_n và xét biến đổi

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n \\ c_{n+1} = c_n - d_n \\ d_{n+1} = d_n - a_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Với mỗi n đặt $x_n = \max\{|a_n|, |b_n|, |c_n|, |d_n|\}$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Bài giải: Hiển nhiên $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ và $x_n > 0$ với mọi $n \geq 0$. Đặt $t_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2, n \geq 0$. Khi đó $t_n > 0$ và

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \\ &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2t_n - 2(a_nb_n + b_nc_n + c_nd_n + d_na_n) \\ &= 2t_n - 2(a_n + c_n)(b_n + d_n). \end{aligned}$$

Vì $0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2(a_n + c_n)(b_n + d_n)$ nên $t_{n+1} = 2t_n + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \geq 2t_n$. Vậy $t_n \geq 2^n t_0$ với $t_0 > 0$ và suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$. Từ đó suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. $\square$

Ví dụ 1.4.13. Giải phương trình $x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4t^4)$ với $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$.

Bài giải: Hiển nhiên $x = y = z = t = 0$ là nghiệm của phương trình. Giả sử (x, y, z, t) là một nghiệm khác $(0, 0, 0, 0)$, ước chung lớn nhất $(x, y, z, t) = 1$. Từ phương trình suy ra $x = 2x_1$ với x_1 nguyên và $8x_1^4 + 2y^4 = z^4 + 4t^4$. Từ phương trình suy ra $z = 2z_1$ với z_1 nguyên và $4x_1^4 + y^4 = 8z_1^4 + 2t^4$. Từ phương trình suy ra $y = 2y_1$ với y_1 nguyên và $2x_1^4 + 8y_1^4 = 4z_1^4 + t^4$. Từ phương trình suy ra $t = 2t_1$ với t_1 nguyên và $x_1^4 + 4y_1^4 = 2(z_1^4 + 4t_1^4)$. Tóm lại $(x, y, z, t) : 2$. : điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy phương trình chỉ có một nghiệm $(0, 0, 0, 0)$. $\square$

Chương 2

Các vấn đề liên quan

Trong chương này chúng tôi trình bày ba vấn đề: phương pháp đại lượng bất biến, phủ một tập hợp và ứng dụng vào trong bài toán hình học tổ hợp.

2.1 Phương pháp đại lượng bất biến

Xét những bài toán mang cấu trúc một hệ thống mà trên đó ta phải xử lý những thao tác khác nhau ở từng mức độ. Vấn đề đặt ra: Có thể xác định được một vị trí nào đấy từ những vị trí đã biết?

Một công cụ rất mạnh để giải quyết những bài toán như vậy là xét một số tính chất trong hệ thống mà nó không thay đổi trong từng bước thực hiện thao tác. Tính chất không thay đổi như trên thường được xem như là bất biến. Ta đưa ra định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 2.1.1. Giả sử ta có một hệ thống (F) các đại lượng và các phép biến đổi theo thứ tự. Tính chất (P) được gọi là một *bất biến* sau s bước trong hệ thống (F) nếu cứ sau s bước biến đổi ta đều nhận lại được tính chất (P) .

Ví dụ 2.1.2. Xét dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ và (d_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{Z} \\ a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n \\ c_{n+1} = c_n - d_n \\ d_{n+1} = d_n - a_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Khi đó hãy chỉ ra

- (i) Không tồn tại bốn số nguyên ban đầu a_0, b_0, c_0, d_0 để sao cho $|a_nb_n - c_nd_n|$ hoặc $|a_nc_n - b_nd_n|$ hoặc $|a_nd_n - b_nc_n|$ là số nguyên tố khi $n \geq 4$.
- (ii) Chứng minh rằng $a_{2012}b_{2012}, b_{2012}c_{2012}, c_{2012}d_{2012}, d_{2012}a_{2012}$ đều chia hết cho 4^{503}

Bài giải: Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{cases} a_4 = 2(a_0 - 2b_0 + 3c_0 - 2d_0) \\ b_4 = 2(b_0 - 2c_0 + 3d_0 - 2a_0) \\ c_4 = 2(c_0 - 2d_0 + 3a_0 - 2b_0) \\ d_4 = 2(d_0 - 2a_0 + 3b_0 - 2c_0). \end{cases}$$

Như vậy, cứ sau bốn bước biến đổi ta đều nhận được những số nguyên chia hết cho 2. Từ đây suy ra các số nguyên $|a_nb_n - c_nd_n|$, $|a_nc_n - b_nd_n|$ và $|a_nd_n - b_nc_n|$ đều là những số nguyên chia hết cho 4 khi $n \geq 4$. Từ bất biến: cứ sau 4 bước nhận được số chia hết cho 2 suy ra $a_{2012}, b_{2012}, c_{2012}, d_{2012}$ đều chia hết cho 2^{503} . Do vậy $a_{2012}b_{2012}, b_{2012}c_{2012}, c_{2012}d_{2012}, d_{2012}a_{2012}$ đều chia hết cho 4^{503} . $\square$

Ví dụ 2.1.3. Xét dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ và (d_n) được xác định sau:

$$\begin{cases} a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{Z} \\ a_{n+1} = a_n - b_n + c_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n + d_n \\ c_{n+1} = c_n - d_n + a_n \\ d_{n+1} = d_n - a_n + b_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2012} - a_0, b_{2012} - b_0, c_{2012} - c_0, d_{2012} - d_0$ đều là những số nguyên chia hết cho 4.

Bài giải: Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{cases} a_4 = 21a_0 - 20b_0 + 20c_0 - 20d_0 \\ b_4 = 21b_0 - 20c_0 + 20d_0 - 20a_0 \\ c_4 = 21c_0 - 20d_0 + 20a_0 - 20b_0 \\ d_4 = 21d_0 - 20a_0 + 20b_0 - 20c_0. \end{cases}$$

Như vậy cứ sau bốn bước biến đổi ta đều nhận được ngay những số nguyên thỏa mãn tính chất $P : x_{k+4} \equiv x_k \pmod{4}$. Từ bất biến này suy ra $a_{2012} - a_0, b_{2012} - b_0, c_{2012} - c_0, d_{2012} - d_0$ đều là những số nguyên chia hết cho 4. $\square$

Ví dụ 2.1.4. Xét hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như dưới đây:

$$\begin{cases} a_0, b_0 \in \mathbb{R}, 0 < b_0 < a_0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{a_0 b_0}$.

Bài giải: Do bởi $a_0, b_0 > 0$ nên dễ dàng chỉ ra $a_n, b_n > 0$. Do bởi $(a_n + b_n)^2 \geq 4a_nb_n$, $a_n \neq b_n$, nên $a_n > b_n$ với mọi $n \geq 0$. Vì $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$ nên dãy (a_n) là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới nên tồn tại $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Bởi vì $b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} > b_n$ nên dãy (b_n) là dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên nên tồn tại $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Sử dụng tính chất bất biến $P : a_nb_n = a_{n+1}b_{n+1}$ và $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a + b}{2}$ ta nhận được $a = b = \sqrt{a_0 b_0}$. $\square$

Ví dụ 2.1.5. Với mỗi số nguyên dương n ta biểu diễn

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6},$$

trong đó $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{N}$. Khi đó hãy

- (i) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{a_n}$.
- (ii) Chứng minh rằng nếu n lẻ thì $a_n^2 - 3c_n^2$ chia hết cho 2^{n+1} .

Bài giải: (i) Khi biểu diễn

$$(x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} + t\sqrt{6})(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}) = A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6},$$

trong đó a, b, c, d, A, B, C, D và x, y, z, t nguyên, ta nhận được

$$\begin{aligned} A &= ax + 2by + 3cz + 6dt \\ B &= bx + ay + 3dz + 3ct \\ C &= cx + 2dy + az + 2bt \\ D &= dx + cy + bz + at. \end{aligned}$$

Vậy $(x - y\sqrt{2} + z\sqrt{3} - t\sqrt{6})(a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6}) = A - B\sqrt{2} + C\sqrt{3} - D\sqrt{6}$.
Đặc biệt, vận dụng trường hợp $t = 0$ ta có ngay

$$(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} - d_n\sqrt{6}.$$

Tương tự xét trường hợp khác, từ đây suy ra

$$\begin{aligned} x_1^n &= (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6} \\ x_2^n &= (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} - d_n\sqrt{6} \\ x_3^n &= (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{3} - d_n\sqrt{6} \\ x_4^n &= (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Do đó $4a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$, $4\sqrt{2}b_n = x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n$. Đây là tính chất bất biến để từ đó dễ dàng nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n}{x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tương tự có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

(ii) Từ trên suy ra

$$\begin{aligned} 2a_n + 2c_n\sqrt{3} &= (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^n \\ 2a_n - 2c_n\sqrt{3} &= (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

Vậy $4a_n^2 - 12c_n^2 = (2\sqrt{2})^n + (-2\sqrt{2})^n + (-4 - 2\sqrt{6})^n + (-4 + 2\sqrt{6})^n$. Khi n lẻ thì $4a_n^2 - 12c_n^2 = -2^n[(2 + \sqrt{6})^n + (2 - \sqrt{6})^n]$.

Do đó $a_n^2 - 3c_n^2 = -2^{n-1} \left[2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot 6 + \cdots + \binom{n}{n-1} 2 \cdot 6^{\frac{n-1}{2}} \right]$ chia hết cho 2^{n+1} . □

Ví dụ 2.1.6. Giả sử các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 1, d_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 2b_n + 5c_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n + 5d_n \\ c_{n+1} = a_n + c_n + 2d_n \\ d_{n+1} = b_n + c_n + d_n \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu n lẻ thì $a_n^2 - 10d_n^2$ chia hết cho 2^{n-1} , nhưng không chia hết cho 2^n .

Bài giải: Với mỗi số nguyên dương n ta biểu diễn

$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})^n = A_n + B_n\sqrt{2} + C_n\sqrt{5} + D_n\sqrt{10}$, với $A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathbb{N}$.
Hiển nhiên $A_1 = 1 = a_1, B_1 = 1 = b_1, C_1 = 1 = c_1, D_1 = 0 = d_1$. Từ
 $A_{n+1} + B_{n+1}\sqrt{2} + C_{n+1}\sqrt{5} + D_{n+1}\sqrt{10} = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})^{n+1}$ ta suy ra

$$A_{n+1} = a_{n+1}, B_{n+1} = b_{n+1}, C_{n+1} = c_{n+1}, D_{n+1} = d_{n+1}.$$

Tương tự bài trên đối với đồng nhất thức

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{10},$$

ta nhận được:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})^n &= a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{10} \\ (1 - \sqrt{2} + \sqrt{5})^n &= a_n - b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{5} - d_n\sqrt{10} \\ (1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})^n &= a_n + b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{5} - d_n\sqrt{10} \\ (1 - \sqrt{2} - \sqrt{5})^n &= a_n - b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} 2a_n + 2d_n\sqrt{10} &= (1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{2} - \sqrt{5})^n \\ 2a_n - 2d_n\sqrt{10} &= (1 - \sqrt{2} + \sqrt{5})^n + (1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})^n. \end{aligned}$$

Vậy, khi n lẻ thì:

$$4a_n^2 - 40d_n^2 = 2^n \left[(2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{2})^n - (1 + \sqrt{2})^n \right] \text{ hay}$$

$$\begin{aligned} a_n^2 - 10d_n^2 &= 2^{n-1} \left[(2^n - 1) \binom{n}{0} + (2^{n-2} \cdot 5 + (-1)^n \cdot 2) \binom{n}{2} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (2^{n-2k} \cdot 5^k + (-1)^n \cdot 2^k) \binom{n}{2k} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Vậy $a_n^2 - 10d_n^2$ chia hết cho 2^{n-1} , nhưng không chia hết cho 2^n . $\square$

Ví dụ 2.1.7. Xét dãy $(a_n), (b_n), (c_n)$ với $a_0 + b_0 + c_0 = \alpha$ và
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2} \\ b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2} \\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$
 với mọi $n \geq 0$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\alpha}{3}$.

Bài giải: Dễ thấy $a_n + b_n + c_n = \alpha$ với mọi n . Ta có

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{a_n - b_n}{2}, b_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{b_n - c_n}{2}.$$

Bằng quy nạp theo n , có

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}, b_{n+1} - c_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{b_0 - c_0}{2^{n+1}}.$$

Từ đây suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Mặt khác, lại có

$P : a_n + b_n + c_n = \alpha$ với mọi $n \geq 0$ và sử dụng bất biến P ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + c_n) = \alpha$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\alpha}{3}$. $\square$

Ví dụ 2.1.8. Đặt $(1 + 4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4})^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4}$ cho mọi n nguyên không âm và a_n, b_n, c_n nguyên. Chứng minh a_n chia cho 8 dư 1, còn b_n, c_n cùng chia hết cho 4.

Bài giải: Ta có biểu diễn sau đây:

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt[3]{2} + c_{n+1}\sqrt[3]{4} = (a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4})(1 + 4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4}).$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 8b_n + 8c_n \\ b_{n+1} = 4a_n + b_n - 8c_n \\ c_{n+1} = -4a_n + 4b_n + c_n \end{cases} \quad \text{và suy ra được } P: \begin{cases} a_{n+1} \equiv a_n \pmod{8} \\ b_{n+1} \equiv b_n \pmod{4} \\ c_{n+1} \equiv c_n \pmod{4}. \end{cases}$$

Từ $a_1 = 1, b_1 = 4, c_1 = -4$ và sử dụng tính chất P ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.1.9. Cho k là một số nguyên dương lớn hơn 1. Dãy số (a_n) được xác định như sau: $a_1 = 1$, còn a_n là số nguyên dương thứ n lớn hơn a_{n-1} và đồng dư với n theo môđun k . Tìm công thức tính a_n cho mọi n .

Bài giải: Theo giả thiết $a_1 \equiv 1 \pmod{k}$ và $a_n \equiv n \pmod{k}$, $a_n > a_{n-1}$ cho mọi n . Ta thấy số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn điều kiện này là $a_{n-1} + 1$. Số nguyên dương thứ n lớn hơn a_{n-1} và đồng dư với n theo môđun k chính là $a_n = a_{n-1} + 1 + (n-1)k$. Từ công thức này ta suy ra $a_n = \frac{n[2 + (n-1)k]}{2}$. $\square$

Ví dụ 2.1.10. Xét hai dãy số (a_n) và (b_n) :
$$\begin{cases} a_0 = 3, b_0 = -3 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = 4a_{n-1} + 3b_{n-1}, n \geq 1. \end{cases}$$

Khi đó hãy

(i) Tìm tất cả những số tự nhiên n để $\prod_{k=0}^n (b_k^2 + 9)$ là số chính phương.

(ii) Phân tích tiêu chuẩn cho tích các định thức $\prod_{k=0}^n \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ b_k & b_{k+1} \end{vmatrix}$.

Bài giải: (i) Biểu diễn $a_n + tb_n = (3+4t)a_{n-1} + (2+3t)b_{n-1}$. Chọn t sao cho $2+3t = t(3+4t)$ hay $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Như vậy đã tạo ra được bất biến $3+4t$ để $a_n + tb_n = (3+4t)(a_{n-1} + tb_{n-1})$ và có được $a_n + tb_n = (3+4t)^n(3-3t)$ với mọi $n \geq 0$ và nhận được hệ
$$\begin{cases} a_n + \frac{1}{\sqrt{2}}b_n = (3+2\sqrt{2})^n(3-3\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ a_n - \frac{1}{\sqrt{2}}b_n = (3-2\sqrt{2})^n(3+3\frac{1}{\sqrt{2}}), n \geq 0. \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra

$$\begin{cases} a_n = \frac{3(1+\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}-1) + 3(1-\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}} \\ b_n = \frac{3(1+\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}-1) - 3(1-\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}+1)}{2} \end{cases}$$

và được công thức

$$\begin{cases} a_n = \frac{3[(\sqrt{2}+1)^{2n-1} + (\sqrt{2}-1)^{2n-1}]}{2\sqrt{2}} \\ b_n = \frac{3[(\sqrt{2}+1)^{2n-1} - (\sqrt{2}-1)^{2n-1}]}{2} \end{cases}$$

với mọi $n \geq 0$. Từ
$$\begin{cases} a_n + \frac{1}{\sqrt{2}}b_n = (3 + 2\sqrt{2})^n(3 - 3\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ a_n - \frac{1}{\sqrt{2}}b_n = (3 - 2\sqrt{2})^n(3 + 3\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases}$$

suy ra $2a_n^2 = b_n^2 + 9$, như vậy $\prod_{k=0}^n (b_k^2 + 9) = 2^{n+1} \prod_{k=0}^n a_k^2$ là số chính phương khi và chỉ khi n là số tự nhiên lẻ

(ii) Dễ dàng chỉ ra $a_{s-1}b_s - a_sb_{s-1} = 18$ với $s \geq 1$. Vậy $\begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ b_k & b_{k+1} \end{vmatrix} = 18$. Sử dụng bất biến này sẽ nhận được $\prod_{k=0}^n \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ b_k & b_{k+1} \end{vmatrix} = 18^{n+1} = 2^{n+1}3^{2n+2}$. $\square$

Chú ý 2.1.11. Từ $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ ta có biểu diễn ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Như vậy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

và nhận được

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lấy định thức hai vế ta có $a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1} = 18$ với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.1.12.[VMO 2011] Dãy (a_n) xác định bởi
$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -1 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} + 5a_n \\ n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh $a_{2012} - 2010 : 2011$.

Bài giải: Dãy (b_n) được xác định như sau $b_0 = a_0 = 1, b_1 = a_1 = -1$ và $b_{n+2} = 6b_{n+1} + 2016b_n$ với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Hiển nhiên $a_n \equiv b_n \pmod{2011}$. Đặt $c_{n+1} = b_n$. Khi đó
$$\begin{cases} b_{n+1} = 6b_n + 2016c_n \\ c_{n+1} = b_n, n \geq 1 \\ b_1 = -1, c_1 = 1. \end{cases}$$

Như vậy $b_{n+1} + tc_{n+1} = 6b_n + 2016c_n + tb_n = (6+t)b_n + 2016c_n$. Chọn t sao cho $2016 = t(6+t)$. Giải ra $t_1 = 42, t_2 = -48$. Vậy đã tạo ra được

một bất biến $6 + t$ để $b_{n+1} + tc_{n+1} = (6 + t)(b_n + tc_n)$. Từ $b_{n+1} + tc_{n+1} = (6 + t)(b_n + tc_n) = \dots = (6 + t)^n(b_1 + tc_1)$ ta suy ra

$$\begin{cases} b_{n+1} - 48c_{n+1} = (-42)^n(-1 - 48) = -49(-42)^n \\ b_{n+1} + 42c_{n+1} = 48^n(-1 + 42) = 41.48^n. \end{cases}$$

Như thế $90c_{n+1} = 41.48^n + 49.(-42)^n$. Đặc biệt $90a_{2012} = 41.48^{2012} + 49.(-42)^{2012}$. Vì $48^{2010} \equiv 1 \equiv 42^{2010} \pmod{2011}$ theo Định lý Fermat nên

$$90a_{2012} \equiv 41.48^2 + 49.42^2 \equiv 41.293 - 49.247 \pmod{2011}.$$

Vậy $90a_{2012} \equiv 12013 - 12103 \equiv -90 \pmod{2011}$. Suy ra $a_{2012} - 2010 : 2011$. $\square$

Ví dụ 2.1.13. Cho dãy (a_n) với $a_0 = 2, a_1 = 89$ và $a_{n+2} = 89a_{n+1} - 9a_n$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a_{n+1}^2 - 89a_na_{n+1} + 9a_n^2 + 81.9^n : 1951 \text{ và } a_{1952} - 99 : 1951.$$

Bài giải: Dãy (b_n) được xác định như sau $b_0 = a_0 = 2, b_1 = a_1 = 89$ và $b_{n+2} = 89b_{n+1} - 1960b_n$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Đặt $c_{n+1} = b_n$. Khi đó

$$\begin{cases} b_{n+1} = 89b_n - 1960c_n \\ c_{n+1} = b_n, n \geq 1 \\ b_1 = 89, c_1 = 2. \end{cases}$$

Như vậy $b_{n+1} + tc_{n+1} = 89b_n - 1960c_n + tb_n = (89 + t)b_n - 1960c_n$. Chọn t sao cho $-1960 = t(89 + t)$. Giải ra $t_1 = -49, t_2 = -40$. Như vậy đã tạo ra được một bất biến $89 + t$ để $b_{n+1} + tc_{n+1} = (89 + t)(b_n + tc_n)$. Từ $b_{n+1} + tc_{n+1} = (89 + t)(b_n + tc_n) = \dots = (89 + t)^n(b_1 + tc_1)$ ta suy ra

$$\begin{cases} b_{n+1} - 49c_{n+1} = 40^n(89 - 49.2) = -9.40^n \\ b_{n+1} - 40c_{n+1} = 49^n(89 - 40.2) = 9.49^n. \end{cases}$$

Dễ dàng chỉ ra $a_n \equiv b_n \pmod{1951}$ và như thế

$$a_{n+1}^2 - 89a_na_{n+1} + 9a_n^2 + 81.9^n \equiv 0 \pmod{1951}.$$

Ta lại có $b_n = 40^n + 49^n$. Vì $40^{1950} \equiv 1 \equiv 49^{1950} \pmod{1951}$ theo Định lý Fermat nên $b_{1952} = 40^{1952} + 49^{1952} \equiv 40^2 + 49^2 \equiv 99 \pmod{1951}$.

Vậy $a_{1952} - 99 : 1951$. $\square$

Ví dụ 2.1.14. Cho dãy (a_n) với $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20$ và $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$ với mọi số nguyên $n \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại các số tự nhiên $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ để có biểu diễn $4^n \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^2 a_{n+1} = \prod_{k=1}^n (b_k^2 - 1)$.

Bài giải: Trước tiên ta chỉ ra $1 + 4a_n a_{n+1}$ là số chính phương với mỗi số tự nhiên dương n . Số $1 + 4a_1 a_2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 = 7^2 = (20 - 12 - 1)^2$ và $1 + 4a_2 a_3 = 1 + 4 \cdot 12 \cdot 20 = 961 = 31^2 = (63 - 20 - 12)^2$. Ta sẽ chỉ ra $1 + 4a_n a_{n+1} = b_n^2$ với $b_n = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$. Thật vậy, giả sử đã có $1 + 4a_n a_{n-1} = b_{n-1}^2$. Từ giả thiết suy ra $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = a_{n+1} + a_n - a_{n-1}$ hay $b_n = b_{n-1} + 2a_n$. Vậy

$$\begin{aligned} 1 + 4a_n a_{n-1} &= (b_n - 2a_n)^2 = b_n^2 - 4b_n a_n + 4a_n^2 \\ &= b_n^2 - 4a_n(a_{n+1} + a_n - a_{n-1}) + 4a_n^2 \\ &= b_n^2 - 4a_n a_{n+1} + 4a_n a_{n-1}. \end{aligned}$$

Do đó $1 + 4a_n a_{n+1} = b_n^2, (P)$.

Tiếp theo, ta chỉ ra $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Dễ dàng kiểm tra (a_n) là dãy số tự nhiên đơn điệu tăng. Từ $b_n = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = a_{n+1} + a_n - a_{n-1} > 0$ suy ra b_n là số tự nhiên dương với mỗi n . Do bởi

$$b_{n+1} - b_n = [a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1}] - [a_{n+2} - a_{n+1} - a_n] = 2a_{n+1} > 0$$

nên ta có $b_n < b_{n+1}$ với mỗi n và từ đó suy ra $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Sử dụng bất biến (P) có

$$4a_1 a_2 \cdot 4a_2 a_3 \cdots 4a_{n-1} a_n \cdot 4a_n a_{n+1} = (b_1^2 - 1)(b_2^2 - 1) \cdots (b_n^2 - 1)$$

$$\text{hay } 4^n \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^2 a_{n+1} = \prod_{k=1}^n (b_k^2 - 1). \quad \square$$

Ví dụ 2.1.15. Giả sử hai dãy số nguyên (a_n) và (b_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 8, a_2 = 58 \\ a_{n+2} = 8a_{n+1} - 3a_n - 3a_{n-1}, n \geq 2; \\ b_0 = 3, b_1 = 5, b_2 = 45 \\ b_{n+2} = 5b_{n+1} + 10b_n - 7b_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$$

Ta có $\binom{2011}{1} b_{2010} + \dots + \binom{2011}{2010} b_1 = \binom{2011}{1} a_{2010} - \binom{2011}{2} a_{2009} + \dots - \binom{2011}{2010} a_1$.

Bài giải: Xét phương trình $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3x + 3 = 0$. Gọi ba nghiệm của nó trong $\mathbb{C}$ là x_1, x_2, x_3 . Dễ dàng kiểm tra

$$x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = a_0, x_1 + x_2 + x_3 = a_1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_2,$$

tổng quát $a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \geq 0$. Tương tự $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n, n \geq 0$, trong đó y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của $g(y) = y^3 - 5y^2 - 10y + 7 = 0$. Bất biến ở đây là $a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ và $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n$ với $n \geq 0$. Kiểm tra trực tiếp được hai bất biến mới: $f(y+1) = g(y)$ và $g(x-1) = f(x)$. Vậy ta nhận được các hệ thức sau đây:

$$\begin{aligned} a_n &= x_1^n + x_2^n + x_3^n = (y_1 + 1)^n + (y_2 + 1)^n + (y_3 + 1)^n \\ b_n &= y_1^n + y_2^n + y_3^n = (x_1 - 1)^n + (x_2 - 1)^n + (x_3 - 1)^n, n \geq 0. \end{aligned}$$

Do vậy $\begin{cases} a_n = C_n^0 b_n + C_n^1 b_{n-1} + \dots + C_n^{n-1} b_1 + C_n^n b_0 \\ b_n = C_n^0 a_n - C_n^1 a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_1 + (-1)^n C_n^n a_0 \end{cases}$ và

$$\binom{2011}{1} b_{2010} + \dots + \binom{2011}{2010} b_1 = \binom{2011}{1} a_{2010} - \binom{2011}{2} a_{2009} + \dots - \binom{2011}{2010} a_1. \quad \square$$

Ví dụ 2.1.16. Ba dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ xác định bởi phương trình sau:

$$\begin{cases} a_0 = 12, b_0 = 8, c_0 = 16 \\ a_{n+1} = 4a_n + 3b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = 4a_n + 4b_n - 3c_n, n > 0. \end{cases}$$

Khi đó hãy

- (i) Tìm hai giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{b_n}$.
- (ii) Chứng minh $\prod_{k=0}^{2n} a_k c_k$ không là số chính phương với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Bài giải: (i) Bằng phương pháp quy nạp theo n nhận được $a_n = 3 \cdot 2^{n+2}$, $b_n = 2^{n+3}$ và $c_n = 2^{n+4}$ với mọi $n \geq 0$. Từ đây suy ra hai giới hạn sau:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{b_n} = 2.$$

(ii) Dễ dàng kiểm tra $a_n c_n = 3b_n^2, (P)$, với mỗi số tự nhiên n . Sử dụng tính chất bất biến (P) này ta có $\prod_{k=0}^{2n} a_k c_k = 3^{2n+1} \left(\prod_{k=0}^{2n} b_k \right)^2$ không là số chính phương với mọi số nguyên $n \geq 0$. $\square$

Ví dụ 2.1.17. *Xác định ít nhất một bộ ba $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ thỏa mãn các điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ và $x, y, z > 50$.*

Bài giải: Nếu bộ ba (x, y, z) với $x \leq y \leq z$, thỏa mãn các điều kiện đã nêu thì các bộ ba $(y, z, 3yz - x)$ và $(x, z, 3xz - y)$ cũng thỏa mãn phương trình. Sử dụng thuật toán này để xây dựng bộ ba số nguyên thỏa mãn yêu cầu đặt ra. Xuất phát từ $(1, 1, 1)$ để có $(1, 1, 2)$ và $(1, 2, 5)$. Từ đó có $(1, 5, 13)$, $(1, 13, 34)$, $(1, 34, 89)$, $(1, 89, 233)$ và từ đây có bộ ba số nguyên $(89, 233, 62210)$ thỏa mãn đề bài. $\square$

Ví dụ 2.1.18. *Cho dãy số Fibonacci $a_1 = a_2 = 1$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ với mọi số nguyên $n \geq 1$. Khi đó với mọi số nguyên dương n và k phân thức $\frac{a_{n+2}k + a_n}{a_{n+3}k + a_{n+1}}$ luôn luôn là phân số tối giản.*

Bài giải: Giả sử có hai số nguyên dương n và k làm phân thức $\frac{a_{n+2}k + a_n}{a_{n+3}k + a_{n+1}}$ không là phân số tối giản. Khi đó có số nguyên $d > 1$ là ước chung của $a_{n+2}k + a_n$ và $a_{n+3}k + a_{n+1}$. Vậy hiệu

$$a_{n+3}k + a_{n+1} - a_{n+2}k - a_n = a_{n+1}k + a_{n-1}$$

chia hết cho d . Từ $a_{n+2}k + a_n$ và $a_{n+1}k + a_{n-1}$ chia hết cho d . Đây là một tính chất bất biến để ta chỉ ra điều giả sử là sai. Từ tính chất này suy ra $a_3k + a_1$ và $a_4k + a_2$ chia hết cho d hay $2k + 1, 3k + 1$ đều chia hết cho d . Vậy $k : d$. Vì $(k, 2k + 1) = 1$ nên $d = 1$: mâu thuẫn. $\square$

2.2 Phủ của một tập hợp

Định nghĩa 2.2.1. Cho tập M và một họ hữu hạn các tập $\{M_1, M_2, \dots, M_s\}$ trong $\mathbb{R}^2$. Họ $\{M_1, M_2, \dots, M_s\}$ được gọi là một *phủ hữu hạn* của M nếu $M \subseteq \bigcup_{k=1}^s M_k$.

Ví dụ 2.2.2. *Trên trục số xét tập M sao cho M có thể được phủ bởi 3 đoạn với độ dài đơn vị. Ký hiệu L là tập các trung điểm của tất cả các đoạn có thể có với hai đầu mút thuộc tập M . Chứng minh rằng có thể phủ được L bởi 6 đoạn thẳng với độ dài đơn vị. Liệu có thể luôn luôn phủ được L bởi 5 đoạn thẳng với độ dài đơn vị hay không?*

Bài giải: Giả thiết $M \subseteq [a_1; b_1] \cup [a_2; b_2] \cup [a_3; b_3]$ với $b_k - a_k = 1$,

$k = 1, 2, 3$. Với $x, y \in M$: Nếu $x, y \in [a_k; b_k]$ thì $\frac{x+y}{2} \in [a_k; b_k]$;

Nếu $x \in [a_i; b_i], y \in [a_k; b_k]$ với $i < k$, thì $\frac{a_i + a_k}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{b_i + b_k}{2}$ và

như vậy $\frac{x+y}{2} \in [\frac{a_i + a_k}{2}; \frac{b_i + b_k}{2}]$ với đoạn $[\frac{a_i + a_k}{2}; \frac{b_i + b_k}{2}]$ cũng có độ

dài 1. Vậy L được phủ bởi 6 đoạn

$[a_1; b_1], [a_2; b_2], [a_3; b_3], [\frac{a_1 + a_2}{2}; \frac{b_1 + b_2}{2}], [\frac{a_1 + a_3}{2}; \frac{b_1 + b_3}{2}]$ và $[\frac{a_2 + a_3}{2}; \frac{b_2 + b_3}{2}]$.

Khi $M = [1; 2] \cup [5; 6] \cup [17; 18]$ thì L phải được phủ bởi đúng 6 đoạn:

$[1; 2], [3; 4], [5; 6], [9; 10], [11; 12], [17; 18]$. $\square$

Ví dụ 2.2.3. Cho hai số tự nhiên p, q với $(p, q) = 1$. Đoạn $[0; 1]$ được phân ra làm $p + q$ đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng trong mỗi đoạn nhỏ này, ngoài hai đoạn chứa 0 và 1, có đúng một số từ $p + q - 2$ số sau: $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$.

Bài giải: Từ $(p, q) = 1$ suy ra $(p + q, p) = (p + q, q) = 1$. Đặt $n = p + q$.

Ta thấy, nếu $\frac{i}{p} = \frac{j}{q}$ thì $iq = jp$. Do $(p, q) = 1$ nên $i : p, j : q$. Từ đây suy

ra ngay, khi $1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1$ thì không thể có $\frac{i}{p} = \frac{j}{q}$. Ta cũng

thấy, nếu $\frac{i}{p} = \frac{k}{n}$ thì $i(p+q) = kp$. Do $1 \leq i \leq p-1$ nên $k : p+q$. Từ đây

cũng suy ra ngay, khi $1 \leq k \leq p+q-2$ thì không thể có $\frac{i}{p} = \frac{k}{n}$. Tương

tự cũng không thể có $\frac{j}{q} = \frac{k}{n}$. Tóm lại, ba số $\frac{i}{p}, \frac{j}{q}, \frac{k}{n}$ là khác nhau đôi một

khi $1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1$ và $1 \leq k \leq p+q-2$.

Do $\frac{1}{p} > \frac{1}{n}, \frac{1}{q} > \frac{1}{n}$ nên cứ hai trong số các điểm $\frac{i}{p}$ phải ở trong các đoạn

$[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$ khác nhau, (vì $\frac{i+t}{p} - \frac{i}{p} \geq \frac{1}{p} > \frac{1}{n} = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}$). Tương tự,

cứ hai trong số các điểm $\frac{j}{q}$ phải ở trong các đoạn $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$ khác nhau.

Giả sử có $\frac{i}{p}, \frac{j}{q}$ ở trong cùng một đoạn $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$ với $k \in \{1, \dots, n-2\}$.

Khi đó $\frac{k}{n} < \frac{i}{p}, \frac{j}{q} < \frac{k+1}{n}$. Vì $\frac{i+j}{p+q}$ ở giữa $\frac{i}{p}$ và $\frac{j}{q}$ nên khi coi $\frac{i}{p} < \frac{j}{q}$ sẽ có

$\frac{k}{n} < \frac{i}{p} < \frac{i+j}{n} < \frac{j}{q} < \frac{k+1}{n}$: vô lý vì không thể có $\frac{k}{n} < \frac{i+j}{n} < \frac{k+1}{n}$.
Tóm lại, có $p+q-2$ đoạn, ngoài hai đoạn đầu và cuối ra, trên mỗi đoạn phải có đúng một trong các số $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$. $\square$

Ví dụ sau đây được trình bày lại qua khái niệm phủ một tập:

Ví dụ 2.2.4. Giả sử tập các số nguyên dương được phân ra thành r tập không giao nhau: $\mathbb{N}^* = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ với $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Chứng minh rằng tồn tại i để A_i có tính chất: Tồn tại số nguyên dương n để sao cho với bất kỳ k luôn tìm được các số $a_1, \dots, a_k \in A_i$ thỏa mãn $0 < a_{j+1} - a_j \leq n, 1 \leq j \leq k-1$.

Bài giải: Nếu A_1 không có tính chất đã nêu ra với số nguyên dương bất kỳ n có thể tìm thấy $k > 0$ sao cho bất kỳ dãy $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ trong A_1 đều có j với $a_{j+1} - a_j > n$. Phần bù của A_1 trong $\mathbb{N}^+$ là $A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_r$ có một dãy các số nguyên liên tiếp dài tùy ý, vì với n bất kỳ có dãy $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ trong A_1 sao cho có j để $a_{j+1} - a_j > n$. Vậy các số nằm giữa a_j và a_{j+1} là ở trong $A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_r$ có độ dài tùy ý. $\square$

Ví dụ 2.2.5. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi. Chứng minh rằng hợp của bốn hình tròn đường kính AB, BC, CD, DA phủ hoàn toàn tứ giác.

Bài giải: Lấy điểm M tùy ý trong hoặc trên cạnh tứ giác $ABCD$. Bởi vì $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 2\pi$ nên tồn tại một trong bốn góc $\{\widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMD}, \widehat{DMA}\}$ với số đo $\geq \frac{\pi}{2}$, chẳng hạn $\widehat{DMA} \geq \frac{\pi}{2}$. Khi đó M thuộc hình tròn đường kính DA . $\square$

Ví dụ 2.2.6. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) xét đa giác lồi $n \geq 5$ đỉnh. Giả sử tồn tại 5 đỉnh đa giác có tọa độ là những số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm thuộc miền trong hoặc cạnh đa giác với tọa độ cũng là những số nguyên.

Bài giải: Chia lưới nguyên trong mặt phẳng (Oxy) thành 4 tập như sau:

- (i) T_1 là tập gồm tất cả các điểm nguyên $(x; y)$ với x, y chẵn.
- (ii) T_2 là tập gồm tất cả các điểm nguyên $(x; y)$ với x chẵn, y lẻ.
- (iii) T_3 là tập gồm tất cả các điểm nguyên $(x; y)$ với x lẻ y chẵn.
- (iv) T_4 là tập gồm tất cả các điểm nguyên $(x; y)$ với x, y lẻ

Hiển nhiên, 5 đỉnh đa giác với tọa độ là những số nguyên phải thuộc hợp 4 tập $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$. Vì $4.1 = 4 < 5$ nên có tập T_i phải chứa hai đỉnh đa giác với tọa độ nguyên, chẳng hạn $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$.

Từ $x_1 \equiv x_2 \pmod{2}$ và $y_1 \equiv y_2 \pmod{2}$ suy ra $I(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2})$ là trung điểm đoạn A_1A_2 với tọa độ nguyên. Vì đa giác lồi nên I là một điểm thuộc miền trong hoặc cạnh đa giác với tọa độ cũng là những số nguyên. $\square$

Ví dụ 2.2.7. *Giả sử ngũ giác lồi $ABCDE$ có độ dài mỗi cạnh và độ dài các đường chéo AC, AD không vượt quá $\sqrt{3}$. Lấy 2011 điểm phân biệt tùy ý nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy.*

Bài giải: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) xét hình chữ nhật $MNPQ$ với tọa độ $M(-\sqrt{3}; 0)$, $N(\sqrt{3}; 0)$, $P(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $Q(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Nửa đường tròn $(\ell) : x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0$ sẽ nằm trong hình chữ nhật này và ngũ giác $ABCDE$ chứa trong (ℓ) . Hiển nhiên hợp của 5 hình tròn bằng nhau với tọa độ tâm $(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ và bán kính 1 sẽ chứa ngũ giác $ABCDE$. Vì $402.5 = 2010 < 2011$ nên tồn tại một đường tròn đơn vị chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy. $\square$

Ví dụ 2.2.8. *Xác định các ánh xạ $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{2010, 2011\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ là một số chẵn.*

Bài giải: Ta có thể cho $f(1), f(2), \dots, f(n-1)$ nhận giá trị tùy ý, còn $f(n)$ được xác định duy nhất để $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ là một số chẵn. Vậy có tất cả 2^{n-1} ánh xạ như vậy. $\square$

Ví dụ 2.2.9. *Cho tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.*

Bài giải: Ký hiệu

$$A_1 = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, A_2 = \{3k | k \in \mathbb{N}\}, A_3 = \{5k | k \in \mathbb{N}\}, A_4 = \{7k | k \in \mathbb{N}\}$$

và đặt $B_i = A_i \cap S$ với $i = 1, 2, 3, 4$. Ký hiệu $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Theo Định lý 1.2.1, dễ dàng tính được $|B| = 216$ và với 5 số tùy ý thuộc B phải có ít nhất hai số thuộc cùng một B_i nào đó. Do đó 5 số tùy ý thuộc B không thể là 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau và như vậy mọi tập con E

của B không thể chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau. Vậy $n > 216$. Chứng minh số cần tìm $n = 217$. Thật vậy, trước tiên ta lọc ra tập chứa tất cả các số nguyên tố thuộc S . Đặt

$$\begin{aligned} C_1 &= B \setminus \{2, 3, 5, 7\} \\ C_2 &= \{11^2, 11.13, 11.17, 11.19, 11.23, 13^2, 13.17, 13.19\} \subset S \\ D &= S \setminus (C_1 \cup C_2). \end{aligned}$$

Hiển nhiên ta đã lọc ra được tập D chứa số 1 và tất cả các số nguyên tố có trong S . Vì $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ nên $|D| = |S| - |C_1| - |C_2| = 280 - 212 - 8 = 60$. Giả sử $E \subset S$ là một tập con tùy ý chứa 217 phần tử.

Nếu $|E \cap D| \geq 5$ thì trong E có 5 số nguyên tố thuộc S và hiển nhiên chúng đôi một nguyên tố cùng nhau.

Nếu $|E \cap D| \leq 4$ thì $|E \cap (S \setminus D)| = |E \setminus (E \cap D)| \geq 217 - 4 = 213$. Điều này chỉ ra có nhiều nhất 7 số thuộc D không nằm trong E bởi vì $|S \setminus D| = 280 - 60 = 220$. Bây giờ ta lọc ra 8 tập rời nhau sau đây:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2.23, 3.19, 5.17, 7.13, 11.11\} \\ M_2 &= \{2.29, 3.23, 5.19, 7.17, 11.13\} \\ M_3 &= \{2.31, 3.29, 5.23, 7.19, 11.17\} \\ M_4 &= \{2.37, 3.31, 5.29, 7.23, 11.19\} \\ M_5 &= \{2.41, 3.37, 5.31, 7.29, 11.23\} \\ M_6 &= \{2.43, 3.41, 5.37, 7.31, 13.17\} \\ M_7 &= \{2.47, 3.43, 5.41, 7.37, 13.19\} \\ M_8 &= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}. \end{aligned}$$

Hiển nhiên $M_i \subset S \setminus D$ và các số thuộc M_i đôi một nguyên tố cùng nhau với mọi $i = 1, 2, \dots, 8$. Vì $|E \cap (S \setminus D)| \geq 213$ và $|S \setminus D| = 220$ nên tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$ để $M_k \subset E$ hay trong E có 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau. $\square$

Ví dụ 2.2.10. Giả sử trong hình chữ nhật F có kích thước 65×2011 đặt 33852 hình vuông với độ dài các cạnh bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường tròn bán kính $r = \frac{1}{2}$ không có điểm chung với bất kỳ hình vuông nào.

Bài giải: Đường tròn bán kính $r = \frac{1}{2}$ có điểm chung với hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh 1 khi và chỉ khi tâm I của nó cách một cạnh nào đó

của hình vuông $ABCD$ một khoảng không quá $\frac{1}{2}$. Bởi vậy tâm I phải thuộc hình $A'A''B'B''C'C''D'D''$, tạo thành từ hình vuông $ABCD$ và 4 hình chữ nhật kích thước $\frac{1}{2} \times 1$ và bốn một phần tư đường tròn bán kính $r = \frac{1}{2}$. Diện tích mỗi hình $A'A''B'B''C'C''D'D''$ bằng $1.1 + 4.1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = 3 + \frac{\pi}{4}$. Vậy tổng diện tích S_1 của 33852 hình giống như $A'A''B'B''C'C''D'D''$ sẽ không vượt quá $33852 \cdot (3 + \frac{\pi}{4})$. Vì đường tròn tâm I bán kính $r = \frac{1}{2}$ nằm trong hình chữ nhật (F) kích thước 65×2011 nên khoảng cách từ I đến cạnh hình chữ nhật này không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$. Vậy tâm I phải nằm trên cạnh hay bên trong hình chữ nhật $MNPQ$. Diện tích phần hình chữ nhật (F) mà I không ở đó bằng $S_2 = 65 \cdot 2011 - 64 \cdot 2010 = 2075$. Vì $\pi < 3,2$ nên

$$S_1 + S_2 < 2075 + 3,8 \cdot 33852 < 65 \times 2011.$$

Theo Định lý 1.3.1, tồn tại điểm I thuộc hình chữ nhật (F) để sao cho khi dựng đường tròn tâm I bán kính $r = \frac{1}{2}$ không có điểm chung với bất kỳ hình vuông nào và nằm hoàn toàn trong (F) . $\square$

Ví dụ 2.2.11. *Giả sử ngũ giác lồi $ABCDE$ có độ dài mỗi cạnh và độ dài các đường chéo AC, AD không vượt quá $\sqrt{3}$. Lấy 2011 điểm phân biệt tùy ý nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng:*

- (i) *Tồn tại một hình tròn đơn vị chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy.*
- (ii) **[VMO 2011]** *Tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh ngũ giác lồi $ABCDE$ chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy.*

Bài giải: (i) Đã chứng minh trong ví dụ 2.2.7.

(ii) Cái khó ở đây là yêu cầu tâm hình tròn phải thuộc cạnh đa giác. Trước tiên ta nhận xét: *Một điểm M bất kỳ ở trong tam giác XYZ với độ dài cạnh không vượt quá $\sqrt{3}$ thì $\min\{MX, MY, MZ\} \leq 1$.*

Thật vậy, từ $\angle XMY + \angle YMZ + \angle ZMX = 2\pi$ suy ra có ít nhất một góc, chẳng hạn $\angle XMY \geq \frac{2\pi}{3}$. Khi đó, theo Định lý cosin ta có $3 \geq XY^2 = MX^2 + MY^2 - 2MX \cdot MY \cos \frac{2\pi}{3} \geq MX^2 + MY^2 + MX \cdot MY$ hay $3 \geq 3 \min\{MX^2, MY^2\}$. Vậy $\min\{MX, MY, MZ\} \leq 1$.

Vì 2011 điểm thuộc ngũ giác lồi $ABCDE$ nên mỗi điểm phải cách đỉnh của một trong các tam giác ABC, ACD, ADE một khoảng cách không vượt quá 1. Do đó, theo Định lý 1.3.1 tồn tại một đỉnh ngũ giác có khoảng cách không lớn hơn 1 đến 403 điểm vì $402.5 < 2011$. $\square$

Ví dụ 2.2.12. Chứng minh rằng không tồn tại ánh xạ $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ thỏa mãn: $f(x) \neq f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $|x - y| \in \{2, 3, 5\}$.

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết $f(0) = 1$ và $f(5) = 2$. Vì $5 - 2 = 3$ và $2 - 0 = 2$ nên $f(2) = 3$. Vì $7 - 2 = 5$ và $7 - 5 = 2$ nên $f(7) \neq f(2)$ và $f(7) \neq f(5)$. Như vậy $f(7) = 1$. Vì $3 - 0 = 3$ và $5 - 3 = 2$ nên $f(3) = 3$. Vậy $f(3) = f(2)$. Tóm lại, ánh xạ $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ thỏa mãn $f(0) = 1, f(2) = 3, f(3) = 3, f(5) = 2, f(7) = 1$.

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$ có $n + 1 - n = 1 \notin \{2, 3, 5\}$ nên $f(n + 1) = f(n)$. Vì hàm hằng f không thỏa mãn $f(7) = 1 \neq 2 = f(5)$ nên không thể có ánh xạ f thỏa mãn đầu bài. $\square$

Ví dụ 2.2.13. Với bất kỳ số tự nhiên n tập nghiệm nguyên của hai phương trình $x^2 + y^2 = n$ và $x^2 + y^2 = 2n$ có cùng lực lượng.

Bài giải: Xây dựng một song ánh từ tập nghiệm này sang tập nghiệm kia qua $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ và ngược lại $(x, y) \mapsto (\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2})$. $\square$

2.3 Ứng dụng trong bài toán hình học tổ hợp.

Hình học tổ hợp là một nhánh không thể thiếu được của các bài toán tổ hợp nói chung, nó thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi ở mọi cấp.

Nguyên lý Dirichlet là một trong những phương pháp thông dụng và hiệu quả để giải các bài toán hình học tổ hợp. Nguyên lý này tưởng chừng đơn giản nhưng là một công cụ hết sức hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Chúng tôi xin trình bày một số mệnh đề (thực chất là một số Nguyên lý Dirichlet áp dụng cho độ dài các đoạn thẳng, diện tích các hình phẳng, thể tích các vật thể) hay sử dụng nhiều đến trong nhiều bài toán hình học tổ hợp được đề cập đến trong chương này.

Mệnh đề 2.3.1. Nguyên lý Dirichlet cho diện tích.

Nếu K là một hình phẳng, còn $K_1, K_2, \dots, K_n$ là các hình phẳng sao cho $K_i \subseteq K$ với $i = 1, \dots, n$ và

$$|K| < |K_1| + |K_2| + \dots + |K_n|.$$

Ở đây $|K|$ là diện tích của hình phẳng K , còn $|K_i|$ là diện tích của hình phẳng $K_i, i = 1, \dots, n$, thì tồn tại ít nhất hai hình phẳng H_i, H_j , ($1 \leq i \leq j \leq n$) sao cho H_i và H_j có điểm trong chung. (Ở đây ta nói rằng P là điểm trong của tập hợp A trên mặt phẳng, nếu như tồn tại hình tròn tâm P bán kính đủ bé sao cho hình tròn này nằm trọn trong A).

Tương tự Nguyên lý Dirichlet cho diện tích, ta có Nguyên lý Dirichlet cho độ dài các đoạn thẳng, thể tích các vật thể...

Nguyên lý Dirichlet còn được phát biểu cho trường hợp vô hạn như sau:

Mệnh đề 2.3.2. Nguyên lý Dirichlet vô hạn:

Nếu chia một tập hợp vô hạn các quả táo vào hữu hạn các ngăn kéo, thì phải có ít nhất một ngăn kéo chứa vô hạn quả táo.

Ứng dụng to lớn của Nguyên lý Dirichlet để giải các bài toán hình học tổ hợp được trình bày qua các ví dụ sau đây:

Ví dụ 2.3.1. Trong hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1) có 101 điểm. Chứng minh rằng có 5 điểm trong các điểm đã chọn được phủ bởi một đường tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Bài giải: Chia hình vuông ra làm 25 hình vuông bằng nhau, mỗi cạnh của hình vuông là 0,2. Vì có 101 điểm, mà chỉ có 25 hình vuông, nên theo Nguyên lý Dirichlet tồn tại hình vuông nhỏ chứa ít nhất 5 điểm (trong 101 điểm đã cho). Vì hình vuông này nội tiếp trong đường tròn bán kính

$$R = \frac{\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Do $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$ nên dĩ nhiên đường tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp trên và có bán kính $\frac{1}{7}$ chứa ít nhất 5 điểm nói trên. $\square$

Ví dụ 2.3.2. Cho một bảng kích thước $2n \times 2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô vuông bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

*			*	*	
		*		*	
	*				*
		*			
			*		

Bài giải: Chọn ra n hàng có chứa ô được đánh dấu nhiều trên hàng đó nhất. Ta chứng minh rằng số ô được đánh dấu còn lại nhỏ hơn hoặc bằng n . Giả sử trái lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu còn lại lớn hơn hoặc bằng $n + 1$. Số các hàng còn lại chưa chọn là n . Vậy theo Nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (trong số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đánh dấu.

Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn chứa số ô được đánh dấu nhiều trên hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn không có ít hơn $2n$ ô đã được đánh dấu. Nếu vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n + (n + 1) > 3n$. Vô lý (vì chỉ có $3n$ ô được đánh dấu). Vậy nhận xét được chứng minh.

Như vậy, sau khi đã chọn ra n hàng (với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại không quá n ô được đánh dấu. Vì thế có cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột đã chọn. $\square$

Ví dụ 2.3.3. Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.

Bài giải: Kí hiệu M là số mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Giả sử mặt M có k cạnh. Khi đó vì có k mặt có cạnh chung với M , nên đa diện có ít nhất $k + 1$ mặt. Vì là mặt có số cạnh nhiều nhất bằng k , nên mọi mặt của đa diện có số cạnh nhận một trong các giá trị $\{3, 4, \dots, k\}$.

Đa diện có ít nhất $k + 1$ mặt, mà mỗi mặt số cạnh của nó nhận một trong $k - 2$ giá trị. Vì thế theo Nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất hai mặt của đa diện có cùng số cạnh. $\square$

Ví dụ 2.3.4. Cho 1000 điểm $M_1, M_2, \dots, M_{1000}$ trên mặt phẳng. Vẽ một

đường tròn bán kính 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho: $SM_1 + SM_2 + \dots + SM_{1000} \geq 1000$.

Bài giải: Xét đường kính S_1S_2 tùy ý của đường tròn, ở đây S_1, S_2 là hai đầu của đường kính. Vì $S_1S_2 = 2$ nên ta có:

$$\begin{cases} S_1M_1 + S_2M_1 & \geq S_1S_2 = 2 \\ S_1M_2 + S_2M_2 & \geq S_1S_2 = 2 \\ \vdots \\ S_1M_{1000} + S_2M_{1000} & \geq S_1S_2 = 2. \end{cases}$$

Cộng từng vế của 1000 bất đẳng thức trên ta có:

$$(S_1M_1 + S_1M_2 + \dots + S_1M_{1000}) + (S_2M_1 + S_2M_2 + \dots + S_2M_{1000}) \geq 2000. (1)$$

Từ (1) và theo Nguyên lý Dirichlet suy ra trong hai tổng của vế trái của (1) có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000. Giả sử:

$$S_1M_1 + S_1M_2 + \dots + S_1M_{1000} \geq 1000.$$

Khi đó lấy $S = S_1$. □

Ví dụ 2.3.5. Trong mặt phẳng cho hình vuông. Người ta vẽ 9 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia hình vuông thành 2 tứ giác có tỉ số diện tích $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 3 đường thẳng đồng quy.

Bài giải: Vì đường thẳng a_i , ($i = 1, \dots, 9$) chia hình vuông $ABCD$ thành 2 tứ giác nên a_i không thể đi qua đỉnh hình vuông và khi đó mỗi tứ giác là một hình thang vuông. Gọi M, N thứ tự là trung điểm AD và BC . a_i cắt MN tại O_i . Từ công thức tính diện tích và tính chất của đường trung bình hình thang ta có $\frac{O_iM}{O_iN} = \frac{2}{3}$. Do tính chất đối xứng của hình vuông nên có 4 điểm O_i

Ta coi 9 đường thẳng là 9 chim bồ câu và 4 điểm O_i , $i = 1, \dots, 4$ là 4 lồng, $2.4 < 9$. Vậy theo Nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng được nhốt 3 chim. Hay ít nhất 3 trong các đường thẳng đó đồng quy. □

Ví dụ 2.3.6. Trong hình vuông có diện tích bằng 6 đặt ba đa giác có diện tích bằng 3. Chứng minh rằng luôn tìm được hai đa giác mà diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn 1.

Bài giải: Gọi ba đa giác là M_1, M_2, M_3 . Ký hiệu $|A|$ là diện tích của hình phẳng A . Khi đó ta có:

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - (|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1|) + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|. \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có $|M_1| = |M_2| = |M_3| = 3$. (2)

Để ý rằng $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ nằm trong hình vuông có diện tích bằng 6, nên từ (1) và (2) ta có bất đẳng thức sau:

$$6 \geq 9 - (|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|) \text{ hay}$$

$$|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1| \geq 3 + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|. \quad (3)$$

Do $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| \geq 0$ nên từ (3) ta có:

$$|M_1 \cap M_2| + |M_2 \cap M_3| + |M_3 \cap M_1| \geq 3. \quad (4)$$

Từ (4) theo Nguyên lý Dirichlet suy ra tồn tại ít nhất một trong ba số $|M_1 \cap M_2|, |M_2 \cap M_3|, |M_3 \cap M_1|$ lớn hơn hoặc bằng 1.

Giả sử $|M_1 \cap M_2| \geq 1$. Điều đó có nghĩa là hai đa giác M_1, M_2 có diện tích phần chung không nhỏ hơn 1. $\square$

Tuy nhiên khi vận dụng nguyên lý Dirichlet chúng ta cũng cần chú ý: Nguyên lý này không cho phép ta chỉ ra "lồng nào" nhốt mấy chim bồ câu. Ngoài ra các nguyên lý khác cũng được sử dụng rất nhiều trong hình học tổ hợp.

Ví dụ 2.3.7. Trong tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kì. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

Bài giải: Dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với cạnh BC, CA và AB . Vì tam giác ABC có 3 góc nhọn nên các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trong đoạn BC, CA và AB . Nói PA, PB, PC ta có

$$\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^\circ.$$

Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn 60° .

Không làm mất tính chất tổng quát ta có thể giả sử rằng góc $\widehat{APC_1}$ là lớn nhất, thế thì $\widehat{APC_1} \geq 60^\circ$.

Xét tam giác vuông APC_1 , ta có $\frac{PC_1}{AP} = \cos \widehat{APC_1} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

(Vì nếu góc tăng từ 0^0 đến 90^0 thì cosin góc đó giảm).

Từ đó ta có $AP \geq 2PC_1$.

Nếu thay PA bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 bằng khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách từ P đến các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn. $\square$

Ví dụ 2.3.8. *Tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở E . Chứng minh rằng nếu các bán kính của bốn đường tròn nội tiếp các tam giác EAB, EBC, ECD và EDA mà bằng nhau, thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.*

Bài giải: Không làm mất tính chất tổng quát, có thể giả sử rằng $AE \geq CE$ và $DE \geq BE$. Gọi B_1 và C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua tâm E , ta có tam giác C_1EB_1 nằm trong tam giác AED . Giả sử đoạn AD không trùng với đoạn C_1B_1 . Khi đó đường tròn ℓ nội tiếp tam giác C_1EB_1 đồng dạng phối cảnh với đường tròn nội tiếp tam giác AED , với tâm đồng dạng E , hệ số đồng dạng lớn hơn 1.

Như vậy $r_{AED} > r_{C_1EB_1} = r_{CEB}$ (r_{AED} là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AED). Vô lý vì trái với giả thiết $r_{AED} = r_{CEB}$. Điều vô lý chứng tỏ rằng $A \equiv C_1$ và $D \equiv B_1$ suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, nên $AE = EC$.

Trong hình bình hành $ABCD$ ta có: $p_1 \cdot r = S_{AEB} = S_{BEC} = p_2 \cdot r$ với p_1, p_2 tương ứng là nửa chu vi các tam giác ABE và BEC .

Suy ra: $p_1 = p_2$, vì $AE = EC$ nên $AB = BC$ hay $ABCD$ là hình thoi. $\square$

Ví dụ 2.3.9. *Chứng minh rằng bốn hình tròn có đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín tứ giác đã cho.*

Bài giải: Giả sử M là một điểm tùy ý nằm bên trong tứ giác lồi $ABCD$. Ta có: $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^0$, do đó góc lớn nhất trong bốn góc này không nhỏ hơn 90^0 . Giả sử $\widehat{AMB} \geq 90^0$. Khi đó M nằm bên trong đường tròn đường kính AB . $\square$

Ví dụ 2.3.10. *Trên mặt phẳng cho 1993 điểm, khoảng cách giữa các điểm này đôi một khác nhau. Nối một điểm nào đó trong số các điểm này với điểm gần nhất. Cứ tiếp tục như thế. Hỏi về cách nối đó có thể nhận được một đường gấp khúc khép kín hay không?*

Bài giải: Giả sử xuất phát từ một điểm A_1 bất kì. Theo giả thiết trong số tất cả các đoạn thẳng có đầu mút A_1 thì tồn tại duy nhất điểm A_2

để A_1A_2 ngắn nhất. Tiếp tục xét như thế đối với các đoạn thẳng xuất phát từ A_2 . Xảy ra hai trường hợp: hoặc A_1A_2 ngắn nhất thì đường gấp khúc dừng tại A_2 , hoặc tồn tại duy nhất điểm A_3 để A_2A_3 ngắn nhất, lúc đó $A_2A_3 < A_1A_2$. Giả sử có đường gấp khúc $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ thì theo lập luận trên có $A_1A_2 > A_2A_3 > ... > A_{n-1}A_n$. Điểm A_n không thể nối được với điểm A_i nào đó với $1 \leq i \leq n-2$ vì nếu trái lại ta có $A_nA_i < A_nA_{n-1} < A_iA_{i+1}$, mâu thuẫn với yêu cầu A_iA_{i+1} là đoạn ngắn nhất xuất phát từ A_i . Vậy đường gấp khúc $A_iA_{i+1}...A_n$ không thể khép kín. $\square$

KẾT LUẬN

Trong luận văn chúng tôi đã đạt được các kết quả sau:

1. Trình bày được bốn nguyên lý cơ bản. Đó là Nguyên lý quy nạp, Nguyên lý Bù-Trừ, Nguyên lý Dirichlet và Nguyên lý lùi dần.
2. Đã xây dựng được một hệ thống ví dụ tương ứng với lời giải có vận dụng bốn nguyên lý trên.
3. Trình bày phương pháp đại lượng bất biến.
4. Xét phủ của một tập hợp và chứng minh một vài kết quả về hình học tổ hợp.

Tài liệu tham khảo

- [1] Kenneth H. Rosen, Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học, NXB Khoa học và kĩ thuật, 1998.
- [2] Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 392, NXB Giáo dục, 2010.
- [3] Tuyển tập 5 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ, NXB Giáo dục, 2003.
- [4] Hoàng Chí Thành, Giáo trình tổ hợp, NXB ĐHQGHN, 2011.

Luận văn với đề tài "Vận Dụng Các Nguyên Lý Cơ Bản Vào Giải Một Số Bài Toán Sơ Cấp" của học viên Vũ Thị Loan đã chỉnh sửa theo ý kiến đóng góp của Hội đồng chấm luận văn họp tại Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên ngày 22 tháng 6 năm 2013.

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS Đàm Văn Nhĩ