

NHỮNG LỜI KHUYÊN CHUNG VỀ PHƯƠNG PHÁP HỌC TOÁN

GS-TS Nguyễn Cảnh Toàn

Tóm tắt nội dung

Đây là bài viết của GS-TS Nguyễn Cảnh Toàn, trích trong Phụ lục quyển sách *Biển Học Vô Bờ*, NXB Thanh Niên, 2000.

Tác giả không chỉ cung cấp cho người đọc *những lời khuyên chung về phương pháp học toán* ở trường THPT, mà còn làm sáng rõ tầm quan trọng của “*Năm mọi*” và “*Bảy tư duy*” trong học toán.

Ebook này được thực hiện *không vì mục đích thương mại*.

Mục lục

1	Học toán là học cái gì?	2
2	Năm mọi trong H toán	4
2.1	H mọi nơi	4
2.2	H mọi lúc	6
2.3	H mọi người	6
2.4	H bằng mọi cách	7
2.5	H qua mọi nội dung	8
2.6	Nhìn chung lại cả năm mọi	9
3	Bảy loại tư duy cần rèn luyện trong toán học	10
4	Tóm tắt	12

1 Học toán là học cái gì?

Học (H), về cơ bản là tự học (TH).

TH đi liền với tự giác, hứng thú. Dạy toán sao cho dần dần học sinh (HS) biết TH một cách vững chắc, thường xuyên, thực chất là tạo dần nên sự tự giác, sự hứng thú đối với toán học. Tự giác, hứng thú bắt nguồn từ sự nhận thức về lợi ích của toán học, từ sự cảm hứng mang tính nghệ thuật trước cái tài tình, cái kì lạ của toán học, trước cái chính xác tuyệt vời của tư duy toán học, nhưng lại không cứng nhắc, rất uyển chuyển, mềm mại, bay bổng: khi thì là, rất sát với thực tế đời thường, khi lại bay vút lên mấy tầng cao của sự trừu tượng để có khả năng tỏa rộng hơn sau này, có lúc lại xuống thấp, biến hóa khôn lường.

Lâu nay, trong việc dạy (D) và H toán, chúng ta đã làm khô cạn đi rất nhiều cái hứng thú nói trên, nhất là từ khi phong trào “luyện thi” trở nên sôi nổi. Lợi ích ở đây chỉ hạn hẹp là lợi ích thi cử, tư duy ở đây chỉ nghèo nàn là tư duy “bắt chước” qua luyện tử. “Luyện thi” khác với “ôn thi”. “Ôn thi” có yêu cầu hệ thống hóa kiến thức, hệ thống hóa các phương pháp suy luận, liên hệ H với hành; còn “luyện thi” chỉ nhằm một mục đích hạn hẹp là luyện thật nhiều những kiểu toán hay gặp trong các kì thi. Mà việc ra đề thi, trong khoảng mười năm nay, lại cứ lao vào con đường đánh đổ HS bằng những lát léo đến mức quá giả tạo. Những đề như vậy, lúc đầu xuất hiện ở các lớp chuyên, dần dần lan ra qua các kì thi đại học, đến các lớp D thêm, và từ đó lan rộng khắp. Ví dụ, đây là một câu trong bài thi học kì ở một lớp 11 chuyên anh văn (chứ không chuyên toán).

Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \log_5(x^2 - 4x + 9) - \log_2\left(\frac{1}{2}y + 1\right) \leq 0 \\ 3|y| - |y + 1| + (y - 2)^2 \leq 3 \end{cases}$$

Câu này tính 2 điểm (trên 10) trong bài thi gồm 5 câu. Thật là giả tạo, xa rời mục tiêu giáo dục, xa rời cuộc sống! Toán học từ thực tiễn mà ra, và nó sẽ trở lại để phục vụ thực tiễn. Nguồn “lợi ích” và nguồn “hứng thú” cũng từ đó mà có. Nhiều ý kiến bênh vực cho loại bài giả tạo như trên: “Các bài đó cũng có tác dụng rèn luyện kĩ năng”. Ý kiến này có đúng một phần, nhưng nhỏ thôi, còn cái hại lại rất lớn. Nếu HS được “luyện” nhiều lần thì họ cũng có thể làm được và đạt điểm cao, nhưng tư duy toán học của họ không nâng lên được bao nhiêu. Gặp kiểu bài này mà chưa “luyện” thì họ sẽ không làm được, và do đó “lòng tự tin” của họ rất hạn chế: hễ ra khỏi lò luyện là y như thấy bất lực. Mặt khác, giải quyết xong một kiểu bài như vậy thì như đi vào ngõ cụt. Làm rồi, chẳng thấy vấn đề gì được phát triển thêm, mà đây mới thực sự là yêu cầu của sáng tạo. Cho nên, trước khi đi vào những vấn đề cụ thể khác, ta cần hiểu rõ phương hướng: H tập phải gắn liền với thực tiễn để thấy rõ hơn cái “lợi ích”, để tìm ra “sự hấp dẫn” của môn học, nhờ

vậy mới tự giác, hứng thú tìm H, TH được.

Do vậy, H toán không nên chỉ bó hẹp trong phạm vi H kiến thức toán học, qua sách toán, mà nên H ở ngoài đời, kể cả trong những lúc, những nơi hình như chẳng có dính dáng gì đến toán, nghĩa là “phi toán”.

Trong đời thường, người ta khuyên nhau “nghĩ đi rồi phải nghĩ lại”, thì điều đó và việc chứng minh “thuận, đảo” trong toán học có tác dụng qua lại với nhau. HS kém thường bỏ sót phần đảo, nên trong nhiều bài giải phương trình, hay bỏ sót nghiệm hoặc đưa nghiệm ngoại lai vào; hoặc trong các bài toán về quỹ tích thì không định được giới hạn của quỹ tích, trong nhiều bài biện luận thì bỏ sót nhiều trường hợp không xét đến. Những HS đó ra đời, dù làm những việc không đụng đến toán, cũng dễ mắc bệnh suy nghĩ một chiều.

Trong đời thường, người ta khuyên nhau phải “thức thời”. Trong H toán, “thức thời” liên quan đến tư tưởng “tiến công”: khi tình hình đã thay đổi thì phương pháp phải thay đổi, tình hình ở đây là tình hình học tập; khi đã có kiến thức mới, phương pháp mới thì phải nghĩ ngay đến việc sử dụng chúng.

Trong đời sống phi toán, lâu lâu ta lại nghe nói “dĩ bất biến ứng vạn biến”, đặc biệt là lời Bác Hồ căn dặn cụ Huỳnh Thúc Kháng trước lúc người sang Pháp. Rất ít HS, SV thấy được trong câu nói đó có một nội dung rất toán học: mỗi định lý nói lên một qui luật, tức là một cái gì đó đúng khắp mọi nơi (bất biến), và ta dùng định lý đó ở rất nhiều nơi (vạn biến); mỗi phép biến hình có thể biến tất cả các hình (vạn biến), nhưng trong mỗi phép như vậy đều có những cái bất biến, như trong phép dời hình thì “khoảng cách” là bất biến, trong các phép đồng dạng, nghịch đảo thì “góc” là bất biến. Tư duy toán học giúp ta “lấy cái bất biến để ứng cái vạn biến”. Rồi trong văn học, ta cũng gặp chuyện tương tự: Tôn Ngộ Không có 72 phép biến hóa, nhưng dù ở đâu, dưới bất cứ dạng nào thì vẫn bộc lộ tính cách nhân vật không thay đổi từ đầu đến cuối tác phẩm “Tây Du Ký”. Đọc “Tây Du Ký”, ta cũng không khỏi nghĩ đến những phép biến đổi vốn là thần thông trong toán học. Khi không khuất hàng nổi yêu quái, Tôn Ngộ Không lại phốc lên thiên đình tìm cứu viện, giúp đoàn đi lấy kinh vượt được khó khăn tiếp tục lên đường. Các nhà toán học cũng vậy thôi: gặp khó khăn với số nguyên thì tạo ra phân số, với số hữu tỉ thì sáng tạo ra số thực, với số thực thì phát minh ra số phức. Lí thú nhất là dùng số ảo nhưng cuối cùng lại trở về số thực. Hình tượng văn học của ông Bụt hiện lên giúp cô Tấm rồi lại biến mất chính là hình tượng của số phức giúp nhà toán học vượt qua khó khăn, để rồi lời giải cuối cùng lại là những số thực. Một người lái xe đi trên đường cái, trước khi rẽ vào một ngõ hẹp chưa vào bao giờ, đều cẩn thận hỏi thăm xem nơi đó có chỗ để quay xe lại hay không. Chuyện đời thường đó lại dính tới số thực và số phức. Xét ở góc độ *toán tử tác động lên véc-tơ*¹ thì số thực chỉ có thể tác động trong không gian một chiều, nên không thay đổi được phương các véc-tơ; còn toán tử số phức có thể tác động lên không

¹Khái niệm này được nghiên cứu ở cấp học cao hơn THPT.

gian hai chiều, nên có thể thay đổi phương các véc-tơ. “Ngõ hẹp” chỉ cho phép lái xe đi, không cho quành, giống như không gian một chiều; chỗ rộng cho phép xe quay đầu giống như không gian hai chiều. Một đầu tàu hỏa chạy trên đường ray cũng vậy, muốn nó quay ngược lại được, phải dẫn nó đến các bàn xoay (ở các ga lớn): đường ray giống như không gian một chiều còn bàn xoay giống như không gian hai chiều. “Toán” với “phi toán” trong đời thường gắn với nhau như vậy đấy!

Trên đây mới chỉ nói đến “phi toán đời thường”, chưa nói đến “phi toán khoa học” để nhấn mạnh một lý: toán học có ở khắp nơi, không chỉ trong các khoa học như vật lý, hóa học. . . Chính xác là tư tưởng lớn của toán học lại nằm trong đời thường: xung quanh ta đâu đâu mà chả có tập hợp, hàng ngày chính chúng ta có rất nhiều ánh xạ (như so đĩa chẳng hạn); một bản nội qui có khác gì một hệ tiên đề, nội qui phải nhất quán thì hệ tiên đề phải phi mâu thuẫn. Các nhà làm luật thường gặp nhiều khó khăn trong việc làm sao để các điều luật không dẫn đến những trường hợp không đánh giá được là hợp pháp hay không hợp pháp. Lướt qua vài nét như trên đã thấy rằng không chỉ H toán trong sách mà phải biết H toán ngoài sách, và dần dần cảm thấy một nền văn hóa toán học là cần cho mọi người dù có làm việc trực tiếp với toán hay không. Văn hóa toán học là cái còn đọng lại trong ta sau khi ta để qua một bên, coi như quên hết các kiến thức toán học. Một người có văn hóa toán học thì dù có làm gì cũng suy nghĩ chặt chẽ, lật đi lật lại vấn đề, không phiến diện một chiều, luôn luôn nghĩ đến làm sao cho tối ưu, biết thay thế một chương trình hành động bằng một chương trình hành động khác tương đương nhưng ít vất vả, tốn kém hơn, luôn luôn không thỏa mãn, muốn tìm cách giải hay hơn. . .

Lâu nay, phần lớn HS H toán chỉ với một mục đích hạn hẹp: học các kiến thức toán học (các khái niệm, định lý) và cách vận dụng chúng (chủ yếu là phương pháp suy diễn) vào các bài tập; mà chủ yếu là bài tập sách vở, ít đụng chạm đến cuộc sống đời thường.

2 Năm mọi trong H toán

Để H toán có hiệu quả, để có khả năng toán học hóa các tình huống thực tế, để có văn hóa toán học thì nên cố gắng xây dựng một phong cách học tập mới - phong cách này là sự tổng hợp của năm yêu cầu sau đây:

2.1 H mọi nơi

Khi nói H toán thì phải thấy cả kiến thức, cả tư duy toán học, cả tính cách con người. Mặt khác, toán học lại lừ thực tiễn mà ra, kể cả thực tiễn về hạ tầng

cơ sở² cho đến thực tiễn về thượng tầng kiến trúc³, nên có thể nói “toán học có ở khắp quanh ta”, và vì vậy có thể H toán ở mọi nơi. Dĩ nhiên, trước hết phải H những kiến thức cơ bản và có hệ thống trong SGK, những phương pháp tư duy cơ bản như suy diễn, quy nạp, phân tích, tổng hợp, những phẩm chất như đòi hỏi lập luận chính xác, có căn cứ, không dễ thỏa mãn... mà ở trường, một giáo viên (GV) toán nghiêm túc bao giờ cũng đòi hỏi ở HS. Tuy nhiên nếu chỉ có thế thì tốc độ phát triển về kiến thức, tư duy và tính cách vẫn chậm; bởi lẽ, chỉ có kiến thức là cụ thể, có thể đo lường được theo các đơn vị thời gian (như trong một tiết học đã biết thêm được mấy định lí), nhưng còn tư duy và tính cách là những cái gì đó trừu tượng hơn nhiều, vô hình nhưng lại len lỏi khắp nơi, thường xuyên, liên tục, rất khó đo lường, hình thành và phát triển theo kiểu “lắng đọng phù sa”. Nếu chê hạt cát là quá nhỏ bé thì sẽ chẳng bao giờ có bãi phù sa. Nếu có được bãi phù sa về tư duy và tính cách thì kiến thức sẽ đến dễ dàng, nhiều khi không cần H qua sách hay thầy. H một biết mười là vậy. Vả chăng, nếu toán học có nghĩa là vùi đầu vào sách toán thì dù có hứng thú cũng sẽ mệt mỏi, mệt người đi. Phải thay đổi hình thức lao động ngay trong bản thân lao động trí óc: lúc này đọc sách toán, lúc khác đọc sách văn nghệ, hôm nay ở nhà, mai ở lớp, ngày kia đi chơi nhưng ở đâu cũng là H toán cả, dù chỉ là thu hoạch từng hạt cát song lâu ngày bãi phù sa sẽ hình thành. Chương trình H chỉ nêu được những kiến thức toán học cơ bản cần phải học, không nêu được trình độ tư duy, trình độ tính cách phải đạt đến, thường là tùy thuộc trình độ GV. Những GV giỏi không chỉ lo hoàn thành chương trình, mà chăm lo cả việc phát triển tư duy và tính cách, quan tâm đến sự phát triển óc tò mò khoa học của HS, trân trọng những vấn đề do HS phát hiện... dù còn ngây ngô, vụng dại, vun vén từng li từng tí.

Hiện nay, ở nước ta, cứ hễ đến là các HS phổ thông lại “lo đi H hè”, dấn thân vào các “lò”, nhiều khi vi phạm cả vào chỉ thị về H hè của Bộ Giáo dục - Đào tạo. Nói riêng về H toán, thật ra có nhiều cách H mà không cần vào một cái “lò” nào cả: hè đến, HS có thể đi đó đi đây, khi ấy thì ngay dọc đường đã có biết bao nhiêu thử thách tư duy và kiến thức toán học như tốc độ từng lúc của phương tiện đi lại mà mình sử dụng, làm sao mà tính ra được? Nếu đi máy bay, liệu có thể tính xem đám mây trắng trôi lững lờ phía dưới cách mặt đất bao nhiêu khi người ta cho biết độ cao, tốc độ của máy bay và tốc độ gió? Hay khi máy bay bay qua một thành phố, một hòn đảo nhỏ, một cái hồ thì có thể tự mình suy ra được chiều dài thành phố, hòn đảo hay cái hồ không? Ban đêm, ra ngoài trời hóng mát, thử quan sát các vì sao trên trời và hãy cố tìm cho ra các hành tinh dễ thấy nhất (Kim. Hỏa, Mộc, Thổ); theo dõi nhiều ngày vị trí của chúng trên bầu trời so với các vì sao khác rồi thử làm lại điều mà Cò-péc-níc⁴ đã làm cách đây năm thế kỉ, để tự

²Thuật ngữ ngành Triết học.

³Thuật ngữ ngành Triết học.

⁴Copernic (1473–1543), nhà thiên văn học người Ba Lan.

mình kiểm tra lại thuyết “nhật tâm” tuyệt vời của ông. Buổi sáng thức dậy tập thể dục, hãy thử quan sát vị trí mọc của mặt trời rồi liên hệ với những gì đã H của địa lí đại cương. Buổi tối, thử quan sát mặt trăng lưỡi liềm rồi cố hình dung ra vị trí tương đối của mặt trời, mặt trăng, và quả đất trong không gian. Nếu có sáng trăng, hãy thử xem tại sao bóng mái nhà lại song song với thềm nhà, theo định lí nào của hình học không gian?... Đây, có bao nhiêu câu hỏi thú vị khiến ta phải quan sát, phải động não suy nghĩ để tự trả lời mà ở lớp chẳng mấy khi đề cập đến.

2.2 H mọi lúc

Nếu biết “H mọi nơi” thì cũng dễ đi đến biết “H mọi lúc”, nhất là biết tận dụng những thì giờ rỗi rãi, như khi chờ xe, chờ tàu, chờ họp, chờ đến lượt được phục vụ (như cắt tóc), khi phải xếp hàng, khi đêm tối không có đèn đóm gì hoặc ánh đèn quá mờ. Nói H trong cả giấc ngủ nữa thì quả thật không ngoa vì trong khi thức, nghĩ nhiều quá về một vấn đề gì đó mà chưa ra cách giải quyết thì vào giấc ngủ thường mơ về chuyện đó, thấy mình đã tìm ra cách giải quyết, đến lúc tỉnh dậy nảy sinh ý mới, hay ít ra cũng có một hướng suy nghĩ mới.

Muốn tăng cường học toán mọi lúc, mọi nơi phải có quan niệm đúng đắn về cái gì cần H (kiến thức, tư duy, tính cách) và còn phải rèn luyện thói quen tập trung tư tưởng cao độ và một vấn đề mà không cần giấy, bút, cho đến mức vấn đề in rõ nét trong óc khiến cho có thể suy nghĩ về nó bất cứ lúc nào có thì giờ, không bị bất cứ gì phân tán tư tưởng.

2.3 H mọi người

Như đã nói ở trên, trong quan hệ đời thường, rất nhiều ý kiến “phi toán học” cũng giúp ta rèn luyện tư duy toán học, kiểu như lời khuyên “phải thức thời” đã nói ở trên. Thế thì ở đời, thiếu gì những người có ý kiến hay, những lời khuyên tốt giúp cho người khác khôn ngoan lên trong ứng xử, liệu có nên học hỏi cái tinh hoa đã làm nên sự khôn ngoan ấy, để rồi cũng có được sự khôn ngoan ứng xử kia trong toán học hay không? Chẳng những ta H người thực, việc thực hiện nay mà ta H cả người xưa qua các truyện kể lại, H cả các nhân vật trong tiểu thuyết. Không phải chỉ H ở những người giỏi hơn mà H cả ở những người kém hơn.

Trong đời sống học đường, ta thường gặp rất nhiều trường hợp HS có lời giải hay hơn lời giải của thầy. Những dịp đó là dịp thầy học ở trò. Trong chế độ nghiên cứu sinh, những đề tài giáo sư gợi ra cho nghiên cứu sinh chính là những vấn đề chưa ai giải quyết, giáo sư cũng chưa rõ. Khi nghiên cứu sinh làm xong luận án thì vấn đề được giải quyết và nhờ vậy giáo sư mới rõ. Đó cũng là thầy H ở trò. Nhưng thầy vẫn là thầy vì thầy H sâu rộng hơn nên mới biết rõ những vấn đề gì chưa ai giải quyết và có thể giúp học trò hướng giải quyết, mà trò thực hiện theo chỉ dẫn

đó đem lại kết quả cao cũng rất có ích cho thầy. H ở người kém hơn có thể là bài H phản biện. Người xưa nói, ba người cùng đi, ắt có người là thầy ta, chọn người thiện để học làm theo họ, chọn người ác để tránh không làm theo họ. Những thiếu sót, non sót trong tư duy toán học của học trò cũng có mặt tích cực đối với thầy, giúp cho thầy ngày càng sắc sảo, càng tỉnh táo trong tư duy toán học, không mắc phải những sơ suất, dù là rất nhỏ.

H người kém hơn còn có thể giúp người học khá lên vì vực được một người kém lên là điều rất khó, người càng kém thì việc càng khó. Khi làm được thì cả hai bên đều cùng có lợi, người kém khá lên, người đi giúp cũng trưởng thành rất nhiều, trưởng thành cả về nội dung và phương pháp. Ví dụ, khi một người kém hơn mình không tiếp thu nổi một khái niệm toán học trừu tượng nào đó theo cách trình bày trong SGK, làm thế nào để giúp họ nắm được khái niệm đó? Phải bắt mạch đúng nguyên nhân tại sao họ không hiểu. Có thể vì những lỗ hổng kiến thức trước đó. Thế thì phải giúp họ bịt các lỗ hổng đó đã. Cũng có thể là vì cách tiếp cận đến khái niệm đó của SGK không tự nhiên mà áp đặt từ trên trời rơi xuống. Thế thì người giúp phải nghiên cứu cho ra nhiều cách tiếp cận khác, tự nhiên hơn. Cũng có thể là vì khái niệm trừu tượng quá. Thế thì phải chuẩn bị nhiều ví dụ để người kém hiểu được vai trò của từng tiêu chí trong định nghĩa của khái niệm. Cũng có thể là vì người kém chưa hình dung được lí do ra đời của khái niệm. Thế thì phải chỉ ra sự cần thiết của khái niệm đó đối với lí luận hoặc thực tiễn. Cũng có thể là người kém chưa hình dung rõ vị trí của khái niệm này trong một hệ thống các khái niệm trước đó và sau đó... Nhiều khi, để giúp được người kém hơn, người đi giúp có thể cũng chưa sẵn sàng để làm được những điều nói trên mà phải nghiên cứu, học hỏi. Có lần, Đoàn Thanh niên ở một trường học tổng kết rằng nên xóa bỏ chủ trương “Bạn giúp bạn” vì cả hai bên đều có hại: người giỏi mất thì giờ, người kém mất tự tin. Sai lầm của Đoàn Thanh niên trường đó là ở chỗ xem “giúp” là “ban ơn”, người giúp chả được gì, chỉ thiệt, còn người được giúp thì ỷ lại nên lòng tự tin bị xói mòn.

2.4 H bằng mọi cách

Hiện nay, trong nhà trường chúng ta, nhất là trường phổ thông, cách H quen thuộc nhất là lên lớp nghe thầy giảng, về nhà làm bài tập, hết học chính quy lại “H thêm”. Việc học qua “tự đọc sách” rất yếu. Việc H qua ngoại khóa càng yếu. Gần đây, trên truyền hình có chương trình “Bảy sắc cầu vồng” và “Kính vạn hoa”⁵ cũng là những cách học ngoại khóa rất đáng khuyến khích, chỉ đáng tiếc là sự đầu tư “khoa học giáo dục” vào đó còn ít và sự mở rộng ra đến các địa phương, các trường học còn hẹp, không đủ đạt đến yêu cầu. H ngoại khóa thì phong phú lắm:

⁵Quyển sách này được xuất bản năm 2000 nên một số chương trình truyền hình vừa nêu hiện không còn phát sóng nữa.

H khi đi chơi, khi lao động (kể cả lao động giúp gia đình), H khi nghe đài, xem TV, khi đọc tiểu thuyết, khi nhận được một bức thư, khi dự một cuộc họp... Tất nhiên, muốn H bằng mọi cách thì phải biết H mọi nơi, mọi lúc, mọi người và ngược lại.

Mặt khác, cũng không phải mọi cách đều có tác dụng giáo dục toán học, nhưng nếu biết cách gạn đục, khơi trong, không coi thường dù chỉ hạt cát thì cách nào cũng ít nhiều góp phần hoặc củng cố, nâng cao hiểu biết toán học, hoặc củng cố, nâng cao tư duy toán học. Ví dụ, một HS lớp ba về nhà nghe mẹ bảo: “Có hai túi gạo, con trút làm một, đưa cho mẹ cái túi rỗng để đi mua cá”. Trực giác bảo cho HS đó trút túi gạo nhẹ vào túi gạo nặng một cách vô tư. Lúc đó, giá người mẹ hỏi HS: “Tại sao không trút túi gạo nặng vào túi gạo nhẹ?” để lưu ý HS rằng em vừa làm một việc thông minh, ứng dụng tính chất giao hoán của phép cộng để giải quyết vấn đề một cách tối ưu. Ấy cũng là H toán trong lao động bình thường, nếu không được gì về kiến thức hay tư duy thì cũng được tính cách, củng cố phẩm chất: “tìm cách tối ưu trước khi bắt tay vào làm”. Để rèn luyện tính cách thì nhiều khi cần có ý thức rút kinh nghiệm, tự phê bình một chút. Ví dụ, có lần một HS đọc sách toán thấy vấn đề đã quá dài, mệt mỏi, tư tưởng sốt ruột bắt đầu nảy sinh, đến chỗ chấm xuống dòng, sang trang, cậu ta thoáng nghĩ: “Chắc đến đây là kết thúc”. Nhưng khi gỡ sang trang sau, thấy vấn đề dù đã được xem xét nhiều mặt, vẫn còn nhiều mặt khác được đề cập đến. Lúc đó cậu ta tự nhủ thầm: “Mình cũng dễ thỏa mãn quá, đến đó tưởng đã hết. Thiên hạ họ ghê thật, họ đào sâu đến nơi đến chốn. Phải như thế khoa học mới phát triển được chứ!”

2.5 H qua mọi nội dung

H toán không chỉ qua nội dung toán học mà qua cả các nội dung phi toán nữa. Chẳng hạn, có thể H toán qua các tác phẩm văn học như “Tây Du Ký”, qua các lời khuyên trong đời thường như “nghĩ đi thì phải nghĩ lại”... vì các tư duy trong toán học cũng hay gặp trong đời thường.

Xin kể thêm câu chuyện sau đây trong sách “Cổ học tinh hoa”. Hai vợ chồng nhà nọ muốn đi xem hát, nhưng lại sợ không có ai trông nhà, khóa không chắc, trộm sẽ vào lấy hết. Anh chồng bèn nảy ra ý kiến H tập kế của Khổng Minh giữ thành. Chả là Khổng Minh không đủ quân để giữ thành bèn đánh lừa địch bằng cách giả bộ ung dung cho bày ca hát vang lừng trên mặt thành. Quả nhiên, quân do thám của địch về báo với chủ tướng rằng Khổng Minh phòng bị cẩn thận lắm, đang ung dung ca hát. Nhờ vậy quân địch không dám đánh thành. H kế của Khổng Minh, hai vợ chồng mở toang cửa, đốt đèn sáng trưng, rồi đi xem hát. Lần sau, lại kế ấy mà làm thì trộm vào lấy sạch. Họ bèn oán trách Khổng Minh. Người hàng xóm biết chuyện, bảo rằng: “Trong Tam Quốc, Khổng Minh chỉ dùng kế ấy có một lần. Các bác dùng đến lần thứ hai thì nên tự trách mình”. Đây là bài H về “cảnh

giác” với “đường mòn nếp cũ”, rất cần để H toán có sáng tạo: HS khi đã quen một phương pháp nào đó để làm một kiểu bài thì dễ gặp đề toán cùng kiểu là cứ “nếp cũ đường mòn”, lao vào làm ngay mà không chú ý xem xét đề bài có đặc điểm gì mới hay không, hy vọng tìm ra cách giải mới hay hơn.

2.6 Nhìn chung lại cả năm mọi

Rõ ràng “năm mọi” quan hệ mật thiết với nhau, cái này tận dụng cái kia và là tiền đề cho cái kia. Nói đến cái này thì trong đó lại thấy thấp thoáng những cái kia, nên dễ có cảm tưởng trùng lặp, nhưng nếu bớt đi một cái thì lại thấy thiếu. Ví dụ, nếu như chỉ có “H mọi nơi” thì chưa bao gồm “H trong lúc ngủ” nên vẫn cần phải có “H mọi lúc”. “Năm mọi” nói lên sự tranh thủ tất cả các mặt: không gian (mọi nơi), thời gian (mọi lúc), quan hệ (mọi người), cách thức (mọi cách), nội dung (mọi nội dung) để H toán.

Mới nghe nói, tưởng chừng như việc thực hiện cả “năm mọi” rất khó khăn, vất vả, thậm chí “không tưởng”. Dĩ nhiên, ở đời chẳng có việc gì dễ làm. Cụ Nguyễn Du viết:

Nghề chơi cũng lắm công phu

huống chi là “nghề H” mà còn phải biết cả “H trong chơi”, “chơi mà H”. Điều này không chỉ áp dụng cho trẻ em mẫu giáo mà cả cho người lớn nữa, chỉ khác là “chơi mà H” của người lớn khác với “chơi mà H” của trẻ em. Đó là một phần của nội dung “mọi cách”.

Cho nên, để thực hiện “năm mọi”, phải kiên trì, bền bỉ, bắt đầu luyện dần càng sớm càng tốt và dù “muộn vẫn hơn không”. Không nên coi thường cái nhỏ vì đó là những hạt cát sẽ làm nên bãi phù sa; ngay khi đã thành đạt rồi vẫn không nên coi thường cái nhỏ vì đó là những động tác thể dục hàng ngày để duy trì và phát triển sức khỏe của người lực sĩ. Nhà bác học có những lúc tư duy trên những vấn đề lớn, nhưng hàng ngày ông ta vẫn tư duy trên những chuyện đời thường, và phần tư duy đời thường này chiếm nhiều thì giờ hơn. Nhưng sở dĩ ông ta có được tư duy bác học để nghĩ về những vấn đề lớn là nhờ ông ta được rèn luyện hàng ngày bằng “năm mọi”, giúp ông có cái sâu sắc, nhanh nhạy trong tư duy, có cái bản lĩnh kiên trì, tiến công không mệt mỏi. H toán theo quan niệm như trên thì nhiều khi, tuy kiến thức chả thêm được gì nhưng tư duy và tính cách thì lại được nhiều.

Dạy cho học trò một vài định lí thì không khó, nhưng dạy sao cho họ có óc tò mò khoa học là chuyện rất khó, phải đi sâu vào tâm lí con người mới tìm ra được cách D thích hợp. Do vậy, phát triển tư duy là vô vùng quan trọng.

Để cho sự liên hệ giữa “toán” và “phi toán” cùng việc thực hiện “năm mọi” được nhạy bén, sâu sắc thì nên theo phương châm: “Có công mài sắt, có ngày nên kim”, dần dần sẽ hình thành một phong cách H toán rất có hiệu quả, không mệt mỏi vì cách H rất linh hoạt, thay đổi, không làm cho người ta mệt mỏi như khi ngồi trên

lớp H quá nhiều giờ toán hay đọc quá nhiều sách toán. H kiểu “năm mọi” không những không mệt mà còn hứng thú nữa. Cái gì cũng vậy, khi chưa thạo thì làm vất vả, nhưng khi đã thạo, đã quen thì làm được nhẹ nhàng, như người lúc mới tập đi xe đạp và lúc đi xe đã thành thạo vậy. Khi đã nhuần nhuyễn đến mức “phong cách” thì “năm mọi” sẽ tự nhiên như hằng ngày ta thở. Có rèn luyện được phong cách đó thì mới TH được suốt đời, mới có thể cập nhật những kiến thức ở thời đại “bùng nổ thông tin” hôm nay, và mới có được văn hóa toán học. Ra đời, có thể nhiều HS không trực tiếp dùng đến toán nhưng văn hóa toán học vẫn có ích cho mọi HS, dù sau này làm nghề gì đi nữa.

3 Bảy loại tư duy cần rèn luyện trong toán học

Ta hay nói đến rèn luyện tư duy toán học một cách chung chung. Nhưng tư duy toán học là gì? Với cách D toán, H toán phổ biến ở nhà trường nước ta hiện nay thì tư duy toán học hầu như chỉ có tư duy logic hình thức, thậm chí chỉ là khả năng suy diễn từ giả thiết ra kết luận, mà chính khả năng này cũng hạn chế vì không thành thạo, do ít dùng “phân tích” và “tổng hợp” xen kẽ để định hướng cho suy diễn. Trong nhà trường, quy nạp lại rất ít dùng vì cách D, cách H toán hiện nay ít yêu cầu “mày mò, dự đoán”; “quan sát, so sánh” lại càng yếu hơn vì “toán” ít liên hệ với “phi toán”, nhất là khi người học chỉ lao vào “luyện thi”, chứ không phải ôn thi. Ôn thi phải đạt yêu cầu “hệ thống hóa”, “liên hệ với thực tế”, nhờ vậy mà cũng cố sâu sắc các kiến thức riêng lẻ, vận dụng được chúng. Còn “luyện thi” chỉ nhằm rất hạn hẹp vào những kiến thức, những phương pháp hay gặp trong các kì thi. Vậy, muốn rèn luyện tư duy toán học thì bước đầu là phải rèn luyện *tư duy logic* một cách đầy đủ, coi trọng cả suy diễn và qui nạp, cả phân tích và tổng hợp, cả H và hành theo một nghĩa rộng gắn toán với phi toán. Nhưng, muốn H toán một cách sáng tạo thì tư duy logic thôi chưa đủ, *tư duy biện chứng* rất quan trọng, nó là cái giúp ta phát hiện vấn đề và định hướng tìm tòi cách giải quyết vấn đề. Nó là cái giúp ta củng cố lòng tin khi việc tìm tòi tạm thời thất bại. Những lúc ấy, ta vẫn vững lòng tin rằng rồi sẽ có ngày thành công, và hướng tìm đến thành công là cố nhìn cho được mỗi khái niệm toán học theo nhiều cách khác nhau, càng nhiều càng tốt.

Với tư duy biện chứng thì từ một việc cỡ con, tưởng chừng như chả có gì để suy nghĩ ra cái mới, cũng có thể đề xuất được lắm vấn đề để tự HS đi đến kiến thức mới (mới đối với họ). Đừng nghĩ rằng nó khó, GV có thể tránh những danh từ triết học, có thể tìm ngôn ngữ thông thường để gợi mở cho HS: “Các em có thấy gì lạ không? Hình bình hành là bậc cha chú, hình thoi là bậc con cháu. Chẳng lẽ thế hệ sau lại chịu thua thế hệ trước sao? Chắc chắn hai đường chéo của hình thoi phải có tính chất gì đó đặc biệt hơn hình bình hành”. Từ gợi mở như vậy, cô giáo chuyển sang gợi mở hướng giải quyết: “Thử nhìn các đường chéo của hình thoi

xem, chúng còn là đường gì nữa?” để dẫn đến việc HS xem đó còn là những đường phân giác của các góc (dĩ nhiên chúng còn vuông góc với nhau nữa), và cuối cùng đi đến bài toán “Mở rộng tính chất hai đường chéo trong hình thoi”. GV không truyền thụ trực tiếp mà gợi mở cho HS tự tìm tòi kiên nhẫn.

Muốn nhìn được một khái niệm toán học theo nhiều cách khác nhau phải có trí tưởng tượng dồi dào như các nhà văn viết truyện thần thoại hay khoa học viễn tưởng. Trí tưởng tượng dồi dào cũng giúp chúng ta sáng tạo ra vô vàn những phép biến đổi, phát hiện ra những sự việc đẳng cấu hay đồng cấu giữa những sự việc, hiện tượng cực kì khác nhau. *Tư duy hình tượng* còn giúp cho chúng ta biết thưởng thức cái đẹp trong toán học. Đó là cái đẹp trong sự tài tình thiên biến vạn hóa, cái đẹp trong sự sâu xa, cái đẹp trong sự rõ ràng, súc tích, cái đẹp trong sự mới lạ, cái đẹp trong sự hài hòa, cái đẹp trong sự mềm mại, uyển chuyển, linh hoạt v.v. . . Chẳng hạn, số ảo đẹp như một ông Bụt, một cô tiên giúp người hoạn nạn qua khỏi cơn hiểm nguy rồi biến mất. Mới học chút ít lượng giác mà đã có thể đo đạc những nơi không thể đặt chân đến, tài tình biết mấy! Công thức Py-ta-go⁶: $a^2 = b^2 + c^2$ thật là đẹp. Sao mà khéo đến thế, sao lại đúng là bình phương các cạnh?

Từ chỗ thưởng thức những cái đẹp như vậy, ta có nhu cầu tìm hiểu sâu xa nguồn gốc của cái đẹp, và muốn làm cho toán học đẹp hơn, đó cũng là những động lực giúp ta phát hiện thêm vấn đề mới.

Các tư duy khác cũng cần cho việc H toán một cách sáng tạo: *tư duy quản lí* chung quy là tư duy hướng vào việc tìm ra cái tối ưu trong quá trình sử dụng, bố trí người, việc, công cụ, tiền bạc. . . và trong toán học thì có biết bao bài toán tối ưu, nên trong lĩnh vực này giữa “toán” và “phi toán” có tác dụng qua lại. Một trường hợp đặc biệt của tư duy quản lí là *tư duy kinh tế* (khi tư duy quản lí hướng vào việc tìm ra cái tối ưu trong quản lí kinh tế), và trong toán học đã hình thành hẳn một lĩnh vực riêng gọi là toán kinh tế. *Tư duy kĩ thuật* hướng vào việc tìm ra những thủ thuật để biến đổi từ những hình thức ban đầu sang những hình thức khác thuận lợi hơn. Trong vật lí, hóa học, . . . đó là tư duy hướng vào việc biến đổi các dạng chuyển động, các dạng năng lượng, các dạng vật chất. . . nhằm thiết kế ra một công cụ có tính năng, tác dụng định trước. Trong toán học thì đó là tư duy hướng vào việc tìm tòi các phép biến đổi cụ thể, đủ các loại (đại số, hình học, giải tích. . .) để đưa bài toán đã cho đến những bài toán dễ hơn. Cuối cùng, trong việc thực hành tính toán để đi đến kết quả, phải có *tư duy thuật toán* hướng vào việc tìm ra bài bản, lớp lang gọn nhất với những bước đi rõ ràng, đơn trị.

Để rèn luyện được cả bảy tư duy nói trên thì chỉ H trên lớp và trong sách sao đủ, thế nào cũng phải có tác phong “năm mọi” trong H tập toán học. “Năm mọi” và “bảy tư duy” vừa là hệ quả của nhau, vừa là tiền đề cho nhau, Trong điều kiện khoa học và công nghệ phát triển như vũ bão mà thời gian H ở nhà trường không

⁶Pythagoras (570?–495? Trước Công Nguyên), nhà triết học người Hy Lạp.

tăng, muốn cập nhật kiến thức thì phải rất coi trọng phát triển tư duy, rèn luyện tính cách. Trong bảy tư duy nói trên, đối với người H toán (và có lẽ cả người H các môn khoa học khác) cũng khó mà bỏ đi tư duy nào, tuy liều lượng có khác nhau tùy theo chuyên môn hóa và nghề nghiệp.

4 Tóm tắt

- Năm mọi trong học (H) toán:
 1. H mọi nơi.
 2. H mọi lúc.
 3. H mọi người.
 4. H bằng mọi cách.
 5. H qua mọi nội dung.
- Bảy loại tư duy (TD) cần rèn luyện trong toán học:
 1. TD logic.
 2. TD biện chứng.
 3. TD hình tượng.
 4. TD quản lí.
 5. TD kinh tế.
 6. TD kĩ thuật.
 7. TD thuật toán.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Cảnh Toàn (chủ biên) [2000], *Biển học vô bờ*, NXB. Thanh Niên.
- [2] Nguyễn Cảnh Toàn (2009), *Nên học toán thế nào cho tốt?*, NXB. Giáo Dục.