

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Trần Thị Phương Lâm

NGHIÊN CỨU PHÉP BIẾN HÌNH BẰNG PHƯƠNG
PHÁP ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Trần Thị Phương Lâm

NGHIÊN CỨU PHÉP BIẾN HÌNH BẰNG PHƯƠNG
PHÁP ĐẠI SỐ

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu	2
1 Các phép biến hình trong mặt phẳng	3
1.1 Phép dời hình	4
1.2 Các phép dời hình thường gặp	4
1.2.1 Phép tịnh tiến	4
1.2.2 Phép đối xứng trục	6
1.2.3 Phép đối xứng tâm	8
1.2.4 Phép quay quanh một điểm	11
1.2.5 Định lý về dạng chính tắc của phép dời hình	13
1.3 Phép đồng dạng	14
1.3.1 Phép vị tự	14
1.3.2 Phép đồng dạng tỉ số k	15
1.4 Phép nghịch đảo	16
1.5 Phương trình đại số của các phép biến hình phẳng	18
1.5.1 Phương trình của phép tịnh tiến	19
1.5.2 Phương trình của phép đối xứng trục	20
1.5.3 Phương trình của phép đối xứng tâm	22
1.5.4 Phương trình của phép quay	25

1.5.5	Phân loại phép dời hình trong mặt phẳng	27
1.5.6	Phương trình của phép vị tự	29
1.5.7	Phương trình của phép đồng dạng	32
1.5.8	Kết hợp các phép biến hình phẳng	33
1.5.9	Phép nghịch đảo trong mặt phẳng	37
2	Các phép biến hình trong không gian	48
2.1	Nhắc lại các khái niệm	48
2.1.1	Phép đối xứng qua một điểm, một đường thẳng, một mặt phẳng	50
2.1.2	Phép quay quanh một đường thẳng	52
2.1.3	Điểm bất động và vectơ bất động của phép biến đổi đẳng cự	53
2.1.4	Phân loại phép biến đổi đẳng cự trong E^3	55
2.2	Các phép đồng dạng trong E^3	64
2.2.1	Phép vị tự trong E^3	64
2.2.2	Phép đồng dạng trong E^3	65
2.2.3	Phân loại phép đồng dạng trong E^3	66
2.3	Phép nghịch đảo trong E^3	67
2.3.1	Định nghĩa và các tính chất	67
2.3.2	Ảnh của mặt phẳng và mặt cầu qua phép nghịch đảo	69
	Tài liệu tham khảo	74

Lời cảm ơn

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Nguyễn Việt Hải, Người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ và nghiêm khắc trong khoa học để tôi hoàn thành bản luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo khoa học, khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học, Đại Học Thái Nguyên, các thầy, cô giáo đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập tại đây. Tôi xin cảm ơn các thầy cô giáo, gia đình và bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ rất nhiều để tôi hoàn thành bản luận văn này.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Hải Phòng, Tháng 5 năm 2013

Học viên

Trần Thị Phương Lâm

Mở đầu

Phép biến hình là một đề tài đã được nhiều tác giả khai thác ở các khía cạnh khác nhau: chứng minh bằng cách sử dụng biến hình, tìm quỹ tích bằng biến hình, dựng hình nhờ dời hình hoặc phép nghịch đảo,...Nhiều bài tập hình học đơn giản nhờ biến hình đã trở thành cổ điển và có vẻ đẹp hoàn hảo. Đề tài "Nghiên cứu phép biến hình bằng phương pháp đại số" lại tiếp cận phép biến hình theo cách khác hẳn: sử dụng các công cụ của đại số, đặc biệt là phương pháp tọa độ để nghiên cứu và ứng dụng các phép biến hình.

Phép biến hình là một trong những nội dung cơ bản trong chương trình toán ở bậc Trung học cơ sở và Trung học phổ thông. Việc đưa nội dung phép biến hình vào chương trình toán THCS và THPT không những cung cấp cho học sinh những công cụ mới để giải toán mà còn tập cho học sinh làm quen với các phương pháp tư duy và suy luận mới. Tuy nhiên đó chỉ là các cách giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Với việc áp dụng phương pháp tọa độ vào giải các bài toán hình học giúp cho hình học thoát ra khỏi lối tư duy cụ thể và trực quan. Đặc biệt hơn việc ứng dụng phương pháp đại số giúp chúng ta giải bài toán một cách đơn giản hơn rất nhiều so với việc giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Việc lựa chọn công cụ, phương pháp giải thích hợp cho mỗi

bài toán giúp ta tiết kiệm được thời gian và công sức để giải bài toán đó một cách có hiệu quả nhất. Đó cũng là lý do tôi chọn đề tài luận văn "Nghiên cứu các phép biến hình bằng phương pháp đại số".

Phạm vi của luận văn là nghiên cứu các phép biến hình trong mặt phẳng bằng công cụ đại số. Chứng minh lại các tính chất của các phép biến hình bằng công cụ đại số đồng thời giải các bài toán liên quan. Từ đó thấy được ưu thế của việc đại số hóa các phép biến hình.

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương

Chương 1: Các phép biến hình trong mặt phẳng.

Chương 2: Các phép biến hình trong không gian.

Chương 1 đề cập đến các phép biến hình phẳng từ phép tịnh tiến đến phép nghịch đảo với cách làm là hệ thống các kiến thức cơ bản về mỗi phép biến hình, sau đó xây dựng các phương trình đại số (biểu thức tọa độ) tương ứng. Việc ứng dụng các phương trình đại số cho phép giải được một loạt các bài toán hình học có hiệu quả.

Chương 2 đề cập đến các phép biến hình trong không gian bằng cách đưa ra ngay phương trình của mỗi phép biến hình trong không gian như: phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay quanh một điểm, phép vị tự, phép đồng dạng, phép nghịch đảo. Kết quả quan trọng ở chương này là mô tả được các đặc trưng của một số phép biến hình phức tạp. Các ví dụ tính toán chi tiết cũng là những kết quả có ích của luận văn.

Chương 1

Các phép biến hình trong mặt phẳng

Trong đại số hay giải tích ta có khái niệm hàm số, tương tự như vậy ta có khái niệm phép biến hình trong hình học. Kiến thức của chương này được tập hợp từ tài liệu [2]

Định nghĩa 1.1. *Phép biến hình (trong mặt phẳng hoặc không gian) là một qui tắc với mỗi điểm M (thuộc mặt phẳng hoặc không gian) xác định một điểm duy nhất M' (thuộc mặt phẳng hoặc không gian).*

Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

Kí hiệu phép biến hình là f , M' là ảnh của M qua phép biến hình f thì ta viết $M' = f(M)$. Với mỗi hình H' gồm các điểm $M' = f(M)$, $M \in H$ là ảnh của hình H qua f , ta cũng viết $H' = f(H)$.

Lưu ý: f là một song ánh.

1.1 Phép dời hình

Định nghĩa 1.2. *Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, tức là nếu $M' = f(M), N' = f(N)$ thì $d(M', N') = d(M, N)$.*

Tính chất : các tính chất sau đã được chứng minh trong [1;5].

Phép biến hình biến:

Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

Một đường thẳng thành một đường thẳng.

Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .

Tam giác thành tam giác bằng nó .

Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, tâm thành tâm.

Góc thành góc bằng nó .

Định lý 1.3. *Tập hợp các phép dời hình trong mặt phẳng với phép hợp hai ánh xạ tạo thành một nhóm. Đó là nhóm các phép dời hình.*

Định nghĩa 1.4. *Phép đồng nhất là phép biến hình biến một điểm M thành chính nó. $I_d : M \mapsto M$.*

1.2 Các phép dời hình thường gặp

1.2.1 Phép tịnh tiến

Định nghĩa 1.5. *Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.*

Kí hiệu: $T_{\vec{v}}$

Tính chất: các tính chất sau đã được chứng minh trong [1;2], ta kí hiệu là T1,...,T6

T1: Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

T2: Phép tịnh tiến bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng.

T3: Phép tịnh tiến biến:

Tia thành tia.

Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó .

Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .

Tam giác thành tam giác bằng nó .

Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

T4: Phép tịnh tiến hoàn toàn được xác định khi biết vectơ tịnh tiến.

T5: Tích của hai phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

T6: Tập hợp các phép tịnh tiến lập thành một nhóm.

Ví dụ 1.6. Cho dây cung AB cố định không là đường kính của đường tròn (O, R) , C là một điểm thay đổi trên đường tròn và H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của hai đường tròn tâm C và tâm H có bán kính cùng bằng CH .

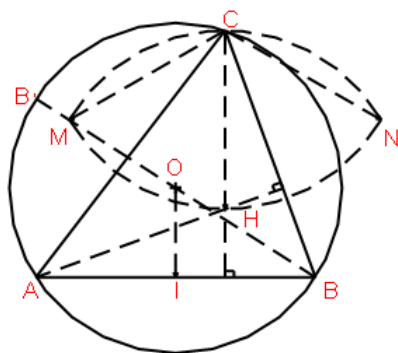
a, Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI}$.

b, Tìm quỹ tích các điểm M và các điểm N .

Giải

a. Lấy B' là ảnh của B qua O thì $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{B'A}$. Ta cần chứng minh $\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{CH}$. Vì

$B'A \perp AB, CH \perp AB \Rightarrow B'A // CH$
 $B'C \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow B'C // AH$ nên suy ra $B'CHA$ là hình bình



Hình 1.1:

hành, từ đó suy ra $\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{CH}$.

b. Ta cần tìm mối quan hệ giữa C và M, N. Ta có $CM=CH=2OI=CN$; $\widehat{MCH} = \widehat{NCH} = 60^\circ$ và $CH \perp AB$, bởi vậy các vectơ $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}$ hoàn toàn xác định, ta đặt là $\vec{a}, \vec{b}$ (không đổi), ta suy ra $M = T_{\vec{a}}(C)$, và $N = T_{\vec{b}}(C)$.

Vậy quỹ tích các điểm M, N là ảnh của đường tròn (O, R) qua hai phép tịnh tiến $T_{\vec{a}}, T_{\vec{b}}$ (trừ hai điểm A, B).

1.2.2 Phép đối xứng trục

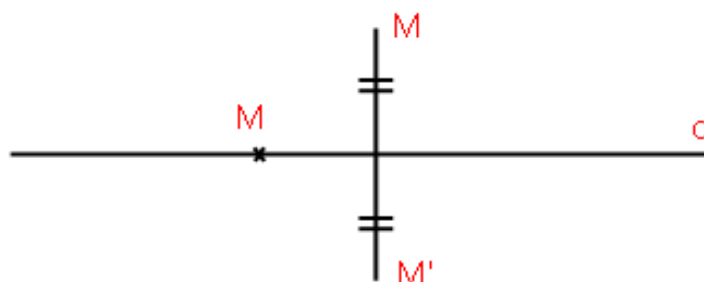
Định nghĩa 1.7. Trong mặt phẳng cho một đường thẳng d cố định, phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là đường trung trực của MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d .

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng (xem hình 1.2)

Kí hiệu: S_d

Tính chất: Dễ chứng minh được các tính chất mà ta kí hiệu là S1,...S4 sau (xem trong [1;5])

S1: Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.



Hình 1.2:

S2: Phép đối xứng trục biến:

Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng.

Đường thẳng thành đường thẳng.

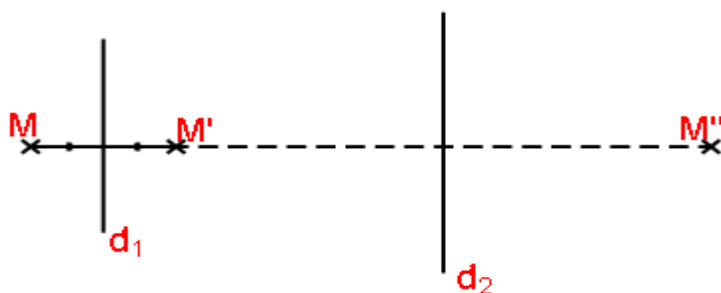
Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

Tam giác thành tam giác bằng nó .

Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, tâm đối xứng thành tâm.

Góc thành góc bằng nó.

S3: Tích hai phép đối xứng trục có trục song song là một phép tịnh tiến.



Hình 1.3:

S4: Tích của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay.

S5: Phép đối xứng trục có tính chất đối hợp: $S_{\Delta}^2 = id$.

1.2.3 Phép đối xứng tâm

Định nghĩa 1.8. Trong mặt phẳng cho điểm I , phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I .

Điểm I được gọi là tâm đối xứng.

Kí hiệu: Z_I

Chú ý: Ta có thể coi phép đối xứng tâm là trường hợp đặc biệt của phép quay (góc quay 180^0) hoặc phép vị tự (với tỉ số vị tự bằng -1).

Tính chất: Để chứng minh được các tính chất mà ta kí hiệu là Z_1, Z_2, Z_3 sau

Z_1 : Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Z_2 : Phép đối xứng tâm biến:

Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng.

Đường thẳng thành đường thẳng.

Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

Tam giác thành tam giác bằng nó.

Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

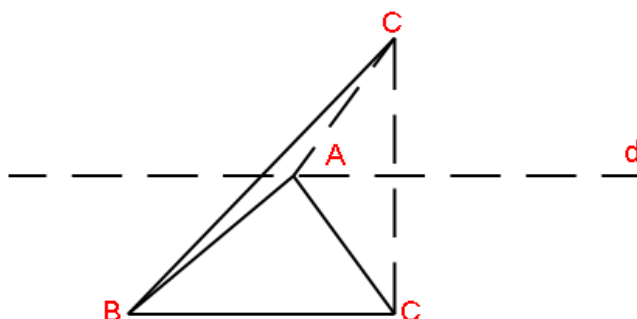
Góc thành góc bằng nó.

Z_3 : Phép đối xứng tâm có tính chất đối hợp, tức là: $(Z_I)^2 = id$.

Ví dụ 1.9. Chứng minh rằng trong tất cả các tam giác có cùng diện tích và có chung một cạnh thì tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

Giải

Gọi BC là đáy chung của tam giác ABC , a là diện tích tam giác ABC ,



Hình 1.4:

lúc đó đỉnh A nằm trên hai đường thẳng l, l' song song và cách BC một khoảng $h = \frac{2a}{BC}$.

Thực hiện phép đối xứng trục l ta có

$$S_l : C \mapsto C', A \mapsto A', AC \mapsto AC'$$

Suy ra $AC = AC'$, ta có $AB + AC = AB + AC' \geq BC'$. Vậy tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất (diện tích bằng a).

Nếu $AB + AC' = BC'$, tức là khi A trùng M trùng với giao của l với BC' . Lúc đó tam giác BMC cân tại M .

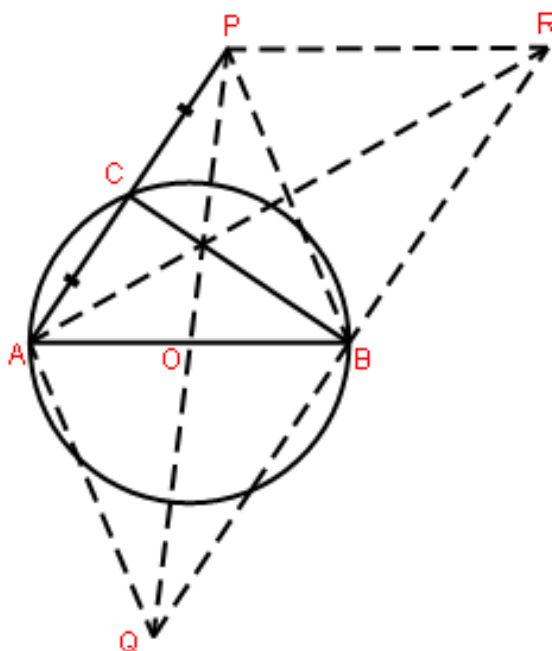
Ví dụ 1.10. Cho điểm C thay đổi trên đường tròn có đường kính AB cố định, trên tia AC lấy điểm P sao cho $AC=CP$.

a, Tìm quỹ tích các điểm Q là đỉnh của hình bình hành có hai cạnh PA, PB .

b, Tìm quỹ tích các điểm R là đỉnh của hình bình hành có hai cạnh AB, AP .

Giải

a, Ta có $Q = Z_O(P)$, bởi vậy để tìm tập hợp các điểm Q ta đi tìm



Hình 1.5:

tập hợp các điểm P. Nhưng tam giác ABP cân đỉnh B nên $BP=BA$ suy ra quỹ tích của P là đường tròn γ có tâm B, bán kính BA. Vậy quỹ tích điểm Q là γ' có tâm A, bán kính BA với γ' là ảnh của γ qua phép đối xứng tâm O.

b, Ta có $R = Z_B(Q)$, bởi vậy để tìm tập hợp các điểm R ta đi tìm tập hợp các điểm Q. Mà tập hợp các điểm Q theo câu a là γ' . Vậy quỹ tích R là đường tròn γ'' với γ'' là ảnh của γ' qua phép đối xứng tâm B. Với γ'' là đường tròn có tâm A_1 , bán kính BA, $A_1 = Z_B(A)$

1.2.4 Phép quay quanh một điểm

Định nghĩa 1.11. Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α , phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(\widehat{OM; OM'}) = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O góc quay α .

Kí hiệu: Q_α^O

Tính chất: Dễ chứng minh được các tính chất mà ta kí hiệu là Q1,...,Q7 sau(xem trong [1;5]).

Q1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Q2: Phép quay biến:

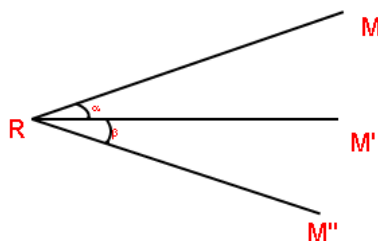
Đường thẳng thành đường thẳng .

Tam giác thành tam giác bằng nó .

Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Q3: Trong phép quay tâm O góc quay $\alpha \neq 0$ chỉ có tâm O là điểm kép duy nhất của phép quay đó và nếu đường thẳng a đi qua tâm O thì đường thẳng ảnh a' cũng đi qua O .

Q4: Tích của hai phép quay cùng tâm là một phép quay cùng tâm ấy
 $Q_\beta^O Q_\alpha^O = Q_{\alpha+\beta}^O$.

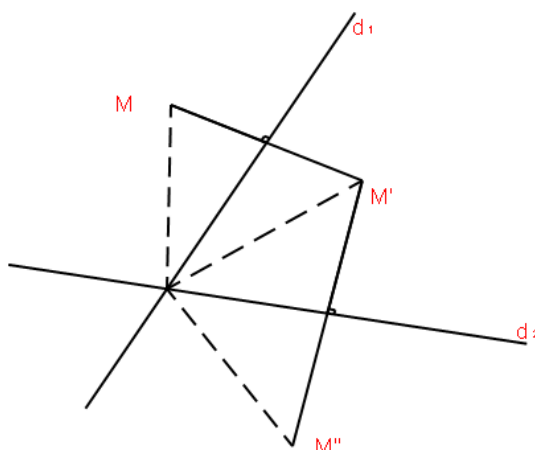


Hình 1.6:

Q5: Tích của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là phép quay với tâm quay là giao của hai trục, góc quay có độ lớn bằng hai lần góc giữa hai trục.

$$S_{d_1}(M) = M', S_{d_2}(M') = M'' \Rightarrow S_{d_2}S_{d_1}(M) = M''$$

$$Q_{\alpha}^o(M) = M'', \alpha = 2(\widehat{d_1, d_2})$$



Hình 1.7:

Suy ra $S_{d_2}S_{d_1} = Q_{\alpha}^o$.

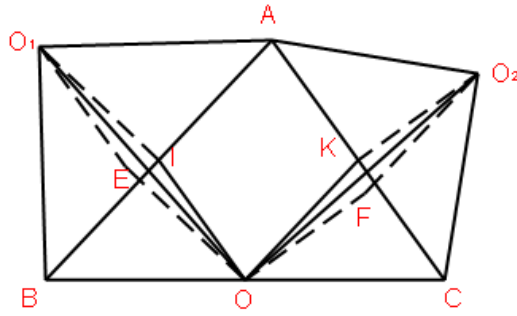
Q6: Nếu $f = Q_{\alpha}^o$ thì $f^{-1} = Q_{-\alpha}^o$.

Q7: Phép quay hoàn toàn được xác định khi biết tâm quay O và góc quay α .

Ví dụ 1.12. *Dựng ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân ABO_1, ACO_2 (vuông cân tại O_1, O_2). Gọi O là trung điểm của BC, chứng minh rằng $OO_1 \perp OO_2$ và $OO_1 = OO_2$.*

Giải

Gọi I và K là trung điểm của AB, AC. Ta có
 $AO_1I = \frac{1}{2}AB = OK, AO_1I \perp OK; AO_2K = \frac{1}{2}AC = OI, AO_2K \perp OI$.
 Dựng hai hình bình hành OIO_1E, OFO_2K , ta có



Hình 1.8:

$OE \perp OK, OE = OK; OI \perp OF, OI = OF$ nên phép quay

$Q_{-90}^O : E \mapsto K; I \mapsto F; OIO_1E \mapsto OFO_2K$.

Do đó $OO_1 \mapsto OO_2$, do vậy $OO_1 = OO_2; OO_1 \perp OO_2$.

1.2.5 Định lý về dạng chính tắc của phép dời hình

Phép dời hình loại 1 và dời hình loại 2

Trong mặt phẳng tọa độ ta xác định góc định hướng của hai tia Ox , Oy như sau:

Hướng từ Ox đến Oy ngược chiều kim đồng hồ là hướng dương.

Hướng từ Ox đến Oy thuận chiều kim đồng hồ là hướng âm.

Kí hiệu $(Ox, Oy) = 45^0; (Oy, Ox) = -45^0$.

Định nghĩa 1.13. *Phép dời hình bảo toàn góc định hướng gọi là phép dời hình loại 1. Kí hiệu: D_1 .*

Phép dời hình đảo ngược góc định hướng gọi là phép dời hình loại 2. Kí hiệu: D_2 .

Ví dụ 1.14. *Phép tịnh tiến là phép dời hình loại 1, phép đối xứng trục là phép dời hình loại 2.*

Định lý về dạng chính tắc của phép dời hình trong mặt phẳng

Mọi phép dời hình loại 1 đều là phép tịnh tiến hoặc phép quay.
Mọi phép dời hình loại 2 đều là phép đối xứng trục hoặc là tích của phép đối xứng trục và phép tịnh tiến (còn gọi là phép đối xứng trượt).

1.3 Phép đồng dạng

1.3.1 Phép vị tự

Định nghĩa 1.15. Trong mặt phẳng cho điểm O và số $k \neq 0$, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k .

Kí hiệu: V_k^O

Tính chất: Dễ chứng minh được các tính chất mà ta kí hiệu là V1, V2 sau (xem trong [1;5])

V1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| MN$.

V2: Phép vị tự tỉ số k biến:

Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng.

Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Đoạn thẳng thành đoạn thẳng, tia thành tia.

Tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

Đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k| R$.

1.3.2 Phép đồng dạng tỉ số k

Định nghĩa 1.16. Một phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có $d(M', N') = kd(M, N)$.

Lưu ý: Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.

Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Ta kí hiệu phép đồng dạng tỉ số k là H_k

Tính chất: Để chứng minh được các tính chất mà ta kí hiệu là H1,...,H5 sau (xem trong [1;5])

H1: Phép đồng dạng tỉ số k biến:

Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng.

Đường thẳng thành đường thẳng.

Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tia thành tia.

Tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

Đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$.

Đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, cạnh thành cạnh.

H2: Tích hai phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng k_1, k_2 là một phép đồng dạng tỉ số $k_1.k_2$.

H3: Đảo ngược của phép đồng dạng tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $1/k$.

H4: Tập hợp các phép đồng dạng trên mặt phẳng là một nhóm gọi là nhóm đồng dạng.

H5: Mọi phép đồng dạng đều được phân tích thành tích một phép vị tự và một phép dời hình (hoặc tích một phép dời hình và một phép vị tự).

Từ tính chất H5 ta cũng suy ra dạng chính tắc của một phép đồng dạng tương tự như phép dời hình.

1.4 Phép nghịch đảo

Định nghĩa 1.17. Trên mặt phẳng lấy điểm O và số $k \neq 0$, phép nghịch đảo cực O phương tích k là biến đổi sao cho $M \mapsto M'$ theo quy tắc $\overrightarrow{OM}\overrightarrow{OM'} = k$, nói cách khác O, M, M' thẳng hàng và $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$.

Ta kí hiệu phép nghịch đảo cực O , phương tích k là: I_k^O .

Ta có chú ý ngay rằng phép nghịch đảo không phải là một phép dời hình, cũng không phải là phép đồng dạng, điều đó được chứng minh nhờ định lý sau

Định lý 1.18. Nếu $M' = I_k^O(M), N' = I_k^O(N)$ thì $M'N' = \frac{|k| MN}{\overline{OM}.\overline{ON}}$.

Thật vậy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \overline{ON'} - \overline{OM'} \\ &= \frac{k}{\overline{ON}} - \frac{k}{\overline{OM}} = \frac{k(\overline{OM} - \overline{ON})}{\overline{ON}.\overline{OM}} = \frac{k.\overline{NM}}{\overline{ON}.\overline{OM}} = \frac{k.\overrightarrow{NM}}{\overline{ON}.\overline{OM}}\end{aligned}$$

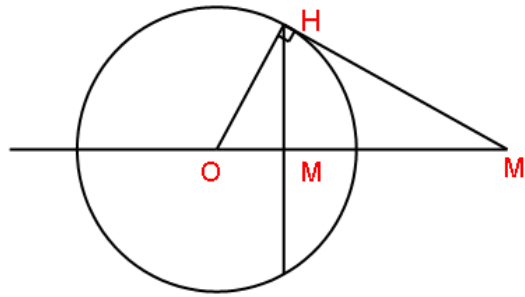
Suy ra $M'N' = \frac{k.MN}{\overline{ON}.\overline{OM}}$.

Tức là khoảng cách giữa M', N' không những phụ thuộc k, MN mà còn phụ thuộc OM, ON .

Tính chất: Dễ chứng minh được các tính chất cơ bản mà ta kí hiệu là I1,..., I6 sau(xem trong [5])

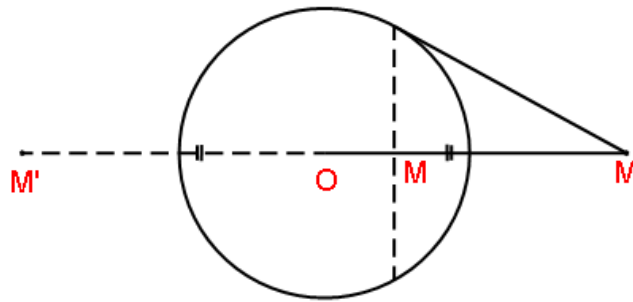
I1: Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp.

I2: Nếu $k > 0$ ta có phép nghịch đảo dương I_k^O , khi đó hai điểm M và điểm $M' = f(M)$ cùng nằm về một phía với điểm O .



Hình 1.9:

Nếu $k < 0$ ta có phép nghịch đảo âm I_k^o , khi đó hai điểm M và điểm $M' = f(M)$ nằm về hai phía với điểm O .



Hình 1.10:

Cách dựng điểm M' khi có điểm M như sau:

Với $k > 0$ vẽ đường tròn $(O; \sqrt{k})$, khi M ở trong đường tròn $(O; \sqrt{k})$ ta vẽ $MH \perp OM$, từ H kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt OM kéo dài tại M' . khi M ở ngoài đường tròn $(O; \sqrt{k})$ ta vẽ tiếp tuyến MH tới đường tròn, hạ $HM' \perp OM$ ta được ảnh M' .

Với $k < 0$ vẽ đường tròn $(O; \sqrt{|k|})$ ta làm tương tự (lấy đối xứng qua tâm O).

I3: Phép nghịch đảo dương có đường tròn tuyệt đối là $(O, \sqrt{k})$. Phép

nghịch đảo âm có đường tròn kép tương đối là $(O, \sqrt{|k|})$.

I4: Mọi đường thẳng đi qua cực O đều là kép tương đối.

I5: Phép nghịch đảo I_k^o biến những điểm ở trong đường tròn $(O, \sqrt{|k|})$ thành những điểm ở ngoài và ngược lại.

I6: Tích hai phép nghịch đảo cùng cực là một phép vị tự có tâm là cực nghịch đảo.

1.5 Phương trình đại số của các phép biến hình phẳng

Trong mặt phẳng Ôclit với hệ tọa độ trực chuẩn ta đã biết phương trình của biến đổi trực giao là (xem [1])

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}.a_{12} + a_{21}.a_{22} = 0 \end{cases}.$$

Đây là phương trình của phép dời hình (bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì).

Nếu bảo toàn hướng thì có phép dời hình loại 1.

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + b_1 \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b_2 \end{cases} ; D = 1.$$

Nếu đảo ngược hướng thì có phép dời hình loại 2.

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + b_1 \\ y' = x \sin \varphi - y \cos \varphi + b_2 \end{cases} ; D = -1.$$

1.5.1 Phương trình của phép tịnh tiến

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, giả sử vectơ $\vec{v} = (a, b)$ là vectơ tịnh tiến, điểm $M(x, y)$ ảnh tịnh tiến qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là $M'(x', y')$. Để lập phương trình đại số của phép tịnh tiến, ta phải tìm mối quan hệ giữa (x', y') và (x, y) . Nói cách khác là tìm biểu thức đại số biểu diễn x', y' qua x, y . Ta có $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$, chuyển

về thu được $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$. Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ được gọi là

phương trình của phép tịnh tiến, trong đó $\vec{v} = (a, b)$ là vectơ tịnh tiến, (x, y) là tọa độ điểm tạo ảnh, (x', y') là tọa độ điểm ảnh.

Chứng minh một số tính chất: chẳng hạn ta chứng minh tính chất T1, T3

T1: Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Tức là nếu $M' = T_{\vec{v}}(M); N' = T_{\vec{v}}(N)$ thì $MN = M'N'$.

Thật vậy, giả sử $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, ảnh của chúng có tọa độ lần lượt là $M'(x'_1, y'_1), N(x'_2, y'_2)$. Theo định nghĩa khoảng cách ta có

$$\begin{aligned} M'N' &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + a - y_1 - a)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $M'N' = MN$ (điều phải chứng minh).

T3: Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Gọi đường thẳng d có phương trình: $d: Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$.

Có biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = x \\ y' - b = y \end{cases} (*)$, thay x, y vào phương trình đường thẳng d ta được:

$$A(x' - a) + B(y' - b) + C = 0 \Leftrightarrow Ax' + By' + C - Aa - Bb = 0.$$

Vậy phương trình của d' : $Ax' + By' + C - Aa - Bb = 0$.

Nếu:

$$-Aa - Bb = 0 \Rightarrow d' \equiv d$$

$$-Aa - Bb \neq 0 \Rightarrow d' // d$$

Phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn và giữ nguyên bán kính.

Thật vậy gọi đường tròn (I, R) có phương trình là:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Thay x, y từ phương trình (*) vào ta được

$$(x' - a - \alpha)^2 + (y' - b - \beta)^2 = R^2.$$

Đây là phương trình đường tròn tâm $I(a + \alpha; b + \beta)$ là ảnh tịnh tiến của $I(\alpha; \beta)$ và giữ nguyên bán kính R .

Ví dụ 1.19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (2; 1)$. Hãy tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm $M(3; 4)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Giải. Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ nên ta có
$$\begin{cases} x' = 3 + 2 = 5 \\ y' = 4 + 1 = 5 \end{cases}.$$
 Vậy $M'(5; 5)$.

1.5.2 Phương trình của phép đối xứng trục

a, Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho trục Ox trùng với d , với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng trục d , khi đó ta có phương trình là
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

b, Tương tự phép đối xứng qua trục Oy là $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

Chứng minh một số tính chất

S1: Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Thật vậy, chọn hệ trục Oxy, Ox làm trục đối xứng.

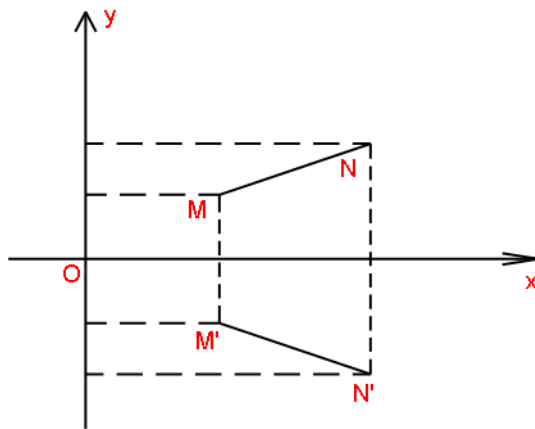
Giả sử $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, ảnh của chúng có tọa độ $M'(x'_1, y'_1), N'(x'_2, y'_2)$.

Khi đó ta có $\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ y'_1 = -y_1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x'_2 = x_2 \\ y'_2 = -y_2 \end{cases}$. Theo định nghĩa khoảng

cách ta có:

$$\begin{aligned} M'N' &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $M'N' = MN$.



Hình 1.11:

Ví dụ 1.20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $M(1; 5)$, đường tròn (C) có phương trình $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, đường thẳng d có phương trình $d : x - 2y + 4 = 0$.

a. Tìm ảnh của $M, (C), d$ qua phép đối xứng trục Ox.

b. Tìm ảnh của M qua phép đối xứng trục d .

Giải

a. Gọi $M', (C'), d'$ lần lượt là ảnh của $M, (C), d$ qua phép đối xứng trục Ox . Ta có $M'(1; -5)$. (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R=3$. Đường tròn (C') có tâm là $I' = S_{Ox}(I) = (1; 2)$ và bán kính $R=3$. Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(C') : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Gọi $N'(x'; y')$ là ảnh của $N(x; y)$ qua phép đối xứng trục Ox , ta có

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Thay vào phương trình của d ta được: $x' + 2y' + 4 = 0$.

Vậy phương trình của d' là: $x + 2y + 4 = 0$.

b. Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc với d có phương trình là:
 $2x + y - 7 = 0$.

Gọi M_0 là giao điểm của d và d_1 thì tọa độ của M_0 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ Vậy } M_0(2; 3).$$

Gọi M_1 là ảnh của M qua phép đối xứng trục d thì M_0 là trung điểm đoạn thẳng MM_1 nên $M_1(3; 1)$.

1.5.3 Phương trình của phép đối xứng tâm

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm I có tọa độ $I(x_0; y_0)$ và phép đối xứng tâm I , điểm $M(x; y)$, điểm $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I , khi đó ta có $M' = D_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = x_0 - x \\ y' - y_0 = y_0 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}.$$

Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$ được gọi là phương trình của phép đối xứng, trong đó $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng, $M(x; y)$ là tọa độ điểm tạo ảnh, $M'(x'; y')$ là tọa độ điểm ảnh.

Chứng minh một số tính chất của phép đối xứng tâm:

Z1: Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Tức là nếu $M' = Z_I(M)$; $N' = Z_I(N)$ thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ từ đó suy ra $M'N' = MN$.

Z2: Phép đối xứng tâm biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

Giả sử A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép đối xứng tâm I . Theo tính chất 1 ta có $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{BC}$. Vì A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}$ cùng phương, khi đó $\exists k : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{A'B'} = -k\overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{B'C'}$, tức ta có $\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{B'C'}$ cùng phương. Điều đó chứng tỏ A', B', C' thẳng hàng.

Ví dụ 1.21. Tìm ảnh của điểm $A(-2;3)$ qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$.

Giải: Gọi $A'(x'; y')$ là ảnh của điểm $A(-2;3)$ qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$.

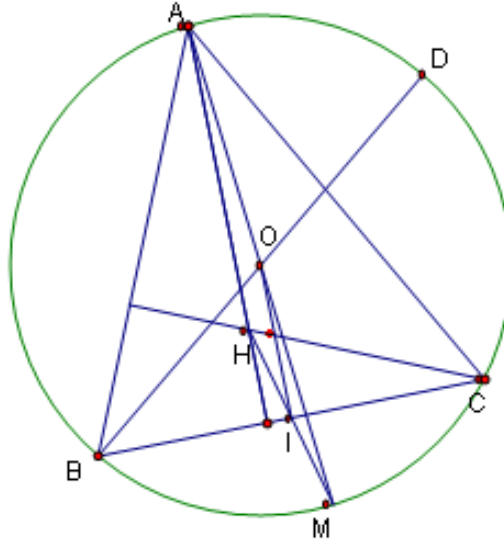
$$\text{Ta có } \begin{cases} x' = 2 - (-2) = 4 \\ y' = 2.2 - 3 = 1 \end{cases} \quad . \text{ Vậy } A'(4; 1)$$

Ví dụ 1.22. Cho hai điểm phân biệt B, C cố định (BC không phải là đường kính) trên đường tròn (O) , điểm A di động trên (O) . Chứng minh rằng khi A di động trên (O) thì trục tâm tam giác ABC di động trên một đường tròn.

Giải

Cách 1. Giải bằng phương pháp hình học thuần túy

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, I là trung điểm của BC. Tia AO và BO



Hình 1.12:

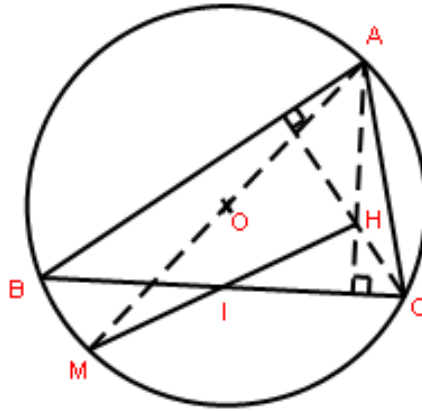
cắt (O) lần lượt tại M và D. Ta có $\widehat{BCD} = 90^\circ$ nên $DC \parallel AH$, $AD \parallel CH$ suy ra tứ giác ADCH là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OI}$.

Trong tam giác AHM có $OI \parallel AH$ và $OI = AH$ suy ra OI là đường trung bình của tam giác AHM, suy ra I là trung điểm của HM, suy ra H và M đối xứng nhau qua I. Vì BC cố định nên I cố định.

Khi A di động trên (O) thì M di chuyển trên (O). Do đó khi A di động trên (O) thì trực tâm tam giác ABC di động trên một đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I.

Cách 2. Giải bằng phương pháp đại số, ta dùng phương trình của phép đối xứng tâm.

Gọi I là trung điểm của BC ta có $OI \parallel AH$, $OI \perp BC$, $AH \perp BC$ suy ra OI là đường trung bình của tam giác AHM (M là điểm đối xứng của A qua O) nên $IM = IH$ tức $H = S_I(M)$. Gọi I là gốc tọa độ và đường tròn tâm $O(\alpha; \beta)$ có phương trình là $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$. Vì $M \in (O, R)$



Hình 1.13:

nên quỹ đạo của M có phương trình $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$.

Mặt khác S_I có phương trình $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x' = x \\ -y' = y \end{cases}$ thay vào phương trình đường tròn tâm O ta được

$$(-x' - \alpha)^2 + (-y' - \beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x' + \alpha)^2 + (y' + \beta)^2 = R^2.$$

Vậy đường tròn có phương trình $(x' + \alpha)^2 + (y' + \beta)^2 = R^2$ đối xứng với (O, R) qua $I(0,0)$ là quỹ tích của H.

1.5.4 Phương trình của phép quay

Lập phương trình của phép quay tâm $I(x_0; y_0)$.

Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $I(x_0; y_0)$, tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, quay trục tọa độ một góc α ta có mối quan hệ giữa x', y' và x, y như sau

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + x_0 \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0 \end{cases}$$

Đây là phương trình của phép quay tâm $I(x_0; y_0)$, góc quay α . Khi $I \equiv O$ ta có phương trình đơn giản hơn

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

Áp dụng phương trình của phép quay ta có thể chứng minh được các tính chất đã có, ngoài ra ta còn chứng minh được tính chất phép quay với góc quay $\alpha \neq 0$ có duy nhất một điểm bất động.

Thật vậy, gọi (X, Y) là điểm bất động của phép quay

$$\begin{cases} X = X \cos \varphi - Y \sin \varphi \\ Y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(1 - \cos \varphi) + Y \sin \varphi = 0 \\ -X \sin \varphi + Y(1 - \cos \varphi) = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 1 - \cos \varphi \end{vmatrix} = (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 2(1 - \cos \varphi) \neq 0$$

Nên hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(X, Y) = (0, 0)$.

Ví dụ 1.23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $O(0;0)$, $A(3;4)$ và $B(3;0)$. Hãy tìm ảnh của tam giác OAB qua phép quay tâm O góc quay 90° .

Giải

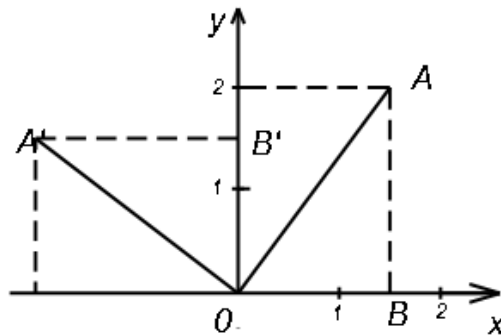
Do phép quay tâm O nên tâm quay trùng với gốc tọa độ.

Áp dụng phương trình của phép quay $\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$ để tìm

ảnh của các điểm O, A, B .

Ta có $Q_{90^\circ}^O : O \rightarrow O$.

Gọi $A'(x'_A; y'_A)$, do $A' = Q_{90^\circ}^O(A)$ nên



Hình 1.14:

$$\begin{cases} x_{A'} = x \cos \varphi - y \sin \varphi = 3 \cdot \cos 90^\circ - 4 \sin 90^\circ = -4 \\ y_{A'} = x \sin \varphi + y \cos \varphi = 3 \cdot \sin 90^\circ + 4 \cos 90^\circ = 3 \end{cases} \text{ . Vậy } A'(-4; 3)$$

Gọi $B'(x'_B; y'_B)$, do $B' = Q_{90^\circ}^o(B)$ nên

$$\begin{cases} x_{B'} = x \cos \varphi - y \sin \varphi = 3 \cdot \cos 90^\circ - 0 \cdot \sin 90^\circ = 0 \\ y_{B'} = x \sin \varphi + y \cos \varphi = 3 \cdot \sin 90^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ = 3 \end{cases} \text{ . Vậy } B'(0; 3)$$

Vậy qua $Q_{90^\circ}^o$ tam giác OAB biến thành tam giác $OA'B'$

1.5.5 Phân loại phép dời hình trong mặt phẳng

a. Phép dời hình loại 1

Rõ ràng phép tịnh tiến, phép quay là phép dời hình loại 1. Ngược lại

giả sử f là phép dời hình có phương trình
$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + b_1 \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b_2 \end{cases}$$

Nếu $\varphi = k2\pi$ thì phương trình trở thành
$$\begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases}$$
 đây là một

phép tịnh tiến.

Nếu $\varphi \neq k2\pi$ ta đi tìm điểm bất động của f

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \cos\varphi) + y \sin\varphi = b_1 \\ -x \sin\varphi + y(1 - \cos\varphi) = b_2 \end{cases}.$$

$$\text{Định thức } \begin{vmatrix} 1 - \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1 - \cos\varphi \end{vmatrix} = (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \neq 0 \text{ suy ra hệ}$$

có nghiệm duy nhất, nên f là phép quay tâm I , góc quay φ .

Vậy: mọi phép dời hình loại 1 hoặc là phép tịnh tiến, hoặc là phép quay.

b. Phép dời hình loại 2

Ta sẽ chứng minh mọi phép dời hình loại 2 hoặc là phép đối xứng trục hoặc tích của phép đối xứng trục và phép tịnh tiến (đối xứng trượt).

$$\text{Thật vậy, xét phép dời hình loại 2 } \begin{cases} x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi + b_1 \\ y' = x \sin\varphi - y \cos\varphi + b_2 \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } \varphi = k2\pi \text{ thì phương trình trở thành } \begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = -y + b_2 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} X = x + b_1 \\ Y = y - b_2 \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} x' = X \\ y' = -Y \end{cases} \text{ suy ra } f \text{ là tích của phép đối}$$

xứng trục và phép tịnh tiến với vectơ tịnh tiến $\vec{v} = (b_1; -b_2)$.

Nếu $\varphi \neq k2\pi$ ta đi tìm điểm bất động của f .

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \cos\varphi) - y \sin\varphi = b_1 \\ -x \sin\varphi + y(1 + \cos\varphi) = b_2 \end{cases}.$$

$$\text{Định thức } \begin{vmatrix} 1 - \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1 + \cos\varphi \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0 \text{ suy ra hệ có}$$

vô số nghiệm, đó là toàn bộ đường thẳng có phương trình

$$(1 - \cos\varphi)x - \sin\varphi y - b_1 = 0.$$

Khi đó f là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng có phương trình trên (điều phải chứng minh)

Ví dụ 1.24. Trong mặt phẳng Oxy cho vectơ $\vec{v} = (3; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $d : 2x - y = 0$. Tìm ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay 90° và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3; 1)$.

Giải

Ta cần tìm ảnh của d qua phép dời hình $T_{\vec{v}}Q_{90^\circ}^O$. Phép dời hình có ma

$$\text{trận là: } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ a \cos \alpha + b \sin \alpha & a \sin \alpha + b \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \text{ thay vào ta có } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{khi đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x' = y \\ y' - 3 = x \end{cases}$$

thay vào phương trình đường thẳng d ta được

$$2(y' - 3) - (1 - x') = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' - 7 = 0$$

Vậy phương trình $x' + 2y' - 7 = 0$ là phương trình đường thẳng d' .

1.5.6 Phương trình của phép vị tự

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $I(x_0; y_0)$ và phép vị tự tâm I tỉ số k kí hiệu V_K^I . $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x; y)$ qua V_K^I , khi đó ta có

$$\overrightarrow{IM'} = k \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$$

Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$ gọi là phương trình của phép vị tự tâm I tỉ số k .

Ta chứng minh tính chất V1 của phép vị tự

V1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| MN$

Thật vậy, giả sử $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, ảnh của chúng qua phép vị tự tâm I tỉ số k có tọa độ $M'(x'_1, y'_1), N(x'_2, y'_2)$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= (x'_2 - x'_1; y'_2 - y'_1) = (k(x_2 - x_1); k(y_2 - y_1)) \\ &= k(x_2 - x_1; y_2 - y_1) = k\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Theo định nghĩa khoảng cách ta có

$$\begin{aligned}M'N' &= \sqrt{k^2(x_2 - x_1)^2 + k^2(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{k^2((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)} \\ &= |k| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |k| MN\end{aligned}$$

Vậy $M'N' = |k| MN$.

Ví dụ 1.25. *Tìm ảnh của điểm $A(1;2)$ qua phép vị tự tâm $I(3;-1)$ tỉ số $k=2$.*

Giải. Gọi $A'(x'; y')$ là ảnh của A qua phép vị tự tâm $I(3;-1)$ tỉ số $k=2$, áp dụng biểu thức tọa độ ta có

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 = 2.1 - 1.3 = -1 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 = 2.2 + 1 = 5 \end{cases}$$

Vậy $A'(-1; 5)$.

Ví dụ 1.26. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 6 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.*

Giải: Do $V_k^O(d) = d' \Rightarrow d' // d \Rightarrow d'$ có phương trình: $3x + 2y + C = 0$. Lấy $M(0; 3)$ thuộc d . Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép vị tự đã cho, ta có $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -6 \end{cases}$ suy ra $M'(0; -6)$

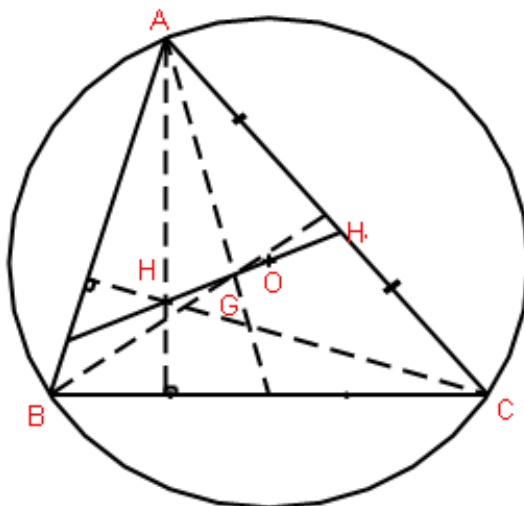
M' thuộc d' suy ra $C = 12$. Do đó phương trình d' là: $3x + 2y + 12 = 0$.

Ví dụ 1.27. Đường thẳng Ôle: trong tam giác, trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, và trọng tâm tam giác thẳng hàng. Đường thẳng đi qua ba điểm đó gọi là đường thẳng Ôle.

Giải.

Xét phép vị tự tâm G, tỉ số $-1/2$, ta có $V_{-1/2}^G$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \mapsto M \\ B \mapsto N \\ C \mapsto P \\ \Delta ABC \mapsto \Delta MNP \end{array} \right.$$



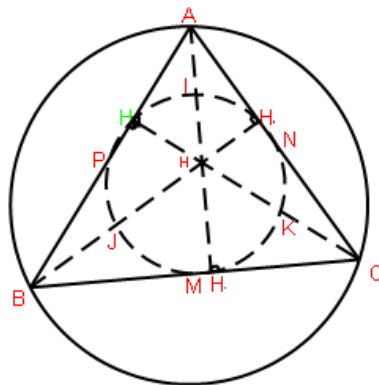
Hình 1.15:

Dễ thấy qua phép vị tự trục tâm tam giác biến thành trục tâm tam giác, vậy H biến thành O (trục tâm tam giác ABC biến thành trục tâm tam giác MNP). Suy ra G, O, H thẳng hàng và $\frac{GO}{GH} = \frac{-1}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 1.28. Đường tròn Ôle (đường tròn 9 điểm): trong tam giác 9 điểm sau nằm trên một đường tròn: chân 3 đường cao, 3 trung điểm của 3 cạnh, 3 trung điểm các đoạn thẳng nối từ trục tâm đến các đỉnh, đó là 9 điểm $H_1, H_2, H_3, M, N, P, I, J, K$.

Giải.

Xét phép vị tự tâm H tỉ số $-1/2$, ta có $V_{-1/2}^H :$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \mapsto I \\ B \mapsto J \\ C \mapsto K \end{array} \right.$$


Hình 1.16:

Lưu ý rằng nếu lấy H đối xứng qua các điểm M, N, P, H_1, H_2, H_3 thì ta được 6 điểm tương ứng đều thuộc (O). Từ 9 điểm trên đường tròn tâm O, qua $V_{-1/2}^H$ ta thu được 9 điểm $H_1, H_2, H_3, M, N, P, I, J, K$ thuộc đường tròn ảnh của (O), đó là đường tròn Ôle, có bán kính bằng $R/2$.

1.5.7 Phương trình của phép đồng dạng

Trước hết ta chứng minh tính chất H5: Mọi phép đồng dạng đều được phân tích thành tích một phép vị tự và một phép dời hình (hoặc tích một phép dời hình và một phép vị tự).

Thật vậy, giả sử $f : E^2 \rightarrow E^2$ là một phép đồng dạng tỉ số $k > 0$. Ta lấy một điểm O nào đó và gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k. Khi đó

V^{-1} là phép vị tự tâm O tỉ số $1/k$, và tích fV^{-1} là phép đồng dạng tỉ số 1 nên nó là phép dời hình D, ta có đẳng thức $fV^{-1} = D$ hay $f = D_oV$. Từ phương trình của phép dời hình và phép vị tự ta suy ra phương trình của phép đồng dạng phẳng
$$\begin{cases} x' = ka_{11}x + ka_{12}y + b_1 \\ y' = ka_{21}x + ka_{22}y + b_2 \end{cases}.$$

Khi $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} > 0$ ta có phép đồng dạng thuận, ngược lại ta có phép đồng dạng nghịch.

Ta cũng có kết quả sau

Phép đồng dạng thuận là tích của phép vị tự và phép dời hình loại 1. Mọi phép đồng dạng nghịch là tích của phép vị tự và phép dời hình loại 2. Từ đó có phương trình của phép đồng dạng thuận.

$$\begin{cases} x' = kx \cos \varphi - ky \sin \varphi + b_1 \\ y' = kx \sin \varphi + ky \cos \varphi + b_2 \end{cases}.$$

Phương trình của phép đồng dạng nghịch.

$$\begin{cases} x' = kx \cos \varphi + ky \sin \varphi + b_1 \\ y' = kx \sin \varphi - ky \cos \varphi + b_2 \end{cases}$$

1.5.8 Kết hợp các phép biến hình phẳng

a. Tích các phép tịnh tiến

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (a; b)$ có phương trình
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$
 hay $\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} M_T$ với ma trận biểu diễn là

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Tích của hai phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến được biểu diễn bởi tích hai ma trận có dạng

$$M_{T_1} M_{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Tích các phép quay

Phép quay tâm O, góc quay α $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$.

Hay $\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} M_Q(\alpha)$ với ma trận biểu diễn là

$$M_Q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Như vậy tích hai phép quay cùng tâm O (gốc tọa độ) là phép quay cùng tâm ấy với góc quay bằng tổng hai góc quay

$$\begin{aligned} M_{Q_1}(\alpha_1) \cdot M_{Q_2}(\alpha_2) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 \\ -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c. Tích các phép vị tự

Phép vị tự tâm O tỉ số k có phương trình $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

hay $\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} M_V(k)$ với ma trận biểu diễn là

$$M_V(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Các kết hợp khác.

Phép đối xứng trục có trục đối xứng trùng với Ox có ma trận biểu diễn là $M_S(\text{Ox}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và trục Oy là $M_S(\text{Oy}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Từ đó ta có, chẳng hạn tích của một phép tịnh tiến và một phép quay, có ma trận biến đổi là

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ a \cos \alpha + b \sin \alpha & a \sin \alpha + b \cos \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Hay tích của phép quay và phép vị tự có cùng tâm

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \alpha & k \sin \alpha & 0 \\ -k \sin \alpha & k \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cho ta ma trận của phép đồng dạng tỉ số k

Ví dụ 1.29. Chứng tỏ rằng các phép biến đổi sau đây là những phép đối xứng trượt. Hãy tìm trục đối xứng và các vectơ trượt.

$$a, \begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = -y + y_0 \end{cases} \quad b, \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + x_0 \\ y' = x \sin \varphi - y \cos \varphi + y_0 \end{cases} \quad c, \begin{cases} x' = \frac{4}{3}x - \frac{3}{5}y + 6 \\ y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 12 \end{cases}.$$

Giải

Phép biến đổi với ma trận A là phép đối xứng trượt $AA^t = I_2$ và $\det A = -1$. Quỹ tích trung điểm nối các đoạn thẳng nối các cặp điểm M và M' là một đường thẳng, đó chính là trục đối xứng của phép đối xứng trượt. Như vậy ta có phương trình của phép đối xứng trượt.

a, $M(x; y) \mapsto M'(x + x_0; -y + y_0)$. Gọi I là trung điểm của MM' khi đó I có tọa độ là $x_I = x + \frac{x_0}{2}; y_I = \frac{y_0}{2}$ suy ra trục đối xứng $2y - y_0 = 0$, vectơ trượt $\vec{v} = (x_0; 0)$.

b, Với $\varphi = k2\pi$ ta được phương trình giống phần a.

$\varphi \neq k2\pi$, gọi I là trung điểm của MM' khi đó

$$\begin{cases} 2x_I = x + x' \\ 2y_I = y + y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_I = x(\cos \varphi + 1) + y \sin \varphi + x_0 \\ 2y_I = x \sin \varphi - y(\cos \varphi - 1) + y_0 \end{cases}$$

Suy ra trục đối xứng có phương trình

$$(2x - x_0)(\cos \varphi - 1) + (2y - y_0) \sin \varphi = 0.$$

+ Ta có thể coi phép quay tâm $I(\alpha; \beta) \neq 0$, góc quay φ là tích của các phép dời hình sau đây

Tịnh tiến theo vectơ $(-\alpha; -\beta)$ để dịch chuyển tâm quay về gốc tọa độ

Quay quanh gốc tọa độ một góc φ

Tịnh tiến theo vectơ $(\alpha; \beta)$ để đưa tâm quay lại vị trí ban đầu

Như vậy ta có ma trận biểu diễn phép quay tâm $I(\alpha; \beta) \neq 0$, góc quay φ là

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi & \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi - \alpha & \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi - \beta & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.5.9 Phép nghịch đảo trong mặt phẳng

Thực chất phép nghịch đảo là phép đối xứng qua đường tròn. Nhiều sự kiện hình học xuất hiện khác với các phép biến hình, đồng dạng hay dời hình.

a. Phương trình của phép nghịch đảo(hệ tọa độ Đềcác)

Trong hệ trục tọa độ Đềcác Oxy gốc O trùng với cực nghịch đảo $M'(x'; y') = I_k^O(M)$, $M(x; y)$, khi đó theo định nghĩa

$$\rho \cdot \rho' = k \Rightarrow \rho' = k/\rho.$$

Ta lại có $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{k}{\rho^2}$. Vậy
$$\begin{cases} x' = \frac{kx}{\rho^2} = \frac{kx}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{ky}{\rho^2} = \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

là phương trình của phép nghịch đảo cực O, phương tích k.

Tính chất 1: Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp tức nếu $M' = f(M)$ thì ta cũng có $M = f(M')$. Thật vậy $M(x; y)$, $M'(x'; y')$, $M''(x''; y'')$ ta phải chứng minh $M'' \equiv M$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x' = \frac{kx}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x'' = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \\ y'' = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} \end{cases} \text{ nên suy ra}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{k \frac{kx}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{kx}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2 + y^2}\right)^2} \\ y'' = \frac{k \frac{ky}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{kx}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2 + y^2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{k^2 x}{(x^2 + y^2)\left(\frac{kx}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2 + y^2}\right)^2} \\ y'' = \frac{k^2 y}{\left(\frac{kx}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2 + y^2}\right)^2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \Leftrightarrow M''(x''; y'') \equiv M(x; y).$$

Với $k > 0$ tập hợp các điểm kép là đường tròn $(O; \sqrt{k})$.

Do M là điểm kép nên $M \equiv I_k^0(M)$, tức tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = \frac{kx}{x^2 + y^2} \\ y = \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = k.$$

Do $x, y \neq 0$ nên tập hợp các điểm kép là đường tròn $(O; \sqrt{k})$.

Với $k < 0$ tập hợp các điểm kép là $\emptyset$.

$$\text{Thật vậy ta có hệ } \begin{cases} x = \frac{kx}{x^2 + y^2} \\ y = \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = k (k < 0), \text{ hệ này vô}$$

nghiệm. Vậy tập hợp các điểm kép là $\emptyset$.

Với $k > 0$ các điểm ở trong đường tròn $(O; \sqrt{k})$ biến thành những điểm ở bên ngoài và ngược lại.

Thật vậy $M(x; y)$, M ở trong đường tròn $(O; \sqrt{k})$ suy ra

$$|\overrightarrow{OM}| < \sqrt{k} \Rightarrow x^2 + y^2 < k.$$

$$\begin{aligned}
M'(x'; y') &= I_k^0(M). \\
\begin{cases} x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \left(\frac{kx'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{ky'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 < k \\
&\Leftrightarrow k^2(x'^2 + y'^2) < k(x'^2 + y'^2) \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 > k \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| > \sqrt{k} \\
M'(x'; y') &\text{ nằm ngoài đường tròn } (O; \sqrt{k}).
\end{aligned}$$

Ngược lại ta chứng minh tương tự.

Với $k < 0$ các điểm ở trong đường tròn $(O; \sqrt{|k|})$ biến thành những điểm ở ngoài $(O; \sqrt{|k|})$ và ngược lại.

Thật vậy $M(x; y)$ ở trong đường tròn $(O; \sqrt{|k|})$ suy ra

$$|\overrightarrow{OM}| < \sqrt{|k|} \Rightarrow x^2 + y^2 < |k|$$

$$\begin{aligned}
M'(x'; y') &= I_k^0(M). \\
\begin{cases} x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} \end{cases} &\text{ thế vào biểu thức } (O; \sqrt{|k|}) \text{ suy ra} \\
|\overrightarrow{OM}| < \sqrt{|k|} &\Rightarrow x^2 + y^2 < |k| \text{ ta được}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{kx'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{ky'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 < |k| &\Leftrightarrow k^2(x'^2 + y'^2) < |k|(x'^2 + y'^2) \\
&\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 > |k| \Rightarrow |\overrightarrow{OM'}| > \sqrt{|k|}
\end{aligned}$$

$M'(x'; y')$ nằm ngoài đường tròn $(O; \sqrt{|k|})$.

Ngược lại ta chứng minh tương tự.

Tích hai phép nghịch đảo cùng cực O

Giả sử $I_{k_1}^o, I_{k_2}^o$ là hai phép nghịch đảo cùng cực O. Gọi M bất kì trong mặt phẳng sao cho $M' = I_{k_1}^o(M), M'' = I_{k_2}^o(M')$. Trong hệ tọa độ Oxy ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{k_1 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{k_1 y}{x^2 + y^2} \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} x'' = \frac{k_2 x'}{x'^2 + y'^2} = \frac{k_2 k_1 \frac{x}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{k_1 x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{k_1 y}{x^2 + y^2}\right)^2} \\ y'' = \frac{k_2 y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{k_2 k_1 \frac{y}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{k_1 x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{k_1 y}{x^2 + y^2}\right)^2} \end{array} \right.$$

Từ đó ta suy ra

$$x'' = \frac{k_2 k_1 \frac{x}{x^2 + y^2}}{\frac{k_1^2 (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{\frac{k_2 k_1 x}{x^2 + y^2}}{\frac{k_1^2}{x^2 + y^2}} = \frac{k_2}{k_1} x. \text{ và}$$

$$y'' = \frac{k_2 k_1 \frac{y}{x^2 + y^2}}{\frac{k_1^2 (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{\frac{k_2 k_1 y}{x^2 + y^2}}{\frac{k_1^2}{x^2 + y^2}} = \frac{k_2}{k_1} y.$$

$$\text{Vậy } I_{k_1}^o \circ I_{k_2}^o (M) = M'' = V_{\frac{k_2}{k_1}}^o (M).$$

Kết luận: Tích hai phép nghịch đảo cùng cực là một phép vị tự cùng cực ấy với tỉ số vị tự bằng tỉ số hai phương tích.

Tương tự tích của phép nghịch đảo cực O phương tích k với phép vị tự tâm O tỉ số h là một phép nghịch đảo cực O phương tích $k.h$

b. Ảnh của đường thẳng và đường tròn qua phép nghịch đảo

Ảnh của đường thẳng qua phép nghịch đảo

Qua phép nghịch đảo mọi đường thẳng đi qua cực O biến thành chính nó, còn mọi đường thẳng không đi qua O thì biến thành đường tròn đi qua cực O.

Chứng minh

Giả sử đường thẳng Δ có phương trình là $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

Gọi $\Delta' = I_k^0(\Delta)$. Do I_k^0 có tính chất đối hợp nên
$$\begin{cases} x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}.$$

Thay vào phương trình Δ ta được

$$A \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} + B \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} + C = 0 \Leftrightarrow Akx' + Bky' + C(x'^2 + y'^2) = 0(*).$$

Nếu Δ đi qua cực O suy ra $C=0$, khi đó

$$\Delta' : Akx' + Bky' = 0 \Leftrightarrow Ax' + By' = 0 \Rightarrow \Delta' \equiv \Delta$$

Vậy mọi đường thẳng đi qua cực O biến thành chính nó.

Nếu Δ không đi qua cực O suy ra $C \neq 0$, ta chia 2 vế của (*) cho C

$$\begin{aligned} \Delta' : x'^2 + y'^2 + \frac{Ak}{C}x' + \frac{Bk}{C}y' &= 0 \\ \Leftrightarrow x'^2 + 2\frac{Ak}{2C}x' + \left(\frac{Ak}{2C}\right)^2 + y'^2 + 2\frac{Bk}{2C}y' + \left(\frac{Bk}{2C}\right)^2 - \frac{Ak^2 + Bk^2}{4C^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x' + \frac{Ak}{C}\right)^2 + \left(y' + \frac{Bk}{C}\right)^2 = \frac{Ak^2 + Bk^2}{4C^2} > 0 &\left(\begin{cases} \forall A^2 + B^2 \neq 0 \\ k \neq 0, C \neq 0 \end{cases} \right) \end{aligned}$$

Suy ra Δ' là đường tròn có tâm và bán kính

$$I_1\left(\frac{-Ak}{2C}, \frac{-Bk}{2C}\right), R = \frac{|k|}{2} \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2}}.$$

Vậy mọi đường thẳng không đi qua O thì biến thành đường tròn đi qua cực O.

Kết luận: Nếu gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép nghịch đảo cực O, khi đó

$$\Delta \text{ đi qua O thì } \Delta' \equiv \Delta$$

$$\Delta \text{ không đi qua O thì } \Delta' \text{ là một đường tròn đi qua O.}$$

Ảnh của đường tròn qua phép nghịch đảo

Qua phép nghịch đảo mọi đường tròn đi qua cực O biến thành đường thẳng không đi qua cực O.

Chứng minh

Giả sử đường tròn $\gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0 (a^2 + b^2 \neq 0)$.

Ta có $\gamma' = I_k^0(\gamma)$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\gamma' : & \left(\frac{kx'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{ky'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \frac{2kax'}{x'^2 + y'^2} + \frac{2kby'}{x'^2 + y'^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & k^2x'^2 + k^2y'^2 + 2akx'(x'^2 + y'^2) + 2bky'(x'^2 + y'^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & k^2 + 2akx' + 2bky' = 0 \Leftrightarrow k + 2ax' + 2by' = 0 \\ \Leftrightarrow & 2ax' + 2by' + k = 0\end{aligned}$$

Suy ra γ' là đường thẳng không đi qua cực.

Qua phép nghịch đảo mọi đường tròn không đi qua cực O biến thành đường tròn không đi qua cực O.

Chứng minh

Giả sử đường tròn $\gamma : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 (a^2 + b^2 - c > 0, c \neq 0)$.

Ta có $\gamma' = I_k^0(\gamma)$.

khi đó ta có

$$\begin{aligned}\gamma' : & \left(\frac{kx'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{ky'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \frac{2kax'}{x'^2 + y'^2} + \frac{2kby'}{x'^2 + y'^2} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & k^2x'^2 + k^2y'^2 + 2akx'(x'^2 + y'^2) + 2bky'(x'^2 + y'^2) + c(x'^2 + y'^2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & k^2 + 2akx' + 2bky' + c(x'^2 + y'^2) = 0 (c \neq 0) \\ \Leftrightarrow & x'^2 + y'^2 + \frac{a}{c}kx' + \frac{b}{c}ky' + \frac{k^2}{c^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x'^2 + 2\frac{a}{2c}kx' + \left(\frac{a}{2c}k\right)^2 + y'^2 + 2\frac{b}{2c}ky' + \left(\frac{b}{2c}k\right)^2 - \frac{a^2k^2 + b^2k^2}{c^2} + \frac{k^2}{c^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x' + \frac{a}{c}k\right)^2 + \left(y' + \frac{b}{c}k\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c)k^2}{c^2} + \frac{k^2}{c^2} > 0\end{aligned}$$

Suy ra γ' là đường tròn không đi qua cực có tâm và bán kính là

$$I_2\left(\frac{-ak}{c}, \frac{-bk}{c}\right), R = \sqrt{\frac{k^2(a^2 + b^2 - c)}{|c|}}.$$

Kết luận: Nếu gọi γ' là ảnh của đường tròn γ qua phép nghịch đảo cực O, khi đó

γ đi qua O thì γ' là đường thẳng không đi qua O.

γ không đi qua O thì γ' là đường tròn không đi qua O với tâm và bán kính xác định như trên.

c. Tính chất bảo giác của phép nghịch đảo trong mặt phẳng

Việc chứng minh tính chất bảo giác của các phép nghịch đảo trong trường hợp tổng quát khá phức tạp. Ở đây ta minh họa việc chứng minh một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn

+ Phép nghịch đảo biến hai đường thẳng song song thành hai đường tròn tiếp xúc hoặc một đường thẳng tiếp xúc với một đường tròn.

Giả sử $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ là hai đường thẳng có phương trình lần lượt là

$$\Delta_1 : Ax + By + C_1; \Delta_2 : Ax + By + C_2 (C_1 \neq C_2).$$

Ta coi hai đường thẳng trên là pháp dạng tức $A^2 + B^2 = 1$.

Trường hợp $C_1, C_2 \neq 0$ (hai đường thẳng không qua cực O) thì

Δ'_1 là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

$$I_1\left(\frac{-A}{2C_1}, \frac{-B}{2C_1}\right); R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C_1^2}} (k = 1).$$

Δ'_2 là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

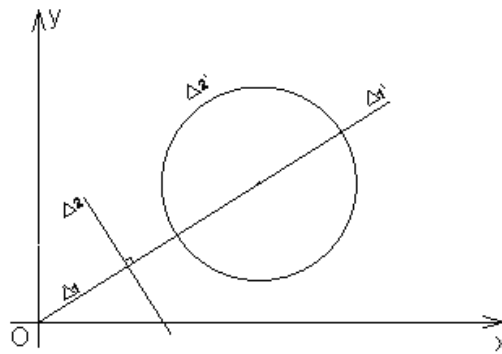
$$I_2\left(\frac{-A}{2C_2}, \frac{-B}{2C_2}\right); R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C_2^2}} (k = 1).$$

Bằng các tính toán ta được $I_1 I_2 = R_1 + R_2$ hoặc $I_1 I_2 = |R_2 - R_1|$ suy ra điều phải chứng minh.

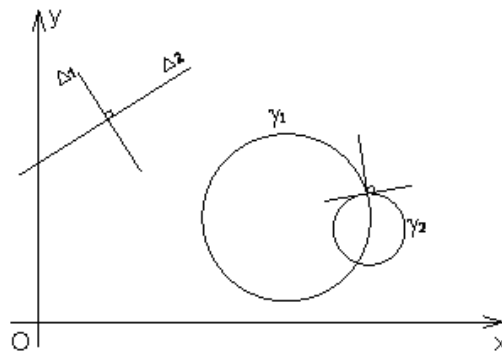
Trường hợp $C_1 = 0; C_2 \neq 0$, khi đó $\Delta'_1 : Ax + By = 0$ là đường thẳng bất động và Δ'_2 là đường tròn tâm I_2 , bán kính R_2 .

Khoảng cách từ I_2 đến Δ'_1 là $d = \frac{\left| A \frac{-A}{2C_2} + B \frac{-B}{2C_2} \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{2C_2}$ đúng bằng bán kính của đường tròn Δ'_2 là $R_2 = \frac{1}{2C_2}$. Vậy Δ'_1 tiếp xúc Δ'_2 .

+ Phép nghịch đảo biến hai đường thẳng vuông góc thành hai đường tròn trực giao hoặc một đường thẳng đi qua tâm đường tròn.



Hình 1.17:

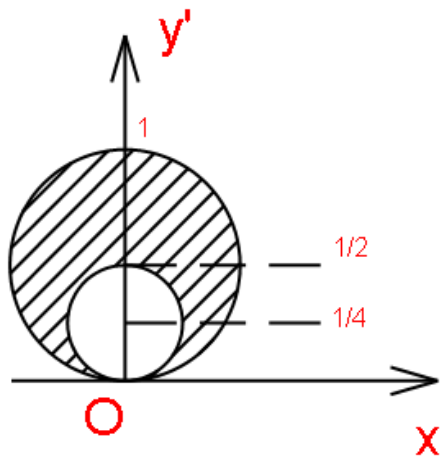


Hình 1.18:

Ảnh của một miền

Bài toán 1. Cho dải giới hạn bởi hai đường thẳng song song có phương trình là $y = 1; y = 2$. Tìm ảnh của dải đó qua phép nghịch đảo cực O , phương tích 1.

Giải



Hình 1.19:

Trước tiên ta tìm ảnh của đường thẳng $\Delta_1 : y - 1 = 0$ qua I_1^o . Gọi $\Delta'_1 = I_1^o(\Delta_1)$. Do I_1^o có tính chất đối hợp nên $\begin{cases} x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$ thay vào phương trình Δ_1 ta được

$$\begin{aligned} \Delta'_1 : \frac{1 \cdot y'}{x'^2 + y'^2} - 1 &= 0 \Leftrightarrow y' - (x'^2 + y'^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - y' = 0 \Leftrightarrow x'^2 + (y' - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

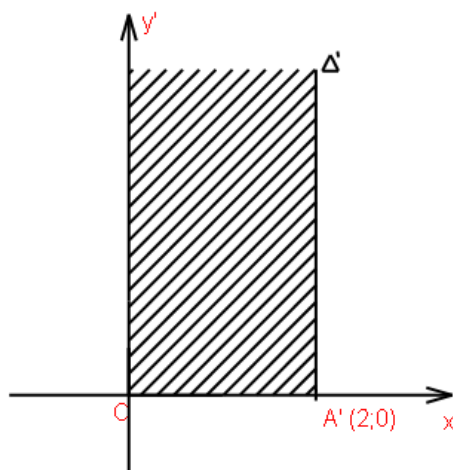
Suy ra Δ'_1 là đường tròn có tâm và bán kính $I_1(0; \frac{1}{2}), R = \frac{1}{2}$.

Làm tương tự ta cũng tìm được Δ'_2 là ảnh của Δ_2 qua I_1^o có tâm và bán kính là $I_2(0; \frac{1}{4}), R = \frac{1}{4}$.

Vậy ảnh của dải qua I_1^o là phần gạch chéo giới hạn bởi hai đường tròn nói trên .

Bài toán 2. Cho nửa đường tròn có đường kính OA, A(2,0), I(1,0). Tìm ảnh của nửa hình tròn tâm I, bán kính 1 qua phép nghịch đảo cực O, phương tích 4.

Giải:



Hình 1.20:

Ta có OA là đường thẳng đi qua cực O nên ảnh của OA là chính nó. Cung tròn OA là một phần của đường tròn tâm I(1;0). Ta tìm ảnh của đường tròn $\gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0$ qua I_4^o . Ta có

$$\gamma' = I_4^o(\gamma) \Rightarrow \gamma' : \left(\frac{4x'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{4y'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \frac{-2 \cdot 4 \cdot 2x'}{x'^2 + y'^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x'^2 + 16y'^2 - 8x'(x'^2 + y'^2) = 0 \Leftrightarrow 16 - 8x' \Leftrightarrow x' - 2 = 0$$

Ảnh là đường thẳng Δ' song song với Oy' .

Để xác định đúng ảnh của miền ta xét ảnh của điểm $A(2,0)$, ta có

$$\begin{cases} x' = \frac{4x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{4y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_A = \frac{4 \cdot 2}{2^2 + 0^2} = 2 \\ y'_A = \frac{4 \cdot 0}{2^2 + 0^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A' \equiv A.$$

Xét ảnh của $J(1,1)$, ta có

$$\begin{cases} x'_j = \frac{4x}{x^2 + y^2} \\ y'_j = \frac{4y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_j = \frac{4}{2} = 2 \\ y'_j = \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow J'(2, 2)$$

Vậy ảnh cần tìm là phần gạch chéo trên hình vẽ.

Kết luận: trong chương 1 ta đã nghiên cứu các phép biến hình trong mặt phẳng, từ định nghĩa, kí hiệu, một số tính chất và đặc biệt nêu ra được các phương trình đại số của các phép biến hình. Một điều mới là ngoài cách chứng minh hình học thuần túy, ta dùng phương trình đại số của các phép biến hình để chứng minh một số tính chất của các phép biến hình, đồng thời ứng dụng vào để giải bài toán một cách đơn giản hơn so với việc giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Nhờ phương trình đại số và công cụ của ma trận mà ta thấy việc kết hợp các phép biến hình rất hiệu quả, đặc biệt áp dụng cách làm được vào máy tính. Chính cách tiếp cận các phép biến hình bằng công cụ đại số hay công cụ ma trận đã cho ta các thuật toán rất tốt trong công nghệ thông tin.

Chương 2

Các phép biến hình trong không gian

Với các kết quả chương 1, tôi sẽ tiếp tục cách làm đó để nghiên cứu các phép biến hình trong không gian. Mặc dù có nhiều kết quả tương tự, nhưng khi có các phương trình đại số của các phép biến hình trong không gian ta lại thấy thu được những kết quả khá tốt, dễ nhận thấy hơn so với cách làm hình học thuần túy.

2.1 Nhắc lại các khái niệm

Định nghĩa 2.1. *Ánh xạ $f : E^3 \rightarrow E^3$ là ánh xạ đẳng cự tức bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì từ E^3 vào E^3 được gọi là biến đổi đẳng cự của không gian *Ơclit*.*

Chú ý rằng vì f là đơn ánh trong không gian E^3 nên nó là một song ánh. Ánh xạ nền $\vec{f}$ liên kết với f là một biến đổi tuyến tính trực giao của $\vec{E}^3$.

Dễ kiểm tra được các biến đổi đẳng cự của $\overrightarrow{E^3}$ làm thành một nhóm, đó là nhóm con của nhóm $Af(E^3)$. Ta có thể kí hiệu nhóm con này là $Isom(E^3)$.

Ví dụ: Các phép tịnh tiến trong E^3 , định nghĩa tương tự trong E^2 , là phép đẳng cự, chúng làm thành một nhóm $T(E^3)$, đó là nhóm con của nhóm $Isom(E^3)$.

Phép dời hình loại 1 và loại 2 trong E^3 .

Biến đổi afin $f : E^3 \rightarrow E^3$ có biểu thức tọa độ đối với hệ tọa độ trực chuẩn $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ là

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ z' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases} ; A = (a_{ij})_{3,3}$$

khi đó A cũng là ma trận của phép đẳng cấu tuyến tính $\vec{f}$ đối với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Bởi vậy biến đổi tuyến tính f là biến đổi đẳng cự khi và chỉ khi A là ma trận trực giao, tức $A^t A = I_3$. Vì A là ma trận trực giao nên $\det(A) = \pm 1$ (xem trong [1] hoặc [6]).

Định nghĩa 2.2. Nếu A là ma trận trực giao và $\det(A)=1$ thì f gọi là phép dời hình loại 1. Nếu A là ma trận trực giao và $\det(A)=-1$ thì f gọi là phép dời hình loại 2 (hay phép phản chiếu).

Kiểm tra được tập hợp các phép dời hình loại 1 trong E^3 làm thành một nhóm kí hiệu là $Isom^+(E^3)$, tập hợp các phép dời hình loại 2 không làm thành một nhóm.

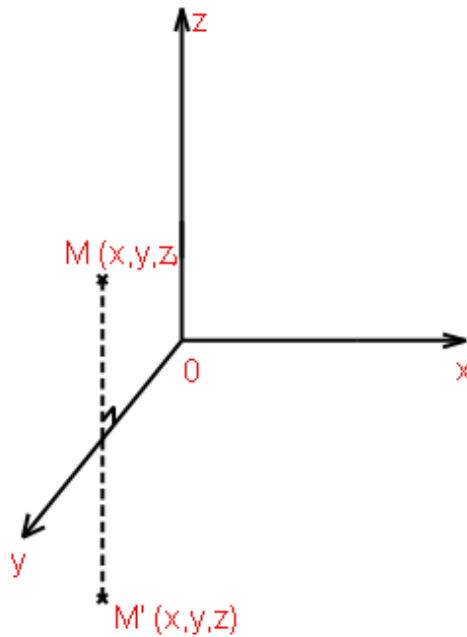
2.1.1 Phép đối xứng qua một điểm, một đường thẳng, một mặt phẳng

a. Phép đối xứng qua một điểm

Nếu $I(a, b, c)$, $M(x, y, z)$, thì $M'(x', y', z')$ là đối xứng của M qua I khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = a \\ \frac{y+y'}{2} = b \\ \frac{z+z'}{2} = c \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x' = -x + \frac{a}{2} \\ y' = -y + \frac{b}{2} \\ z' = -z + \frac{c}{2} \end{cases}, \text{ ma trận } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Phép đối xứng qua một đường thẳng



Hình 2.1:

Lấy hệ trục tọa độ sao cho $\Delta \equiv Ox$, với mọi $M(x, y, z)$, gọi M' là điểm

đối xứng của M qua $\Delta \equiv Ox$, ta có

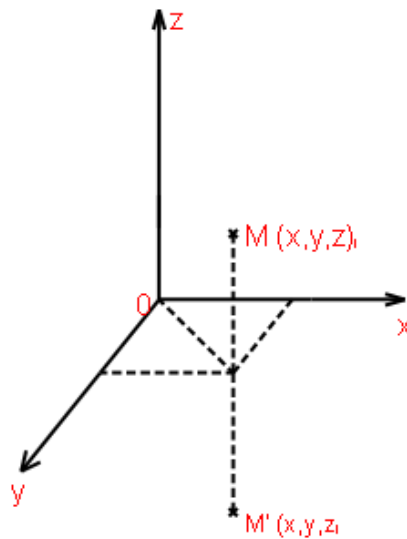
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}, \text{ ma trận } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tương tự ta có phương trình của phép đối xứng trục với trục đối xứng là Oy , Oz .

Kí hiệu phép đối xứng trục Δ là S_{Δ} .

c. Phép đối xứng qua một mặt phẳng

Nếu mặt phẳng π trùng với mặt phẳng (xOy) ta có hình vẽ



Hình 2.2:

Ta kí hiệu phép đối xứng này là S_{π} , ta có $S_{\pi} : M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$.

Khi đó S_π có phương trình là $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Tương

tự khi chọn π là mặt phẳng (yOz), mặt phẳng (zOx).

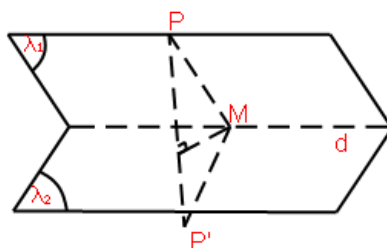
Ta có phép đối xứng qua mặt phẳng là dời hình loại 2.

Chú ý rằng biến đổi đẳng cự trong E^3 khác phép đồng nhất, có mọi điểm trên mặt phẳng là điểm bất động thì $f \equiv S_\pi$.

2.1.2 Phép quay quanh một đường thẳng

Một phép dời hình $f : E^3 \rightarrow E^3$ gọi là phép quay quanh một đường thẳng d nếu f biến các điểm của d thành chính nó. Nếu ta lấy điểm $P \notin d$ và $P' = f(P)$. Gọi α_1 là mặt phẳng đi qua d và P , α_2 là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng PP' .

Với mọi $M \in d$ ta có $f(M) = M$. Do f bảo toàn khoảng cách nên



Hình 2.3:

$MP = MP'$ suy ra $d \in \alpha_2$. Như vậy $\alpha_1 \cap \alpha_2 = d$. Gọi g_1, g_2 lần lượt là các phép đối xứng qua α_1, α_2 thì tích $g_2 \circ g_1$ biến mỗi điểm trên d thành chính nó và biến P thành P' . Như vậy $f = g_2 \circ g_1$.

Nói cách khác mọi phép quay quanh một đường thẳng đều có thể xem là tích của hai phép đối xứng qua mặt phẳng (có thể chọn hai mặt phẳng này bằng nhiều cách khác nhau). Ngược lại tích của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (cắt nhau theo một đường thẳng d) là một phép quay quanh một đường thẳng d .

2.1.3 Điểm bất động và vectơ bất động của phép biến đổi đẳng cự

Định nghĩa 2.3. Cho $f : E^3 \rightarrow E^3$, điểm M gọi là điểm bất động của f nếu $f(M) = M$

Vectơ $\vec{u}$ gọi là vectơ bất động của $\vec{f}$ nếu $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. Ta kí hiệu $Inv(f) = \{M \in E^3 / f(M) = M\}$: tập hợp các điểm bất động
 $Inv(\vec{f}) = \{\vec{u} \in E^3 / \vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}\} = \text{Ker}(\vec{f} - \vec{Id})$: tập hợp các vectơ bất động.

Định lý 2.4. Cho $f : E^3 \rightarrow E^3$ là biến đổi đẳng cự. Khi đó

- Nếu $Inv(f) \neq \emptyset$ thì $Inv(f)$ là đường thẳng hoặc mặt phẳng có phương là $Inv(\vec{f})$.
- Nếu $Inv(\vec{f}) = \emptyset$ thì f có điểm bất động duy nhất.
- Nếu $Inv(\vec{f})$ có chiều bằng q thì f là dời hình loại 1 hay dời hình loại 2 tùy theo $3-q$ là số chẵn hay số lẻ.

Chứng minh

- Nếu $Inv(f) \neq \emptyset$ thì $\exists I \in E^3 : f(I) = I$. Gọi α đường thẳng hoặc mặt phẳng đi qua I và có phương là $Inv(\vec{f})$. Khi đó

$$M \in Inv(f) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{If(M)} = \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(I)f(M)} = \overrightarrow{IM}$$

$$\vec{f}(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \in Inv(\vec{f}) \Leftrightarrow M \in \alpha$$

Vậy $Inv(f) = \alpha$.

b. Giả sử f có phương trình

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ z' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases} ; A = (a_{ij})_{3,3}.$$

Để tìm điểm bất động của f ta phải giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (a_{11}-1)x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + (a_{22}-1)y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-1)z = b_3 \end{cases}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\det(A - I) \neq 0$. Thật vậy $\vec{u} \in Inv(\vec{f})$, nếu $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ hay $(\vec{f} - Id)(\vec{u}) = \vec{0}$. Theo giả thiết $Inv(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$ thì $\det(\vec{f} - Id) \neq 0$ tức $\det(A - I) \neq 0$. Vì $\vec{f}$ là biến đổi trực giao nên có thể tìm được một hệ tọa độ trực chuẩn sao ma trận của f (tức là của $\vec{f}$) có dạng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \cos\varphi - \sin\varphi & \\ & & & & \sin\varphi - \cos\varphi & \end{pmatrix}$$

Khi đó $\det(A) = (-1)^{3-q}$, từ đó suy ra :

Nếu $3-q$ chẵn thì $\det(A)=1$ suy ra f là phép dời hình loại 1.

Nếu $3-q$ lẻ thì $\det(A)=-1$ suy ra f là phép dời hình loại 2.

Ta còn có định lí sau

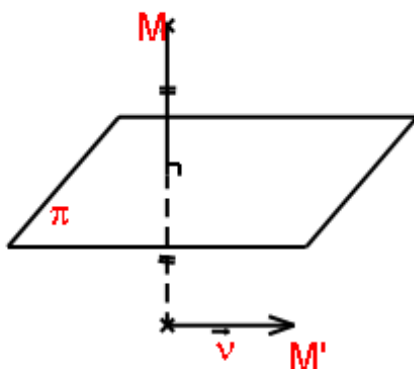
Định lý 2.5. Mọi phép đẳng cự $f : E^3 \rightarrow E^3$ luôn viết được một cách duy nhất dạng $f = T_{\vec{v}} \circ g$ trong đó g là biến đổi đẳng cự có điểm bất động còn $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

2.1.4 Phân loại phép biến đổi đẳng cự trong E^3

a. Phép đối xứng trượt

Tích của một phép đối xứng $g : E^3 \rightarrow E^3$ qua mặt phẳng π và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}} (\vec{v} \in \vec{\pi})$ được gọi là phép đối xứng trượt của E^3 .

Hiển nhiên $f = T_{\vec{v}} \circ g = g \circ T_{\vec{v}}$ và phép đối xứng trượt là phép dời hình



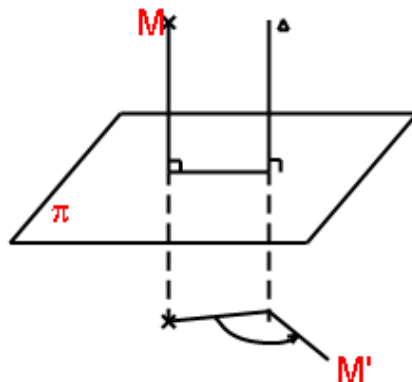
Hình 2.4:

loại 2. Đặc biệt khi $\vec{v} = \vec{O}$ phép đối xứng trượt trở thành phép đối xứng qua mặt phẳng π .

b. Phép đối xứng quay

Tích của một phép đối xứng g qua mặt phẳng π và một phép quay Q quanh đường thẳng Δ , vuông góc với π gọi là phép đối xứng quay.

Rõ ràng $f = Q_{\Delta} \circ g = g \circ Q_{\Delta}$ và khi phép quay Q_{Δ} thành phép đối xứng



Hình 2.5:

qua Δ thì f gọi là phép đối xứng qua I là giao của Δ và π .

Chú ý rằng $Inv(f) = I$ và $Inv(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$.

c. Phép xoắn ốc

Tích của phép quay Q_{Δ} quanh trục Δ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} \in \vec{\Delta}$ ($\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của Δ), gọi là phép xoắn ốc.

Kí hiệu $f = T_{\vec{v}} \circ Q_{\Delta}$ và $f = Q_{\Delta} \circ T_{\vec{v}}$.

Rõ ràng phép xoắn ốc là phép dời hình loại 1 của E^3 .

Nếu $\vec{v} = \vec{0}$, phép xoắn ốc trở thành phép quay Q_{Δ} .

Nếu $\vec{v} \neq 0$, rõ ràng $Inv(f) = 0$ và $Inv(\vec{f}) = \vec{\Delta}$.

Định lý 2.6. Mọi phép dời hình loại 1 trong E^3 là một phép xoắn ốc, đặc biệt là phép tịnh tiến hoặc phép quay quanh đường thẳng.

Chứng minh

$f : E^3 \rightarrow E^3$ là dời hình loại 1. Khi đó $Inv(\vec{f})$ có số chiều 3 hoặc 1.

Ta có $f = T_{\vec{v}} \circ g$

Nếu $Inv(\vec{f})$ có chiều 3, tức $\vec{f} = id_{E^3}$ thì f là phép tịnh tiến .

Nếu $Inv(\vec{f})$ có chiều 1 thì g là phép dời hình loại 1 có điểm bất động nằm trên Δ đi qua I, có phương $\vec{\Delta} = Inv(\vec{f})$.

Vậy g là phép quay quanh Δ , do đó f là phép xoắn ốc.

Định lý 2.7. Mọi phép dời hình loại 2 hoặc là phép đối xứng trượt hoặc là phép đối xứng quay.

Chứng minh

Nếu $f : E^3 \rightarrow E^3$ là dời hình loại 2 thì $Inv(\vec{f})$ có số chiều bằng 2 hoặc bằng 0. Xét $f = T_{\vec{v}} \circ g$

Nếu $Inv(\vec{f})$ có chiều 2 thì g là dời hình loại 2 có các điểm bất động nằm trên mặt phẳng π đi qua I có phương $\vec{\pi} = Inv(\vec{f})$. Vậy g là phép đối xứng qua mặt phẳng π , do đó f là phép đối xứng trượt.

Nếu $Inv(\vec{f})$ có chiều 0, khi đó f có điểm bất động duy nhất I. Gọi $\vec{\alpha}$ là không gian riêng của $\vec{f}$ ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$, có hai trường hợp.

- Nếu $\dim \vec{\alpha} = 1$ ta gọi Δ là đường thẳng đi qua I có phương $\vec{\alpha}$ thì f/Δ là phép đối xứng qua I. Gọi β là mặt phẳng đi qua I vuông góc với Δ thì f/β là phép quay quanh điểm I. Vậy f là đối xứng quay.

- Nếu $\dim \vec{\alpha} = 3$ thì f hiển nhiên là phép đối xứng qua I, có thể xem như là phép đối xứng quay.

Kết luận: Trong E^3 nếu f là phép dời hình thì:

f là phép dời hình loại 1, dạng chính tắc là một trong ba phép sau:

Phép xoắn ốc $T_{\vec{v}} \circ Q_{\Delta}$.

Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Phép quay quanh một đường thẳng Δ .

f là phép dời hình loại 2 dạng chính tắc là một trong hai phép sau:

Phép đối xứng trượt $T_{\vec{v}} \circ S_{\pi}$.

Phép đối xứng quay $Q_{I^0} S_{\pi}$.

Chú ý: Trường hợp f là dời hình loại 1, đường thẳng trục $\vec{\Delta}$ của f là tập hợp các điểm bất động của f nhận được bằng cách giải phương trình ma trận $AX = X$ với ẩn X , góc φ được xác định bởi $\text{vet}(A) = 1 + 2 \cos \varphi$, $\sin \varphi$ lấy dấu của tích hỗn tạp $(\vec{x}, f(\vec{x}), \vec{u})$ với mọi $\vec{x} \parallel \vec{u}$, $\vec{u}$ đã chuẩn hóa, định phương và hướng của $\vec{\Delta}$.

Trong các phần sau ta phân tích f thành các phép biến hình thành phần, lúc đó có các thành phần đặc trưng như: trục quay, mặt phẳng đối xứng, vectơ tịnh tiến,...

Bài tập áp dụng

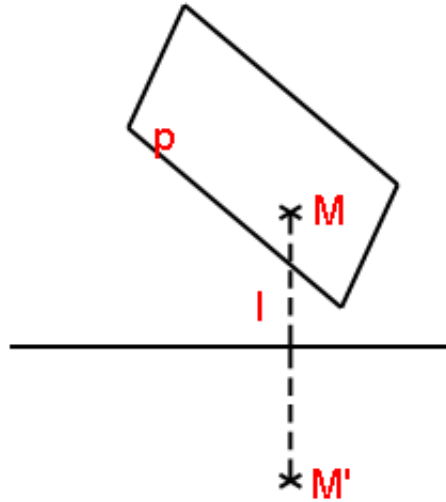
Bài tập 1. Lập phương trình của hình đối xứng P' của mặt phẳng $P : 2x + y - z - 1 = 0$ qua đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$.

Giải

$$\text{Ta có } \Delta : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t \\ x = t - 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3t + 1 \\ z = t \end{cases}.$$

Ta lập công thức cho phép đối xứng qua đường thẳng Δ .

Cho $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$, kí hiệu I là trung điểm của MM' và vectơ $\vec{u} = (1; 3; 1)$.



Hình 2.6:

$$\begin{aligned}
 M' = S_{\Delta}(M) &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ I \in \Delta \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x' - x) + 3(y' - y) + z' - z = 0 \\ \frac{x + x'}{2} = \frac{z + z'}{2} - 2; \frac{y + y'}{2} = 3\frac{z + z'}{2} + 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = (-9x + 6y + 2z - 46)/11 \\ y' = (6x + 7y + 6z + 16)/11 \\ z' = (2x + 6y - 9z - 2)/11 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vì S_{Δ} đối hợp nên $\forall M(x, y, z) \in E^3$ ta có

$$M \in P' \Leftrightarrow M' \in P$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 2(-9x + 6y + 2z - 46) + (6x + 7y + 6z + 16) \\
 &\quad - (2x + 6y - 9z - 2) - 11 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -14x + 13y + 19z - 85 = 0$$

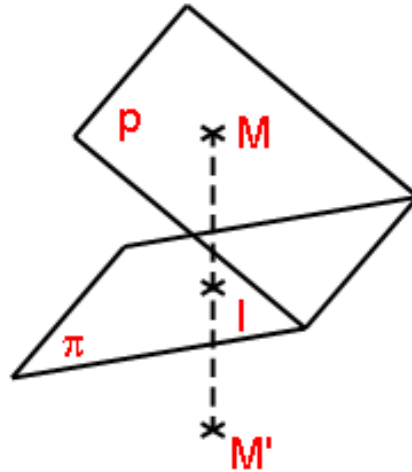
Trả lời: phương trình của P' là $-14x + 13y + 19z - 85 = 0$.

Bài tập 2. Lập phương trình mặt phẳng đối xứng P' của mặt phẳng

$P : x + 4y - 2z - 3 = 0$ qua mặt phẳng $\pi : x + y - 3z - 1 = 0$.

Giải

Cho $M(x, y, z), M'(x', y', z')$, I là trung điểm của MM' và vectơ pháp



Hình 2.7:

tuyến của π là vectơ $\vec{n} = (1; 1; -3)$

$$\begin{aligned}
 M' = S_{\pi}(M) &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \pi \\ I \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \parallel \vec{n} \\ I \in \pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in R : \begin{cases} x' - x = \lambda \\ y' - y = \lambda \\ z' - z = -3\lambda \end{cases} \\ \frac{x' + x}{2} + \frac{y' + y}{2} - \frac{3(z' + z)}{2} - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \lambda \\ z' = z - 3\lambda \\ \frac{2x + \lambda}{2} + \frac{2y + \lambda}{2} - \frac{3(2z - 3\lambda)}{2} - 1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = (9x - 2y + 6z + 2)/11 \\ y' = (-2x + 9y + 6z + 2)/11 \\ z' = (6x + 6y - 7z - 6)/11 \end{cases}$$

Vì S_π đối hợp nên $\forall M(x, y, z) \in E^3$ ta có $M \in P' \Leftrightarrow M' \in P$

$$\Leftrightarrow (9x - 2y + 6z + 2) + 4(-2x + 9y + 6z + 2)$$

$$-2(6x + 6y - 7z - 6) - 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 4z + 1 = 0$$

Đó là phương trình của P'

Bài tập 3. Lập phương trình đường thẳng đối xứng d' của d :
$$\begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

qua S_Δ , với $\Delta : x = y = z$.

Trả lời: $d' : \begin{cases} 7x + 4y - 5z + 3 = 0 \\ 4x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 4. Lập phương trình đường thẳng đối xứng d' của d :
$$\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z + 4 \end{cases}$$

qua S_π với $\pi : x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Trả lời: $d' : \begin{cases} 10x - 9y - 8z - 11 = 0 \\ x + 4y + 9z - 34 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 5. (xem [8]) Cho $(\alpha, h) \in R^2$.

$$d : \begin{cases} x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0 \\ z = h \end{cases}, l : \begin{cases} x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0 \\ z = -h \end{cases}$$

$f = S_{l^0} S_d$. Xác định các phần tử đặc trưng của f .

Giải. $M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z') \mapsto M''(x'', y'', z'')$ lần lượt qua S_d, S_l .

S_d : gọi I là trung điểm của MM' , khi đó ta có

$$M' = S_d(M) \Leftrightarrow \begin{cases} MM' \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ y' = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \\ z' = -z + 2h \end{cases}.$$

S_l : Gọi H là trung điểm của $M'M''$, khi đó ta có

$$M'' = S_l(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M'M''} \perp l \\ H \in l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \cos 2\alpha - y' \sin 2\alpha \\ y'' = -x' \sin 2\alpha - y' \cos 2\alpha \\ z'' = -z' - 2h \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x'' = x \cos 4\alpha + y \sin 4\alpha = x \cos(-4\alpha) - y \sin(-4\alpha) \\ y'' = -x \sin 4\alpha + y \cos 4\alpha = x \sin(-4\alpha) + y \cos(-4\alpha) \\ z'' = z + (-4h) \end{cases}.$$

Đây là tích của phép quay quanh trục Oz , góc quay (-4α) , và phép tịnh tiến theo vectơ $(-4h)\vec{e}_3$.

$$f = T_{-4h\vec{e}_3} \circ Q_{OZ,(-4\alpha)}$$

Bài tập 6. (xem [8]) Nhận biết f từ $E^3 \rightarrow E^3$, $M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$

trong mỗi trường hợp sau

$$\begin{aligned} a, & \begin{cases} x' = (-2x - 2y + z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \end{cases} & b, & \begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases} \\ c, & \begin{cases} x' = -z - 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases} & d, & \begin{cases} x' = (x - 8y - 4z + 2)/9 \\ y' = (-8x + y - 4z + 2)/9 \\ z' = (-4x - 4y + 7z + 1)/9 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in O_3(R), \text{ do } AA^t = I_3, \text{ lại vì } \det A = 1$$

nên $A \in SO_3(R)$ suy ra f là phép dời hình loại 1, theo dạng chính tắc f là phép quay trượt: $f = T_{\vec{v}^0} Q_{\vec{D}, \phi}$, $v \in \vec{D}$.

Đường thẳng $\vec{D}$ là tập hợp các điểm bất biến của f . Để tìm $\vec{D}$ ta tìm các điểm bất biến

$$\begin{cases} x = (-2x - 2y + z + 1)/3 \\ y = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z = (x - 2y - 2z + 1)/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 1 \end{cases}.$$

Tập hợp các điểm bất biến tương đối của f là đường thẳng

$$\vec{D} = \begin{cases} 5x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{v} = (1; -2; 1).$$

Đường thẳng afin D là tập hợp các điểm $M(x, y, z)$ sao cho MM' cùng phương với $\vec{v}$; $M' = f(M)$. Ta có $M \in D \Leftrightarrow \exists \lambda \in R$ sao cho

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 1) - x = \lambda \\ \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 2) - y = -2\lambda \\ \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 1) - z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z + \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Như vậy M thuộc D thì $\overrightarrow{MM'} = -\frac{1}{9}\vec{v}$, suy ra $\vec{u} = (-\frac{1}{9}; \frac{2}{9}; -\frac{1}{9})$.

Trả lời $f = T_{\vec{u}^0} Q_D$ trong đó $\vec{u} = -\frac{1}{9}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $D : \begin{cases} x = z \\ y = -2z + \frac{2}{3} \end{cases}$.

Bài tập 7. (xem [8]) Nhận biết f từ $E^3 \rightarrow E^3$, $M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$

trong mỗi trường hợp sau

$$a, \begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = x + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases} \quad b, \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) + 2 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) - 1 \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z) \end{cases}$$

2.2 Các phép đồng dạng trong E^3

Một trường hợp đặc biệt quan trọng của phép đồng dạng là phép vị tự tỉ số k

2.2.1 Phép vị tự trong E^3

Định nghĩa 2.8. Cho $O \in E^3$ và số $k \neq 0$. Xét ánh xạ $E^3 \rightarrow E^3$, $M \mapsto M'$ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ gọi là phép vị tự tâm O , tỉ số k

Kí hiệu V_k^O .

Nếu $k = 1$ ta có phép đồng nhất, nếu $k = -1$ ta có phép đối xứng tâm. Phép vị tự V_k^O là một phép biến đổi afin với ánh xạ tuyến tính liên kết là $\overrightarrow{V_k^O} = k.Id_{\overrightarrow{E^3}}$. Chọn gốc O trùng với tâm vị tự thì phương trình của

$$\text{phép vị tự này là } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}, A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Nếu tâm vị tự là $I(b_1, b_2, b_3)$ thì phương trình của phép vị tự là

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)b_1 \\ y' = ky + (1 - k)b_2 \\ z' = kz + (1 - k)b_3 \end{cases}$$

Với phương trình của phép vị tự ta chứng minh được các tính chất thông thường đã biết, đặc biệt ta suy ra

Phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn (C, R) thành đường tròn (C', kR) .

Tích hai phép vị tự cùng tâm là một phép vị tự cùng tâm với tỉ số

vị tự bằng tích các tỉ số. Hơn nữa tập hợp các phép vị tự cùng tâm làm thành một nhóm.

Định lý 2.9. *Tích hai phép vị tự khác tâm là một phép vị tự với tỉ số vị tự bằng tích các tỉ số, ngoài ra ba tâm vị tự thẳng hàng.*

Chứng minh:

Giả sử $M(x, y, z), M'(x', y', z'), M''(x'', y'', z''), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$.

$$M \mapsto M' \qquad M' \mapsto M''$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = k_1 x + (1 - k_1) b_1 \\ y' = k_1 y + (1 - k_1) b_2 \\ z' = k_1 z + (1 - k_1) b_3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Rightarrow \begin{cases} x'' = k_2 x' + (1 - k_2) c_1 \\ y'' = k_2 y' + (1 - k_2) c_2 \\ z'' = k_2 z' + (1 - k_2) c_3 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra} \begin{cases} x'' = k_1 k_2 x + k_2 (1 - k_1) b_1 + (1 - k_2) c_1 \\ y'' = k_1 k_2 y + k_2 (1 - k_1) b_2 + (1 - k_2) c_2 \\ z'' = k_1 k_2 z + k_2 (1 - k_1) b_3 + (1 - k_2) c_3 \end{cases}. \text{ Nên } M'' \text{ là ảnh của}$$

M qua phép vị tự tỉ số $k_1 k_2$, tâm $D(k_2 (1 - k_1) b_1 + (1 - k_2) c_1;$

$k_2 (1 - k_1) b_2 + (1 - k_2) c_2; k_2 (1 - k_1) b_3 + (1 - k_2) c_3)$.

Ba tâm vị tự thẳng hàng vì định thức các tọa độ bằng 0.

Định lý 2.10. *Phép vị tự tỉ số $k \neq 1$ có duy nhất một điểm bất động.*

2.2.2 Phép đồng dạng trong E^3

Định nghĩa 2.11. *Phép biến đổi $f : E^3 \rightarrow E^3$ gọi là phép đồng dạng nếu với hai điểm bất kỳ M, N và ảnh $M' = f(M), N' = f(N)$ ta luôn có $d(M', N') = kd(M, N)$. Trong đó $k > 0$ gọi là tỉ số đồng dạng của f*

Rõ ràng $k = 1$ thì f là phép dời hình

Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Định lý 2.12. *Phép đồng dạng f là một phép afin với ánh xạ tuyến tính $\vec{f}$ liên kết được xác định như sau: gọi $O \in E^3; O' = f(O), \forall \vec{x} \in E^3$, gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$, lấy $M' = f(M)$ và đặt $\vec{f}(\vec{x}) = \overrightarrow{O'M'}$.*

2.2.3 Phân loại phép đồng dạng trong E^3

Định lý 2.13. *Cho $f : E^3 \rightarrow E^3$ là một phép đồng dạng tỉ số k , khi đó f luôn phân tích được thành tích của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình (hoặc tích của một phép dời hình và một phép vị tự tỉ số k)*

Chứng minh

Lấy O là một điểm cố định trong E^3 , ta gọi

$$f_1 : E^3 \rightarrow E^3, M \mapsto M' \text{ sao cho } \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

$$f_2 : E^3 \rightarrow E^3, M_1 \mapsto M_1' = f(M), \text{ ở đây } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1'}.$$

Khi đó f_1 là V_k^O , f_2 là phép vị tự

Vậy $f_2 \circ f_1(M) = f_2(f_1(M)) = f_2(M') = f(M)$ nên $f = f_2 \circ f_1$ (tích của phép vị tự và phép dời hình)

Định lý 2.14. *Tập hợp các phép đồng dạng trong E^3 làm thành một nhóm ta gọi là nhóm đồng dạng. Nhóm này nằm trong nhóm afin.*

Từ sự phân loại của phép dời hình (loại 1 và loại 2) ta suy ra sự phân loại của phép đồng dạng như sau

Mọi phép đồng dạng thuận $\det(f) > 0$ đều là tích của một phép xoắn ốc $T_{\vec{v}^O}Q_\Delta$ với một phép vị tự V_k^O hoặc tích của phép quay quanh đường thẳng Δ với phép vị tự V_k^O với $O \in \Delta$.

Mọi phép đồng dạng nghịch $\det(f) < 0$ đều là tích của một phép đối xứng trượt $T_{\vec{v}^O}S_\pi$ với phép vị tự V_k^O hoặc là tích của phép đối xứng quay $Q_{I^O}S_\pi$ với phép vị tự V_k^O , $O \in \pi$.

2.3 Phép nghịch đảo trong E^3

2.3.1 Định nghĩa và các tính chất

Định nghĩa 2.15. $O \in E^3, k \in R^*,$ xét trong hệ tọa độ Đề các vuông góc. Tương ứng $M \mapsto M'$ sao cho $\begin{cases} \overline{O, M, M'} \\ \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k \end{cases}$ được gọi là phép nghịch đảo cực O , phương tích k .

Kí hiệu : I_k^O .

Chọn hệ trục tọa độ Đề các Oxyz, gốc O trùng với cực, $M(x; y; z)$ và $M'(x'; y'; z') = I_k^O(M)$. Đặt $\rho = OM, \rho' = OM'$ khi đó theo định nghĩa

$$\rho \cdot \rho' = k \Rightarrow \rho' = k/\rho$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho'} = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} &\Leftrightarrow \frac{\rho}{k/\rho} = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \Leftrightarrow \frac{\rho^2}{k} = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\rho^2}{k} = \frac{x}{x'} \\ \frac{\rho^2}{k} = \frac{y}{y'} \\ \frac{\rho^2}{k} = \frac{z}{z'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{kx}{\rho^2} \\ y' = \frac{ky}{\rho^2} \\ z' = \frac{kz}{\rho^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2} \\ z' = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{do } \rho^2 = \left| \overrightarrow{OM} \right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Vậy phương trình của phép nghịch đảo là

$$\begin{cases} x' = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2} \\ z' = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

Tính chất 1: Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp tức nếu $M' = f(M)$ thì ta cũng có $M = f(M')$.

Thật vậy $M(x, y, z) \rightarrow M'(x', y', z') \rightarrow M''(x'', y'', z'')$ ta phải chứng minh $M'' \equiv M$. Ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2} \\ z' = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x'' = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ y'' = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ z'' = \frac{kz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \end{array} \right.$$

Bằng phép thế ta suy ra $\left\{ \begin{array}{l} x'' = x \\ y'' = y \\ z'' = z \end{array} \right.$, nên $M'' \equiv M$ (đpcm).

Tính chất 2: Mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{k}$ ($k > 0$) là mặt cầu bất động của I_k^o , nói cách khác với phép nghịch đảo dương mọi điểm của mặt cầu $(O, \sqrt{k})$ biến thành chính nó.

Hiển nhiên vì $M = I_k^o(M) \Leftrightarrow OM^2 = k \Leftrightarrow OM = \sqrt{k}$, bằng phương

$$\text{pháp tọa độ } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} \\ y = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2} \\ z = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = k \text{ suy ra tập hợp}$$

các điểm $M(x, y, z)$ là mặt cầu $(O, \sqrt{k})$.

Nếu $k < 0$ thì $x^2 + y^2 + z^2 = k < 0$ là tập rỗng.

2.3.2 Ảnh của mặt phẳng và mặt cầu qua phép nghịch đảo

Ảnh của mặt phẳng α

Mặt phẳng $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0; A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, gọi α' là ảnh nghịch đảo của $\alpha: \alpha' = I_k^o(\alpha)$ nên

$$\begin{cases} x' = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2} \\ z' = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}, \text{ do tính}$$

chất đối hợp nên

$$\begin{cases} x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ z = \frac{kz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \end{cases}.$$

Thay vào phương trình của α ta được phương trình

$$A \frac{kx'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + B \frac{ky'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + C \frac{kz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + D = 0(1)$$

- Nếu mặt phẳng α đi qua cực O suy ra $D=0$

Khi đó $\alpha' : Akx' + Bky' + Ckz' = 0 \Leftrightarrow Ax' + By' + Cz' = 0 (k \neq 0)(2)$.

Vậy $\alpha' \equiv \alpha$. Vậy qua I_k^o mọi mặt phẳng đi qua cực biến thành chính nó.

- Nếu mặt phẳng α không đi qua cực O suy ra $D \neq 0$, chia hai vế của (1) cho D ta được

$$(x' + \frac{Ak}{2D})^2 + (y' + \frac{Bk}{2D})^2 + (z' + \frac{Ck}{2D})^2 = \frac{A^2k^2 + B^2k^2 + C^2k^2}{4D^2} > 0(3).$$

Suy ra α' là mặt cầu (đi qua cực O) có tâm và bán kính là

$$I_1\left(\frac{-Ak}{2D}, \frac{-Bk}{2D}, \frac{-Ck}{2D}\right), R = \sqrt{\frac{A^2k^2 + B^2k^2 + C^2k^2}{4D^2}}.$$

Ảnh của mặt cầu γ

Mặt cầu γ qua cực O biến thành mặt phẳng không đi qua cực O .

Giả sử $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz = 0 (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Ta có

$$\begin{aligned}\gamma' &= I_k^0(\gamma) \\ \Rightarrow \gamma' : &\left(\frac{kx'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^2 + \left(\frac{ky'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^2 + \left(\frac{kz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^2 \\ &+ \frac{2kax'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \frac{2kby'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \frac{2kcz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = 0 \\ \Leftrightarrow &k^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2kax'(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &+ 2kby'(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2kcz'(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 \\ \Leftrightarrow &2ax' + 2by' + 2cz' + k = 0 (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, k \neq 0)\end{aligned}$$

Vậy γ' là mặt phẳng không đi qua cực .

Mặt cầu γ không đi qua cực O biến thành mặt cầu không đi qua cực O . Làm tương tự ta suy ra

$$\begin{aligned}\gamma' : &\left(x' + \frac{ak}{d}\right)^2 + \left(y' + \frac{bk}{d}\right)^2 + \left(z' + \frac{ck}{d}\right)^2 = \frac{k^2}{d^2}(a^2 + b^2 + c^2 - d) \\ &(k \neq 0, d \neq 0, a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)\end{aligned}$$

Vậy γ' là mặt cầu không đi qua cực O , có tâm và bán kính là

$$I_2\left(\frac{-ak}{d}, \frac{-bk}{d}, \frac{-ck}{d}\right), R = \sqrt{\frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2 - d)}{d^2}}.$$

Ảnh của đường tròn

Phép nghịch đảo trong không gian biến mọi đường tròn đi qua cực thành đường thẳng không đi qua cực

Chứng minh

Đường tròn đi qua cực O chính là giao tuyến của mặt phẳng α đi qua cực O với mặt cầu γ đi qua cực O . Không mất tính tổng quát ta chọn

mặt phẳng α là mặt phẳng Oxy: $z=0$.

Mặt cầu $\gamma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2b_1y + 2c_1z = 0$ có tâm và bán kính là

$$I(-1, -b_1, -c_1), R_1 = \sqrt{1 + b_1^2 + c_1^2}$$

Đường tròn đi qua cực O có phương trình

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2b_1y + 2c_1z = 0 \end{cases}.$$

Điều kiện $d(I, mp(\alpha)) = |c_1| < \sqrt{1 + b_1^2 + c_1^2}$. Ta có $C'_1 = I_k^o(C_1)$

Qua I_k^o , $z = 0$ biến thành mặt phẳng $z' = 0$.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2b_1y + 2c_1z = 0$ biến thành mặt phẳng có phương trình là $2x' + 2y'b_1 + 2c_1z' + k = 0$.

Khi đó $2x' + 2y'b_1 + 2c_1z' + k = 0$, $y' = t$, thay vào hệ ta có

$$C'_1 : \begin{cases} z' = 0 \\ 2x' + 2b_1t + 2c_1z' + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-k}{2} - b_1t \\ y' = t \\ z' = 0, k \neq 0 \end{cases}.$$

Suy ra C'_1 là đường thẳng không đi qua cực O.

Phép nghịch đảo trong không gian biến mọi đường tròn không đi qua cực thành đường tròn không đi qua cực.

Bài tập áp dụng

Bài tập 1. Tìm ảnh của đường thẳng có phương trình

$$d : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{qua } I_1^o.$$

Bài tập 2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn là ảnh của đường tròn

$$\text{có phương trình sau } \gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{qua } I_1^o.$$

Trong chương 2 ta xét các phép biến hình trong không gian, mở rộng của các phép biến hình trong mặt phẳng nhưng có nhiều phép biến hình mới phức tạp như phép quay quanh một đường thẳng, phép xoắn ốc, phép đối xứng qua một đường thẳng trong không gian hay các dạng chính tắc của phép đồng dạng trong không gian. Các tính toán trong không gian cũng phức tạp hơn trong mặt phẳng, điều đó cũng thể hiện ưu điểm của phương pháp tọa độ khi nghiên cứu các phép biến hình trong không gian: chứng minh một cách tường minh các kết quả mà thường chỉ được phát biểu tương tự không chứng minh, chẳng hạn ảnh của mặt phẳng, ảnh của mặt cầu và ảnh của đường tròn qua phép nghịch đảo trong không gian.

Kết luận

Luận văn đã thu được các kết quả sau:

Hệ thống lại các kiến thức cơ bản về các phép biến hình đã biết, đã được đưa vào chương trình học ở phổ thông.

Tìm được các phương trình đại số hay biểu thức tọa độ của các phép dời hình, phép đồng dạng và phép nghịch đảo trong E^2 . Đưa ra được các ứng dụng của các phương trình đó trong các bài toán cụ thể. Việc phân loại và đưa ra các kết luận về dạng chính tắc của phép dời hình, phép đồng dạng rất có ích khi nghiên cứu hình học Oclit phẳng.

Tìm được các phương trình đại số của các phép dời hình, phép đồng dạng, phép nghịch đảo trong không gian E^3 . Kết hợp với các kiến thức của đại số, của giải tích, hình học vi phân để đưa được các bài toán chứng minh hình học về bài toán tính toán.

Hướng nghiên cứu tiếp theo của luận văn là xét các phép biến hình trong mặt phẳng phức. Với sự hỗ trợ của số phức, các phép biến hình bảo giác sẽ là hướng mới cho việc ứng dụng đại số sang hình học và ngược lại.

Tài liệu tham khảo

- [1] Văn Như Cương, *Hình học AFIN và Hình học Ôclit*, NXB Đại học sư phạm Hà Nội, 2005
- [2] Nguyễn Mộng Hy, *Các phép biến hình trong mặt phẳng*, NXB Giáo dục, 2005
- [3] Nguyễn Việt Hải, Phan Quân, Vũ Hoàng Lâm, *100 bài tập về phép biến hình*, NXB Hải Phòng, 1997.
- [4] Nguyễn Việt Hải *Hình học vi phân*, NXB Giáo dục, 2010.
- [5] Lê Đình Phi, *Hình học sơ cấp*, NXB Khoa học-Kỹ thuật, 1995
- [6] Jean-Marie Monier, *Giáo trình Toán-Tập 7, Hình học*, NXB giáo dục, 2001
- [7] V.V Praxolov, *Các bài toán hình học phẳng-Tập 1*, Dịch từ tiếng Nga, Hoàng Đức Chính, NXB Hải Phòng, 2009
- [8] I.M. Yaglom, *Geometric transformation I and II*, Translated from the Russian by Allen Shiels, University of Michigan. New Mathematical Library, published by Random House school Division school Division New York 1962, 1968 (by Yale University).