

TỔNG HỢP CÁC BÀI SỐ HỌC VÀ TỔ HỢP TRONG CÁC KÌ OLYMPIC THI NĂM 2013-2014

Lưu Giang Nam

Chuyên Toán, k20, Chuyên Phan Ngọc Hiển, Cà Mau.

1 Lời nói đầu.

Trong các kì thi **Olympic Toán ở Việt Nam** và trên thế giới thì Số học và Tổ hợp luôn là phần quan trọng và quyết định giải cho hầu hết học sinh dự thi. Nếu học giỏi phần này thì học sinh sẽ có thể đạt được thành tích cao trong các kì thi này. Tuy nhiên đây là phần khó học và cũng khó lấy điểm, tuy nhiên nó được sử dụng lại ý tưởng rất nhiều qua các kì thi. Đây có thể là một lợi thế cho các học sinh học không tốt phần này.

Bài viết tổng hợp các bài Số học và Tổ hợp qua các kì thi HSG các cấp năm 2013-2014. Phần bài giải được lấy lại từ các thành viên VMF đăng trên diễn đàn và 1 số bài do mình tự giải. Một số bài khá khó mình giải không ra và cũng không tìm thấy bài giải trên mạng nên mình để **Tự làm**. Do làm trong một thời gian ngắn nên có thể có sai sót, hy vọng các bạn có thể tìm thấy và tự sửa dùm mình. Hy vọng bài viết sẽ giúp ích ít nhiều cho các bạn trong quá trình học Số học, Tổ hợp và thi HSG các cấp. Chúc các bạn có những kì thi học sinh giỏi tốt trong năm 2015 và các năm sau, đặc biệt là có thể xử lí gọn câu **Số học** và câu **Tổ hợp**.

Ngày 24 tháng 7 năm 2014

Mục lục

1	Lời nói đầu.	1
2	Đề thi	3
2.1	Đề thi cấp tỉnh, thành phố và các kì thi phong trào	3
2.2	Đề thi quốc gia, quốc tế	14
3	Gợi ý giải	18
3.1	Gợi ý giải đề thi cấp tỉnh, thành phố và các kì thi phong trào	18
3.2	Gợi ý giải đề thi quốc gia, quốc tế	34
4	Phụ lục	45
4.1	Sổ học	45
4.2	Tổ hợp	45

2 Đề thi

2.1 Đề thi cấp tỉnh, thành phố và các kì thi phong trào

BÀI 1. Ta xếp một hoán vị của $(1, 2, 3, \dots, 2014)$ lên vòng tròn và kí hiệu các số bởi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2014}$ theo chiều kim đồng hồ. Quy ước $a_1 = a_{2015}$ và $a_0 = a_{2014}$. Gọi N là số các chỉ số $1 \leq i \leq 2014$ sao cho hoặc $a_{i-1} > a_i > a_{i+1}$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của N .

Đề thi chọn đội tuyển tham dự VMO 2014 THPT chuyên Khoa Học Tự Nhiên, vòng 1

BÀI 2. Cho 100 số nguyên dương không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được ít nhất một bộ các số có tổng bằng 100.

(Đề đề nghị duyên hải DBBB thpt chuyên Hưng Yên năm 2014)

BÀI 3. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để $2013^n - 1$ chia hết cho 2^{2014} .

(Đề đề nghị duyên hải DBBB thpt chuyên Hưng Yên năm 2014)

BÀI 4. Cho 10 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Chứng minh rằng tổng tại các số $c_i \in -1, 0, 1$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\sum_{j=1}^{10} c_i \cdot a_j$ chia hết cho 1023.

(Đề đề nghị duyên hải dbbb thpt chuyên bắc giang năm 2014)

BÀI 5. Chứng minh rằng từ 19 số tự nhiên tùy ý, luôn tìm được 2 số sao cho hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 36.

(Đề chọn đội tuyển thi Trại hè Hùng Vương 2014 - Chuyên Yên Bái)

BÀI 6. Trên mặt phẳng có 25 điểm, không có 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng. Tìm số màu k nhỏ nhất sao cho ta có thể tô màu tất cả các đoạn thẳng nối hai điểm trong mặt phẳng bởi k màu (mỗi đoạn thẳng được tô đúng một màu) và các cạnh của một tam giác bất kì tạo bởi 3 điểm trong chúng được tô bởi đúng hai màu.

(Đề đề nghị chọn HSG khu vực duyên hải và DBBB chuyên Biên Hòa - Hà Nam)

BÀI 7. Cho tập hợp $S = 1, 2, 3, \dots, 2014$. Tìm số cách chọn ra từ tập S m số chẵn và n số lẻ sao cho trong các số vừa chọn, không có hai số hơn kém nhau 1 đơn vị.

*(Đề thi chọn đội tuyển tham dự VMO 2014 THPT chuyên Khoa Học Tự Nhiên,
Câu 2 ngày 1)*

BÀI 8. Có tồn tại hay không một tập hữu hạn các điểm xanh và đỏ trong mặt phẳng sao cho với mọi đường tròn đơn vị có tâm là một điểm xanh đều có đúng 10 điểm đỏ, và số điểm xanh nhiều hơn số điểm đỏ.

(Đề thi chọn đội tuyển tham dự VMO 2014 THPT chuyên Khoa Học Tự Nhiên, Câu 4 ngày 1)

BÀI 9. Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn điều kiện $2n^2 + 3|m^2 - 2$

(Đề thi chọn đội tuyển tham dự VMO 2014 THPT chuyên Khoa Học Tự Nhiên, Câu 1 ngày 2)

BÀI 10. Tìm số nguyên dương k sao cho phương trình

$$x^2 + y^2 + x + y = kxy$$

có nghiệm nguyên dương (x, y)

Đề thi chính thức Olympic 30-4 toán 10 lần thứ XX năm 2014, câu 4.

BÀI 11. Cho trước số nguyên dương $n \geq 2$. Trong một giải đấu cờ vua có $2n$ vận động viên tham gia, một người đấu với một người khác đúng một ván. Tại một thời điểm trong giải, người ta thấy có $n^2 + 1$ ván đấu đã diễn ra. Chứng minh rằng khi đó có thể chọn ra ba vận động viên sao cho hai người bất kì trong ba người được chọn đều đã thi đấu với nhau.

Đề thi chính thức Olympic 30-4 toán 10 lần thứ XX năm 2014, câu 5

BÀI 12. Có n bạn nam và n bạn nữ xếp thành một hàng thẳng. Chứng minh rằng tổng khoảng cách giữa hai bạn cùng giới nhỏ hơn hoặc bằng tổng khoảng cách giữa hai bạn khác giới.

Đề thi HSG thành phố Hải Phòng bảng A1 năm 2013-2014, câu 5

BÀI 13. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 2011 chữ số có dạng $\overline{a_{2011}a_{2010}\dots a_2a_1}$ thỏa mãn điều kiện $a_i \equiv i \pmod{2}$ với mọi $i = 1, 2, 3, \dots, 2011$. Tính số tất cả các cặp số (x, y) với $x, y \in \mathbb{Z}$, $x < y$ sao cho $x + y$ chia hết cho 5^{2011} .

Đề thi Hướng tới Olympic Toán 2013, trong GGTH 2013, câu 3, khối 11

BÀI 14. Trong chương trình Gặp gỡ Toán học lần IV có tổng cộng 673 tựa sách và quyết định tổ chức đăng ký mua sách cho các thành viên tham gia. Sau khi thu phiếu đăng ký, ban tổ chức phát hiện các điều thú vị sau:

- 1) Tất cả các bạn đều đăng ký mua đúng ba tựa sách.
- 2) Hai bạn bất kì đăng ký mua giống nhau ít nhất một tựa sách.
- 3) Không có tựa sách nào được tất cả các thành viên đăng ký mua.
- 4) Không có ba bạn nào mua ba tựa sách giống nhau.

Chứng minh rằng ở kỳ Gặp gỡ Toán học lần này có nhiều nhất 2011 bạn tham gia giao lưu và học tập.

Đề thi Hướng tới Olympic Toán 2013, trong GGTH 2013, câu 4, khối 11

BÀI 15. Tìm tất cả các số nguyên dương n chẵn sao cho nếu đặt

$$a_n = \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \dots + \frac{1}{(n-1)! \cdot 1!}$$

thì phương trình $2^{x_n} = a_n(2y_n + 1)$ có nghiệm nguyên dương (x_n, y_n) .

Đề thi Hướng tới Olympic Toán 2013, trong GGTH 2013, câu 3, khối 12

BÀI 16. Trong một đất nước có 54 thành phố, mỗi thành phố có một sân bay. Giữa hai thành phố bất kì có đúng một đường bay nối trực tiếp giữa chúng và mỗi đường bay thuộc sở hữu của một hãng hàng không duy nhất. Biết rằng có 4 hãng hàng không đang hoạt động trên nước này. Chứng minh rằng tồn tại một hành trình bay vòng quanh một số thành phố (lớn hơn 2) sao cho tất cả các đường bay trên hành trình đó đều thuộc sở hữu của một hãng hàng không.

Đề thi Hướng tới Olympic Toán 2013, trong GGTH 2013, câu 4, khối 12

BÀI 17. a) CMR với mọi số nguyên tố p thì $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không phải là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

b) Cho các số nguyên dương a, b sao cho ab là số chính phương. Chứng minh rằng đa thức $x^a + x^b + 1$ không chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Đề kiểm tra chất lượng đội tuyển THPT Chuyên Hà Tĩnh 2013-2014, câu 2

BÀI 18. a) Tồn tại hay không các số thực $a_{ij} \in [0; 1] \forall i = \overline{1, 2013}, j = \overline{1, 2014}$ thỏa mãn điều

$$\text{kiện } \frac{1}{\sqrt[2014]{mn}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall m = \overline{1, 2013}, n = \overline{1, 2014} ?$$

b) Trên bàn cờ vua có một số quân cờ. Biết rằng nếu một ô nào đó còn trống thì tổng số lượng những quân cờ đứng cùng hàng và cùng cột với ô đó không nhỏ hơn 8. Chứng minh rằng trên bàn cờ đó có ít nhất 32 quân cờ.

Đề kiểm tra chất lượng đội tuyển THPT Chuyên Hà Tĩnh 2013-2014, câu 4

- BÀI 19. Tìm tất cả các bộ ba số (x, n, p) với x, n là các số nguyên dương và p là số nguyên tố thỏa mãn: $x^3 + 2x = 3(p^n - 1)$.

Đề thi Olympic chuyên KHTN 2014

- BÀI 20. Trong một phòng thi có $n \geq 2$ thí sinh, được xếp xung quanh một bàn tròn. Trong ngân hàng đề có 4 loại đề khác nhau, mỗi loại có nhiều hơn n bản. Một cách phát đề được gọi là hợp lệ nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ 1 đề và hai thí sinh bất kỳ ngồi cạnh nhau thì nhận được 2 loại đề khác nhau. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu thí sinh? Biết rằng số cách phát đề hợp lệ không vượt quá 2013.

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Hải Phòng năm học 2013-2014, câu 4 ngày 1

- BÀI 21. Cho $a, b \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq a \leq b$ và đặt $M = \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$. Giả sử $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ là hàm số cho bởi $f(n) = n + a$ nếu $n < M$ và $f(n) = n - b$ nếu $n \geq M, \forall n \in \mathbb{Z}$. Đặt $f^1(n) = f(n), f^{i+1}(n) = f(f^i(n)) \forall i > 1$. Tìm số k nhỏ nhất sao cho $f^k(0) = 0$.

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Hải Phòng năm học 2013-2014, câu 1 ngày 2

- BÀI 22. Cho p nguyên tố và $p \equiv 3 \pmod{4}$. Hãy tìm số dư của phép chia $(1^2 + 1)(2^2 + 1) \cdots ((p-1)^2 + 1)$ cho p .

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Hải Phòng năm học 2013-2014, câu 3 ngày 2

- BÀI 23. Trong mỗi ô của bảng 2013×2013 ta điền một số thực bất kỳ trong đoạn $[-1, 1]$ sao cho tổng 4 số trong hình vuông con 2×2 bất kỳ thì bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất của tổng tất cả các số trên bảng 2013×2013 .

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Hải Phòng năm học 2013-2014, câu 4 ngày 2

- BÀI 24. Cho hai số tự nhiên m và n sao cho $m > n \geq 1$. Biết rằng hai chữ số tận cùng của 2014^m bằng với hai chữ số tận cùng của 2014^n theo cùng thứ tự. Tìm các số m và n sao cho tổng $m + n$ có giá trị nhỏ nhất.

Đề thi chính thức Olympic 30-4 toán 11 lần thứ XX năm 2014, câu 5

- BÀI 25. Cho đa giác đều 9 đỉnh $A_1 A_2 \dots A_9$. Mỗi đỉnh của đa giác hoặc có màu đỏ hoặc có màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác phân biệt bằng nhau có tất cả các đỉnh là đỉnh của đa giác cùng màu.

Đề thi chính thức Olympic 30-4 toán 11 lần thứ XX năm 2014, câu 6

BÀI 26. Cho hai số nguyên dương lẻ m, n thỏa mãn $\begin{cases} n \mid m^2 + 2 \\ m \mid n^2 + 2 \end{cases}$

1) Tìm một cặp gồm hai số nguyên dương (m, n) thỏa mãn điều kiện trên mà $m, n > 10$ và m, n đều lẻ.

2) Chứng minh $4mn \mid m^2 + n^2 + 2$.

Đề thi HSG toán 10 tỉnh Đồng Nai 2013-2014, câu 4

BÀI 27. Với mọi số nguyên dương n , hãy xác định theo n số tất cả các cặp thứ tự hai số nguyên dương (x, y) sao cho

$$x^2 - y^2 = 100.30^{2n}$$

. Đồng thời chứng minh số cặp này không thể là số chính phương.

CDT Olympic toán 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong TpHCM 2014, lần 3, câu 2

BÀI 28. Cho tập X gồm n phần tử. Hỏi có bao nhiêu bộ thứ tự (A, B, C) với A, B, C là các tập con của X sao cho $X = A \cup B \cup C$.

CDT Olympic toán 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong TpHCM 2014, lần 3, câu 5

BÀI 29. Cho p là một số nguyên tố, n là số nguyên dương và a, b, c là các số nguyên thỏa mãn :

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Đề thi đề nghị chọn HSG toán 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2013-2014, câu 4

BÀI 30. Giả sử S là tập hợp có 2011 điểm trên mặt phẳng, hai điểm bất kì của S cách nhau ít nhất 1 đơn vị độ dài. Chứng minh rằng S có chứa tập con T gồm 250 điểm mà hai điểm bất kì cách nhau ít nhất một đoạn bằng $\sqrt{3}$.

Đề thi đề nghị chọn HSG toán 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2013-2014, câu 5

BÀI 31. Trên mặt phẳng cho 2014 điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện : với 2 điểm bất kỳ ta luôn tìm được ít nhất 1 điểm thứ 3 thẳng hàng với 2 điểm đó . chứng minh rằng 2014 điểm đã cho là thẳng hàng.

Chọn đội dự tuyển THPT Chuyên Quốc Học ngày 2 , năm 2013-2014, câu 2

BÀI 32. Cơ sở dữ liệu tạp chí của thư viện Quốc Gia có đúng 2016 loại khác nhau. Thư viện này cho phép 2013 thư viện địa phương kết nối để có thể khai thác cơ sở dữ liệu tạp chí của nó. Biết mỗi thư viện địa phương được phép khai thác ít nhất 1008 loại tạp chí khác nhau và 2 thư viện địa phương bất kì có tối đa 504 loại tạp chí mà cả 2 thư viện địa phương đó cùng đc phép khai thác. Chứng minh rằng không có quá 1 loại tạp chí trong cơ sở dữ liệu của thư viện Quốc Gia mà cả 2013 thư viện địa phương đều không thể khai thác được.

Đề chọn đội tuyển thi Quốc Gia Khối chuyên DHSP 2013-2014, câu 4 vòng 1

BÀI 33. Với mỗi số nguyên dương k ta đặt $f(k) = 6^k + 9^k + 10^k + 15^k$. Một cặp 2 số nguyên dương $(m; n)$ được gọi là cặp đôi hạnh phúc nếu $f(m)$ và $f(n)$ cùng chia hết cho mn .
1) Cho 2 số nguyên lẻ $m, n > 1$ và (m, n) là 1 cặp đôi hạnh phúc. Chứng minh rằng $25|mn$ nhưng $125 \nmid mn$.
2) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k để (k, k) là cặp đôi hạnh phúc và nếu phân tích $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ thì $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1911^{103}$. Ở đây $p_1, p_2, \dots, p_r$ là các số nguyên tố đôi 1 phân biệt và $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ là các số nguyên không âm.

Đề chọn đội tuyển thi Quốc Gia Khối chuyên DHSP 2013-2014, câu 2 vòng 2

BÀI 34. Cho 2 đường gấp khúc kín không tự cắt, mỗi đường có 2013 cạnh. Biết rằng đường thẳng chứa các cạnh của 2 đường gấp khúc nói trên không có 3 đường nào đồng quy. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra từ mỗi đường gấp khúc 1 cạnh sao cho các đầu mút của chúng là 4 đỉnh tứ giác lồi.

Đề chọn đội tuyển thi Quốc Gia Khối chuyên DHSP 2013-2014, câu 4 vòng 2

BÀI 35. Với x và a là hai số thực, ta nói số y là số tương ứng với x để được a nếu: $y + x = a$. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z}, -10 \leq x \leq 5\}$. Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba số thuộc tập X lập thành một cặp số cộng với công sai $d = 2$ và đặt $S = x_1 + x_2 + x_3$. Ký hiệu y_i lần lượt là số tương ứng với x_i để được $9S$, với $i = 1, 2, 3$. Ký hiệu z_i lần lượt là số tương ứng với y_i để được $\frac{1}{9}S^3$, với $i = 1, 2, 3$. Ký hiệu $F = z_1 + z_2 + z_3$, tìm giá trị lớn nhất của F .

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA TỈNH CÀ MAU NĂM 2013 - 2014, câu 3

BÀI 36. Cho dãy các số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, 2013(*)$ có 2013 số và $B_1, B_2, \dots, B_n$ là các bảng hình vuông kẻ ô, trong đó bảng B_k có k dòng k cột ($k = 1, 2, \dots, n$). Viết các số tự nhiên trong dãy $(*)$ vào các ô của các bảng nói trên thỏa mãn hai điều kiện sau:
1) Mỗi số của dãy $(*)$ chỉ viết trong một ô duy nhất;
2) Viết số 1 vào ô của B_1 , viết các số 2, 3, 4, 5 vào các ô của B_2 . Sau khi viết đầy các ô của bảng B_k thì viết các số tiếp theo của dãy vào $(*)$ vào các ô của bảng B_{k+1} với $k = 1, 2, \dots, n-1$ và bảng B_n dừng lại ngay sau ô được viết số 2013.
Tìm n và tổng tất cả các số viết trong bảng B_n .

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA TỈNH CÀ MAU NĂM 2013 - 2014, câu 5

- BÀI 37. Cho các số nguyên dương n, k, p với $k \geq 2$ và $k(p+1) \leq n$. Cho n điểm phân biệt cùng nằm trên 1 đường thẳng. Tô n điểm đó bằng 2 màu xanh, đỏ (mỗi điểm chỉ tô đúng 1 màu). Tìm số cách tô màu khác nhau, sao cho các đk đồng thời xảy ra:
- 1) Có đúng k điểm được tô bởi màu xanh.
 - 2) Giữa hai điểm màu xanh liên tiếp (tính từ trái qua phải) có ít nhất p điểm được tô màu đỏ.
 - 3) Ở bên phải điểm tô màu xanh cuối cùng có ít nhất p điểm được tô màu đỏ.
- (Hai cách tô màu được gọi là khác nhau nếu có ít nhất một điểm được tô màu khác nhau trong hai cách đó).

Đề chọn đội tuyển Quảng Bình 2013-2014, câu 9

- BÀI 38. Số nguyên dương x được gọi là số thú vị nếu hai chữ số tận cùng của x và x^2 giống nhau. Ví dụ các số 1, 25, 100 là các số thú vị. Hỏi có bao nhiêu số thú vị trong tập hợp tất cả các số nguyên dương không lớn hơn 2013?

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Đồng Tháp năm học 2013-2014, câu 4 ngày 1

- BÀI 39. CLB du khảo có n thành viên. Năm ngoái CLB đã tổ chức được 6 chuyến du khảo, mỗi chuyến có 5 thành viên tham dự. Một thành viên CLB nhận xét rằng hai chuyến du khảo bất kỳ có không quá hai thành viên chung. Hỏi CLB đó có ít nhất bao nhiêu thành viên?

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Đồng Tháp năm học 2013-2014, câu 2 ngày 1

- BÀI 40. Có bao nhiêu hoán vị của dãy $(2; 4; 1; 0; 2; 0; 1; 3)$ thỏa mãn các chữ số giống nhau không đứng kề nhau.

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Quảng Ninh năm học 2013-2014, câu 4

- BÀI 41. Trong một hội nghị khoa học có 5000 đại biểu tham dự, mỗi một đại biểu biết ít nhất một thứ tiếng. Một uỷ ban gồm một số đại biểu được gọi là uỷ ban làm việc nếu tất cả thành viên trong uỷ ban đều biết chung một thứ tiếng và được gọi là uỷ ban thách thức nếu không có hai thành viên nào của uỷ ban biết chung một thứ tiếng (uỷ ban có thể gồm 1 thành viên; uỷ ban này gọi là làm việc cũng được, thách thức cũng được). Chứng minh rằng có thể chia các đại biểu thành đúng 100 uỷ ban rời nhau (mỗi đại biểu thuộc đúng một uỷ ban) sao cho các uỷ ban này hoặc là uỷ ban làm việc hoặc là uỷ ban thách thức.

Đề thi chọn đội tuyển toán trường PTNK năm 2013-2014, ngày 1, câu 3

BÀI 42. Cho n là số nguyên dương và A là tập con khác rỗng của $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Tính giá trị của tổng $S(A) = \sum_{E \subset X} (-1)^{|E \cup A|}$, trong đó E lấy trên tất cả các tập con của X (kể cả tập rỗng). Cho $m \in \mathbb{N}^*$, xét m tập con khác rỗng của X là $A_1, A_2, \dots, A_m$ và m số nguyên khác 0 là $a_1, a_2, \dots, a_m$ sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_m < 0$. Chứng minh rằng tồn tại tập con E của X sao cho $\sum_{E \subset X} (-1)^{|E \cup A|} a_i > 0$. (Ký hiệu $|A|$ chỉ số phần tử của tập hợp A , số phần tử của tập rỗng là 0).

Đề thi chọn đội tuyển toán trường PTNK năm 2013-2014, ngày 2, câu 3

BÀI 43. Cho 10 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Chứng minh rằng tồn tại các số $x_i \in \{-1; 0; 1\}$ không đồng thời bằng 0 với $i = 1, 2, \dots, 10$ sao cho số $\sum_{i=1}^{10} x_i a_i$ chia hết cho 1023.

Yên Bái TST, bài 5 ngày 1

BÀI 44. a) Cho dãy số: 1, 101, 10101, 1010101, Tìm các số hạng trong dãy là số nguyên tố.
b) Hoàng tử muốn cứu công chúa khỏi một con rồng có 100 cái đầu. Hoàng tử có 2 thanh kiếm. Nếu dùng thanh kiếm thứ nhất thì mỗi lần chặt được đúng và chỉ đúng 21 cái đầu. Nếu dùng thanh kiếm thứ hai thì mỗi lần chặt được đúng và chỉ đúng 5 cái đầu nhưng con rồng lại mọc lên 2014 cái đầu khác. Hoàng tử sẽ cứu được công chúa nếu toàn bộ số đầu rồng bị chặt hết. Hỏi chỉ với hai thanh kiếm trên hoàng tử có thể cứu được công chúa hay không? Vì sao?

Yên Bái TST, bài 4 ngày 2

BÀI 45. Tìm tất cả số nguyên dương n có đúng 12 ước nguyên dương $d_1, d_2, \dots, d_{12}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{11} < d_{12} = n$,
- ii) $d_{d_4-1} = d_8(d_1 + d_2 + d_4)$.

BÀI 46. Người ta xếp 2014 bóng đèn đang bật sáng thành một hàng dài, từ trái sang phải. Hai người cùng thực hiện một trò chơi như sau: Lần lượt từng người chọn tùy ý 5 bóng đèn liên tiếp, trong đó bóng đèn đầu tiên bên trái trong 5 bóng đèn được chọn phải đang sáng và thay đổi trạng thái của 5 bóng đèn đó (từ sáng thành tắt và từ tắt thành sáng). Ai không thể thực hiện được nữa thì thua cuộc. Chứng minh rằng đến một lúc nào đó trò chơi phải kết thúc và dù cho có chơi như thế nào thì người đầu tiên luôn thua cuộc.

Đề thi chọn đội tuyển toán tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu 2013-2014, câu 5

BÀI 47. Tìm số thực p, q sao cho phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và $x^2 + qx + 2 = 0$ có nghiệm chung và $A = 2|p| + 3|q|$ nhỏ nhất.

*ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG QG TP.HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2013-2014,
câu 3 ngày 1*

BÀI 48. Có tồn tại hay không một tập con A gồm 2014 phần tử của tập $S = \{1; 2; \dots; 3020\}$ thỏa $2x \notin A \forall x \in A$?

*ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG QG TP.HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2013-2014,
câu 5 ngày 2*

BÀI 49. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1$ chia hết cho 2^{2013} .

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Bắc Ninh năm học 2013-2014, câu 4

BÀI 50. 1. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

với mọi số nguyên dương n .

2. Cho bảng hình chữ nhật kích thước $m \times n$ (m là hàng, n là cột $m < n$). Đặt một số viên bi vào một số ô của bảng sao cho mỗi cột có ít nhất một viên bi. Chứng minh rằng có ít nhất hai viên bi mà hàng chứa nó có nhiều bi hơn cột chứa nó.

Bắc Ninh 2014

BÀI 51. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa: $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$.

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN CHUYÊN NGUYỄN DU (VÒNG 2) - 2013/2014 , câu 2

BÀI 52. Cho đa giác lồi 2014 đỉnh. Một điểm P nằm trong đa giác mà không thuộc bất kì đường chéo nào của đa giác. Chứng minh rằng số tam giác có đỉnh thuộc 2014 đỉnh trên mà chứa được P (P thuộc miền trong tam giác đó) là số chẵn.

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN CHUYÊN NGUYỄN DU (VÒNG 2) - 2013/2014 , câu 6

BÀI 53. Có bao nhiêu bộ sắp thứ tự (a, b, c) , với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn: $[a, b, c] = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^{11}$? (Kí hiệu $[a, b, c]$ là bội chung nhỏ nhất của ba số a, b, c nguyên dương).

*Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi trường THPT chuyên Lê Quý Đôn Bình Định,
năm học 2013-2014, câu 3*

BÀI 54. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho $P = \frac{x^3 + y^3 - x^2y^2}{(x+y)^2}$ là một số nguyên không âm.

*ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 12 TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN
NGỌC HIỂN, năm 2013-2014, câu 5*

BÀI 55. Cho dãy các phân số: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2012}, \frac{1}{2013}$. Người ta biến đổi dãy bằng cách xóa đi 2 số a, b bất kỳ và thay bằng số $a + b + ab$. Sau 1 lần biến đổi số các số hạng giảm đi 1 đơn vị so với dãy trước. Chứng minh rằng giá trị của số hạng cuối sau 2012 lần biến đổi không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện và tìm giá trị đó.

Đề chọn đội tuyển HSG Đồng Tháp vòng 1

BÀI 56. Cho (H) là một đa giác đều 24 cạnh. Mỗi đỉnh của (H) sẽ được tô bởi chỉ một trong hai màu xanh và đỏ. Khi đó, nếu (K) là một đa giác đều thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- Tập đỉnh của (K) là tập con của tập đỉnh của (H).
- Tất cả các đỉnh của (K) được tô bởi cùng một màu.

thì ta gọi (K) là một mẫu đơn sắc. Hãy tính số cách tô màu các đỉnh của (H) sao cho không có mẫu đơn sắc nào được tạo ra.

Đề chọn HSG Đà Nẵng 2014

BÀI 57. Cho bảng kẻ ô vuông kích thước $(2n)x(2n+1)$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của k sao cho k thỏa mãn điều kiện: ta có thể tô màu k ô vuông đơn vị của bảng sao cho không có hai ô vuông đơn vị nào được tô mà có đỉnh chung.

Đề chọn HSG Đà Nẵng 2014

BÀI 58. CMR trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có ít nhất một số có tổng các chữ số chỉ hết cho 11.

HSG Quảng Bình 2014

BÀI 59. Trong một thư viện người ta quan sát thấy được:

- Mỗi ngày có 5 người đọc sách.
- Hai ngày bất kì thì số người đọc sách là 9.

Hãy tính xem trong 1 tháng có bao nhiêu người đến đọc sách. Biết tháng đó có 30 ngày.

Chọn ĐT Lương Thế Vinh, Đồng Nai

BÀI 60. Cho một bảng ô vuông không giới hạn số dòng và số cột. Ban đầu người ta viết hai số 1 và 3 vào hai ô khác nhau của bảng. Tiếp theo, người ta điền vào các ô trống các số nguyên dương theo quy tắc sau: Nếu trên bảng đã có 2 số a, b thì người ta có thể điền số $c = a + b + ab$ vào một ô còn trống nào đó trên bảng. Hỏi bằng cách đó trên bảng có thể xuất hiện được các số 2509 và 20132014 hay không? Giải thích câu trả lời.

Cần Thơ 2014

BÀI 61. Chứng minh rằng trong 18 người bất kì luôn tồn tại 4 người đôi 1 quen nhau hoặc đôi 1 không quen nhau.

Thái Bình 2014

BÀI 62. Cho n, k là các số nguyên dương mà $n + 1 \geq 2k$. Có bao nhiêu tập con gồm k phần tử của tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên mà không chứa 2 số liên tiếp.

Ninh Bình 2014

BÀI 63. Cho số nguyên $n > 1$. Có tất cả bao nhiêu dãy số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ với $x_i \in a, b, c; i = 1, 2, \dots, n$ thỏa mãn điều kiện $x_1 = x_n = a$ và x_i khác x_{i+1} với mọi $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Khánh Hòa 2014

2.2 Đề thi quốc gia, quốc tế

BÀI 1. Cho dãy số nguyên dương vô hạn $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, chứng minh rằng tồn tại duy nhất chỉ số $n \geq 1$ sao cho :

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

IMO 2014, P1

BÀI 2. Cho số nguyên dương $n \geq 2$, và bảng ô vuông $n \times n$ gồm n^2 ô vuông nhỏ. 1 cấu hình n ô vuông nhỏ được gọi là "thanh bình" nếu mỗi hàng và mỗi cột của bảng chứa đúng 1 ô vuông nhỏ. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho với mỗi cấu hình n ô vuông nhỏ "thanh bình" luôn tồn tại 1 hình vuông $k \times k$ của bảng không chứa 1 ô vuông nhỏ nào (trong n ô vuông "thanh bình").

IMO 2014, P2

BÀI 3. Với mỗi số nguyên dương n . Ngân hàng **Cape Town** đều phát hành đồng xu có mệnh giá $\frac{1}{n}$. Cho một bộ sưu tập gồm hữu hạn các đồng xu như vậy (các đồng xu không nhất thiết có mệnh giá khác nhau) mà tổng mệnh giá của chúng không vượt quá $99 + \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có thể phân chia bộ sưu tập đó thành không quá 100 nhóm sao cho tổng mệnh giá của các đồng xu trong mỗi nhóm không vượt quá 1.

IMO 2014, P5

BÀI 4. Một tập hợp các đường thẳng trên mặt phẳng được gọi là **ở thể tổng quát** nếu không có 2 đường thẳng nào trong tập hợp song song và không có 3 đường thẳng nào trong tập hợp đồng quy. Mỗi tập hợp đường thẳng **ở thể tổng quát** phân chia mặt phẳng ra các miền, trong đó mỗi miền có diện tích hữu hạn; ta gọi những miền như vậy là **những miền hữu hạn**. Chứng minh rằng với mọi số n đủ lớn. Trong mỗi tập hợp gồm n **đường thẳng ở thể tổng quát**, ta đều có thể tô không ít hơn $\sqrt{n}$ bởi màu xanh sao cho không có miền nào trong số **các miền hữu hạn** có toàn bộ đường biên là màu xanh.

IMO 2014, P6

BÀI 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét các điểm nguyên có tọa độ thuộc:

$$T = \{(x; y) : |x|, |y| \leq 20, (x; y) \neq (0; 0)\}.$$

Tô màu các điểm thuộc T sao cho với mọi điểm có tọa độ $(x, y) \in T$ thì có đúng một trong hai điểm $(x; y)$ và $(-x; -y)$ được tô màu. Với mỗi cách tô như thế, gọi N là số các bộ $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ mà cả hai điểm này cùng được tô màu và $x_1 \equiv 2x_2, y_1 \equiv 2y_2 \pmod{41}$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của N .

Vietnam TST 2014, P2

BÀI 6. Cho m, n, p là các số tự nhiên không đồng thời bằng 0. Không gian tọa độ được chia thành các mặt phẳng song song cách đều nhau. Một cách điền vào mỗi khối lập phương đơn vị một trong các số từ 1 đến 60 được gọi là cách điền Điện Biên nếu thỏa mãn: trong mỗi hình hộp chữ nhật với các mặt trên các hệ mặt đã cho và tập hợp độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là $\{2m + 1, 2n + 1, 2p + 1\}$. Khối lập phương đơn vị có tâm trùng với tâm của hình hộp chữ nhật được điền số bằng trung bình cộng của các số điền ở tâm của 8 hình lập phương ở các góc của hình hộp đó. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền Điện Biên?

Những cách điền là giống nhau nếu các số được điền vào các khối lập phương đơn vị có cùng tọa độ trong các cách này đều giống nhau.

Vietnam TST 2014, P6

BÀI 7. Cho đa giác đều có 103 cạnh. Tô màu đỏ 79 đỉnh của đa giác và tô màu xanh các đỉnh còn lại. Gọi A là số cặp đỉnh đỏ kề nhau và B là số cặp đỉnh xanh kề nhau.

- Tìm tất cả các giá trị có thể nhận được của cặp (A, B) .
- Xác định số cách tô màu các đỉnh của đa giác để $B = 14$. Biết rằng hai cách tô màu được xem là như nhau nếu chúng có thể nhận được nhau từ một phép quay quanh tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác.

VMO 2014, P3

BÀI 8. Tìm tất cả các bộ số gồm 2014 số hữu tỉ không nhất thiết phân biệt, thỏa mãn điều kiện: nếu bỏ đi một số bất kì trong bộ số đó thì 2013 số còn lại có thể chia thành 3 nhóm rời nhau sao cho mỗi nhóm gồm 671 số và tích tất cả các số trong mỗi nhóm bằng nhau.

VMO 2014, P6

BÀI 9. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k và n , tồn tại các số nguyên dương $m_1, m_2, \dots, m_k$ sao cho:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

IMO 2013, P1

BÀI 10. Trên mặt phẳng cho 2013 điểm màu đỏ và 2014 điểm màu xanh, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Ta chia mặt phẳng bởi các đường thẳng (không đi qua bất kì điểm nào trong các điểm đã cho) thành các vùng, sao cho không có bất kì vùng nào chứa các điểm có hai màu khác nhau. Hỏi cần ít nhất là bao nhiêu đường thẳng để luôn thực hiện được cách chia đó?

IMO 2013, P2

BÀI 11. Cho số nguyên $n \geq 3$ và xét $n + 1$ điểm nằm cách đều nhau trên một đường tròn. Ta đánh số các điểm này bằng các giá trị $0, 1, \dots, n$, không nhất thiết theo thứ tự, và hai điểm khác nhau thì được đánh hai số khác nhau. Hai cách đánh số được xem là như nhau nếu từ cách này có thể nhận được cách kia bằng cách xoay đường tròn. Một cách đánh số được gọi là đẹp nếu, với bất kì bốn số $a < b < c < d$ với $a + d = b + c$, dây cung nối các điểm được đánh số a và d không cắt dây cung nối các điểm được đánh số b và c . Gọi M là số cách đánh số đẹp và N là số các cặp số nguyên dương (x, y) được sắp thứ tự (nghĩa là: (x, y) và (y, x) là khác nhau, trừ khi $x = y$) sao cho $x + y \leq n$ và $\gcd(x, y) = 1$. Chứng minh rằng $M = N + 1$.

IMO 2013, P6

BÀI 12. 1. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương t sao cho $2012t + 1, 2013t + 1$ đều là các số chính phương.
2. Giả sử m, n là các số nguyên dương sao cho $mn + 1, mn + n + 1$ đều là các số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho $8(2m + 1)$.

Vietnam TST 2013, P2

BÀI 13. Với số n nguyên dương, đặt $S = \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$. Xét hàm số $f : (S \times \mathbb{Z}) \rightarrow [0; 1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:
i/ $f(x, 0) = f(x, 2n + 1) = 0$.
ii/ $f(x - 1, y) + f(x + 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) = 1$.
Gọi F là tập hợp tất cả các hàm số f thỏa mãn.
1/ Chứng minh rằng $|F|$ là vô hạn.
2/ Đặt v_f là tập hợp tất cả các ảnh của f . Chứng minh rằng v_f là hữu hạn.
3/ Tìm giá trị lớn nhất của v_f .

Vietnam TST 2013, P6

BÀI 14. Tìm cặp số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b \mid a^2b + a$ và $b^2 - a \mid ab^2 + b$.

Netherlands IMO Team Selection Tests 2014, P1

BÀI 15. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$.

Junior Balkan MO 2014, P1

BÀI 16. Kí hiệu $p(n)$ là tích tất cả các chữ số khác 0 của n . Chẳng hạn, $p(5) = 5, p(27) = 14, p(101) = 1$. Tìm ước nguyên tố lớn nhất của $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(999)$.

Moldova TST 2014, day 2, P4

BÀI 17. Tìm tất cả các số nguyên không âm k, n thỏa mãn: $2^{2k+1} + 9 \cdot 2^k + 5 = n^2$.

Albania BMO TST 2014, P5

BÀI 18. Tìm tất cả các bộ số nguyên không âm thỏa mãn $7^x - 2 \cdot 5^y = -1$.

Bosnia Herzegovina Team Selection Test 2014, day 1, P3

BÀI 19. Cho đa giác đều n cạnh, $n \geq 6$. Có bao nhiêu tam giác bên trong đa giác này sao cho cạnh của chúng được tạo thành từ các đường chéo của đa giác và đỉnh của chúng là đỉnh của đa giác.

Bosnia Herzegovina Team Selection Test 2014, day 2, P2

BÀI 20. Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 5. Giả sử rằng tồn tại số nguyên k sao cho $k^2 + 5$ chia hết cho p . Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương m, n thỏa mãn: $p^2 = m^2 + 5n^2$.

Korean NMO 2014, P5

BÀI 21. Với số tự nhiên bất kì n , chứng minh rằng:

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

là số chẵn

Indian NMO 2014, P2

BÀI 22. Cho $n > 1$ là một số tự nhiên. Đặt $U = \{1, 2, \dots, n\}$ và $A \Delta B$ là tập hợp tất cả các phần tử của U mà chỉ thuộc về đúng một tập A hoặc B .

Chứng minh rằng: $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

Ở đó $\mathcal{F}$ là họ các tập con của U sao cho bất kì hai tập phân biệt A, B của $\mathcal{F}$, ta luôn có $|A \Delta B| > 2$. Tìm $\mathcal{F}$ khi dấu bằng xảy ra.

Indian NMO 2014, P6

3 Gợi ý giải

3.1 Gợi ý giải đề thi cấp tỉnh, thành phố và các kì thi phong trào

BÀI 1. Gọi tập các chỉ số thỏa mãn là T , tập còn lại là S .

Xét khi ta đổi chỗ 2 số a_i, a_j bất kì thì ta xét bộ $(a_{i-2}, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$ và bộ $(a_{j-2}, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, a_{j+2})$, dễ thấy khi chuyển như vậy thì chỉ có các chỉ số $i-1, i, i+1$ và $j-1, j, j+1$ là có thể chuyển từ tập hợp này sang tập hợp khác.

Khi đổi chỗ a_i thành a_j nếu ta làm thay đổi dấu giữa (a_i, a_{i+1}) và (a_{i-1}, a_i) cùng lúc thì chỉ số j lúc này sẽ thuộc tập hợp chứa chỉ số i vừa chuyển đi, còn chỉ số $i+1$ và $i-1$ sẽ cùng lúc chuyển sang tập hợp khác tập hợp ban đầu, tức hiệu của hai tập hợp bất biến mod 2.

Nếu ta chỉ làm thay đổi dấu của một trong 2 cặp (a_i, a_{i+1}) và (a_{i-1}, a_i) , giả sử là của cặp (a_i, a_{i+1}) , thì khi đó chỉ số $i-1$ giữ nguyên, chỉ số i và $i+1$ sẽ cùng lúc chuyển khỏi tập hợp ban đầu của nó, một lần nữa ta có hiệu 2 tập hợp T, S là bất biến mod 2.

Xét tương tự với bộ $(a_{j-2}, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, a_{j+2})$ ta có mỗi 2 chuyển 2 số bất kì trên vòng tròn thì hiệu 2 tập T, S đều bất biến mod 2.

Còn lại đúng 2 TH là đổi (a_i, a_{i+2}) và (a_i, a_{i+1}) thì ta xét sự đổi dấu tương tự.

Ban đầu xếp 1, 2, ..., 2014 lên đường tròn theo đúng thứ tự thì ta có $|T| = 2012$ suy ra $|T|$ chỉ có thể nhận các giá trị chẵn.

Ta sẽ chỉ ra với mọi $|T|$ chẵn thuộc $[0, 2012]$ ta đều có cách xếp thỏa mãn đó là:

$$(1, 2, \dots, 2k, (k + 1008, 2k + 1), (k + 1009, 2k + 2), \dots, (2014, k + 1007))$$

Vậy

BÀI 2. Gọi $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{100}$ là các số tự nhiên thỏa đề bài.

TH1: có một số là 100, ta có được điều phải chứng minh.

TH2: không có số nào là 100.

Không mất tính tổng quát ta xét các tổng sau:

$$S_1 = a_1;$$

$$S_2 = a_1 + a_2;$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$

...

$$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100};$$

Có 100 tổng S_i ($1 \leq i \leq 100$), mà S_i chia 100 dư từ 1 đến 99, nên theo nguyên lí dirichlet tồn tại ít nhất 2 tổng S_i có cùng số dư, lấy hiệu của chúng ta chứng minh được tồn tại ít nhất 1 bộ các số chia hết cho 100.

Mặt khác: hiệu của hai tổng S_i trên luôn nhỏ hơn 200 mà lại chia hết cho 100 nên suy ra chúng bằng 100.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

BÀI 3. Bài này có thể giải bằng bổ đề LTE.

BÀI 4. Xét các tổng có dạng $\sum_{i=1}^n c_i a_i$ $c_i \in \{0; 1\}$

Có 1023 tổng có dạng như trên thoả mãn đề bài.

Nếu trong 1023 tổng này có 1 tổng chia hết cho 1023 thì ta có đpcm.

Nếu trong 1023 tổng này không có tổng nào chia hết cho 1023 thì tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 1023

Hiệu của hai tổng này là một tổng có dạng $\sum_{i=0}^1 c_i a_i$ $c_i \in \{-1; 0; 1\}$

Ta có đpcm

BÀI 5. Trong 19 số tự nhiên tùy ý, ta luôn tìm được 2 số có cùng số dư khi chia cho 18. Giả sử 2 số đó là $18m + a$ và $18n + a$ thì

$$(18m + a)^2 - (18n + a)^2 = 324(m^2 - n^2) + 36(m - n):36$$

BÀI 6. Tự làm.

BÀI 7. Xây dựng một cấu hình là đường tròn ,xếp các số $1, 2, \dots, 2k$ lên đ.tròn (thay 2014 bởi $2k$),số sau hơn số trước 1 đơn vị,số tập con thoả đề chính là số cách chọn 1 số từ đ.tròn mà ko có 2 số nào cạnh nhau(không tính cặp $(1, 2k)$)

Nhận xét :Không có cách chọn nào có số phần tử vượt quá k (CM nhận xét này rất dễ,các bạn tự CM nhé,chia tập được chọn ra 2 tập chẵn ,lẻ)

Rồi sau đó thiết lập 2 dãy truy hồi là A_n, B_n

A_n đếm số cách chọn thoả đề mà các số trên đ.tròn là chẵn.

B_n đếm số cách chọn thoả đề mà các số trên đ.tròn là lẻ.

Xét 2 số $2k, 2k - 1$

$2k$ được chọn ,ta loại $2k - 1$ ra khỏi đ.tròn,ta dc 1 cách chọn của B_k

$2k - 1$ được chọn ta loại $2k - 2, 2k$ ra khỏi đ.tròn,ta dc 1 cách chọn của A_{k-1}

Ta dc: $A_k = A_{k-1} + B_k$

Tương tự ,ta cũng có $B_k = A_{k-1} + B_{k-1}$

đến đây thì chắc dễ rồi

BÀI 8. Tự làm .

BÀI 9. Dùng SCP mod p ,suy ra mỗi ước của $2n^2 + 3$ chỉ có dạng $8k + 1, 8k + 7$,từ đây dễ thấy vô lí.

BÀI 10. Gọi $(x_0; y_0)$ là bộ nghiệm nhỏ nhất thoả mãn PT trên .Giả sử $x_0 > y_0$.

Ta có $x_0^2 + y_0^2 + x_0(1 - ky_0) + y_0 = 0(*)$.

Do PT trên bậc 2 nên còn 1 no x_1 t/m PT *

Theo định lí Vi-et

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = ky_0 - 1 \\ x_0 \cdot x_1 = y_0^2 + y_0 \end{cases}$$

Từ đó x_1 nguyên dương

Do cặp $(x_0; y_0)$ Min nên $x_1 > x_0$

$$\text{Ta có } x_1 = \frac{y_0^2 + y_0}{x_0} < \frac{x_0^2 + x_0}{x_0} = x_0 + 1 \Rightarrow x_1 \leq x_0$$

Vô lí

Do đó Điều giả sử là sai từ đó

$$x_0 = y_0 \Rightarrow 2x_0^2 + 2x_0 = kx_0^2 \Rightarrow 2 : x_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 = 1 \Rightarrow k = 4 \\ x_0 = 2 \Rightarrow k = 3 \end{bmatrix}$$

Vậy ,...

BÀI 11. Giả sử không tồn tại bộ ba vận động viên thỏa mãn ycd

Gọi T là tổng số cặp đã thi đấu tại thời điểm đó trong các bộ ba vận động viên

Ta sẽ đếm T theo hai cách:

Cách 1:

Xét một cặp vận động viên đã thi đấu:

Có $2n - 2$ bộ ba vận động viên chứa cặp vận động viên trên.

$$\text{Vậy } T = (2n - 2)(n^2 + 1)$$

Cách 2:

Có $C^3 2n$ cách chọn 3 vận động viên

Mỗi bộ ba vận động viên có không quá 2 cặp đã thi đấu

$$\text{Suy ra } T \leq 2C^3 2n$$

Từ 2 cách trên suy ra:

$$(2n - 2)(n^2 + 1) \leq 2C^3 2n$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + (n - 2)^2 + 1 \leq 0 \text{ (vô lí)}$$

Suy ra đpcm.

BÀI 12. Ban đầu, gọi x_i là tọa độ của bạn nam thứ i , y_i là tọa độ của bạn nữ thứ i

A_n, B_n lần lượt là tổng khoảng cách giữa hai bạn cùng giới và giữa hai bạn khác giới.

Xét $n = 1$: dễ dàng CM được.

Giả sử $A_k < B_k$

Xét $n = k + 1$:

$$A_{k+1} = A_k + \sum_{i=1}^k (|x_{k+1} - x_i| + |y_{k+1} - y_i|)$$

$$B_{k+1} = B_k + \sum_{i=1}^k (|x_{k+1} - x_i| + |y_{k+1} - y_i|)$$

$$A_{k+1} < B_{k+1}$$

Suy ra đpcm

BÀI 13. Tự làm.

BÀI 14. Tự làm.

BÀI 15. Ta có:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1! \cdot (n-1)!} + \frac{1}{3! \cdot (n-3)!} + \dots + \frac{1}{(n-1)! \cdot 1!} \\ \Leftrightarrow a_n \cdot n! &= \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} + \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} \\ \Leftrightarrow a_n \cdot n! &= C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} \end{aligned}$$

Dễ tính được $C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 2n - 1$.

Suy ra $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$.

Với $n=2$ thì $a_2 = 1$, PT (1) trở thành: $2^{x_2} = 2y_2 + 1$

PT này có 1 vế chẵn, 1 vế lẻ nên vô nghiệm.

Với $n \geq 4$, PT(1) trở thành:

$$2^{x_n} = \frac{2^{n-1}}{n!} (2y_n + 1)$$

Dễ thấy $2^{n-1} < n! \forall n \geq 4$ và $2y_n + 1$ lẻ nên $VP = \frac{2^{n-1}}{n!} (2y_n + 1)$ hoặc lẻ hoặc không phải số nguyên.

Điều này trái ngược với VT nên PT vô nghiệm.

Vậy với mọi n thì PT vô nghiệm.

BÀI 16. Tự làm.

BÀI 17. a) Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $p^3 + \frac{p-1}{2}$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp.

Đặt $p^3 + \frac{p-1}{2} = a(a+1)$ với $a \in \mathbb{N}$ thì $2p^3 + p - 1 = 2a(a+1) \Leftrightarrow 2(2p^3 + p + 1) = (2a+1)^2 + 3$.

Hiển nhiên với $p = 3$ thì không thỏa mãn. Khi đó $p > 3$ thì $p \equiv 1, 2 \pmod{3}$.

Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ thì $2(2p^3 + p + 1) \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (2a+1)^2 \equiv 2 \pmod{3}$, mâu thuẫn.

Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$ thì $2(2p^3 + p + 1) \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (2a+1)^2 \equiv 2 \pmod{3}$, mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại số nguyên tố p sao cho $p^3 + \frac{p-1}{2}$ là tích hai số tự nhiên tiếp tiếp.

b) Bài này xin phép thầy Luật cho thêm điều kiện là $x > 1$. Nếu không có điều kiện này thì chờ người giải lại bài.

Ta xét đa thức $P = x^a + x^b + 1$. Đặt $a = 3k + r, b = 3t + w$ ($k, t \in \mathbb{N}, r, w = \overline{0, 2}$).

Không mất tính tổng quát ta giả sử $w \leq r$.

Ta có $P = x^{3k+r} + x^{3t+w} + 1 = x^r(x^{3k} - 1) + x^w(x^{3t} - 1) + x^r + x^w + 1$

Ta luôn có $x^3 - 1 | x^{3k} - 1, x^2 + x + 1 | x^3 - 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 | x^{3k} - 1$. Tương tự thì $x^2 + x + 1 | x^{3t} - 1$.

Giả sử $x^2 + x + 1 | P$ thì $x^2 + x + 1 | x^r + x^w + 1$. Đặt $A = x^r + x^w + 1$ Nếu $r = w = 2$ thì $A = 2x^2 + 1 \equiv -2x - 1 \pmod{x^2 + x + 1}$. Để $x^2 + x + 1 | A \Rightarrow x^2 + x + 1 | 2x + 1$.

Điều này là vô lí vì $2x + 1 < x^2 + x + 1$ với $x > 1$.

Nếu $r = 2, w = 1$ thì $A = x^2 + x + 1 | x^2 + x + 1$

Nếu $r = 2, w = 0$ thì $A = x^2 + 2 \equiv 1 - x \pmod{x^2 + x + 1}$. Để $x^2 + x + 1 | A$ thì

$$x^2 + x + 1 \mid 1 - x.$$

Điều này là vô lí vì $1 - x < x^2 + x + 1$.

Nếu $r = w = 1$ thì $A = 2x + 1 < x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \nmid A \Rightarrow x^2 + x + 1 \nmid P$.

Nếu $r = 1, w = 0$ thì $A = x + 2 < x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \nmid A \Rightarrow x^2 + x + 1 \nmid P$.

Nếu $r = w = 0$ thì $A = 3 < x^2 + x + 1$ với $x > 1$. Do đó $x^2 + x + 1 \nmid A \Rightarrow x^2 + x + 1 \nmid P$.

Từ đó suy ra $a \equiv 2 \pmod{3}, b \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow ab \equiv 2 \pmod{3}$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ab là số chính phương.

Kết luận : Giả thiết phản chứng sai, ta có điều phải chứng minh.

BÀI 18. a) Tự làm.

b) Gọi k là số các ô còn trống.

Giả sử $k \geq 33$

Ta cần CM trong một hàng (hoặc cột) không tồn tại 6 ô vuông trống.

Giả sử tồn tại 6 ô vuông trống trên một hàng.

Khi đó trên mỗi cột có ít nhất 6 ô có quân cờ, suy ra $k \leq 28$, vô lí.

Vậy trong một hàng (hoặc cột) có nhiều nhất 5 ô vuông trống.

Vì $k \geq 33$ nên theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại một hàng có 5 ô vuông trống.

Tương tự, tồn tại một cột có 5 ô vuông trống.

Hàng đó và cột đó giao nhau tại một ô, ô đó phải là ô có cờ.

Gọi các hàng chứa 5 ô ở cột đó là $r_1, r_2, \dots, r_5$.

Gọi các cột chứa 5 ô ở hàng đó là $c_1, c_2, \dots, c_5$.

Dễ thấy có ít nhất 30 ô chứa quân cờ.

Gọi ô được giao bởi cột i và hàng j là a_{ij} và ta biểu diễn $a_{ij} = 1$ nếu ô a_{ij} chứa quân cờ, ngược lại $a_{ij} = 0$.

Nhận xét: có nhiều nhất một $a_{ij} = 0$ (nếu có 2 $a_{ij} = 0$ thì $k \leq 32$, mâu thuẫn).

Vậy có ít nhất một cột trong 8 cột không chứa bất kì quân cờ nào trong 30 quân cờ trên.

Vì số ô chưa đặt quân cờ này không vượt quá 5 nên ta có ít nhất 3 ô có quân cờ.

Suy ra có ít nhất 33 ô vuông có quân cờ, mâu thuẫn.

Suy ra đpcm.

BÀI 19. Ta có: $x^3 + 2x = 3(p^n - 1) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 3 = 3p^n \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 3) = 3p^n$

Gọi

$$d = (x + 1; x^2 - x + 3) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \vdots d \\ x^2 - x + 3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + 1)(x - 2) + 5 \vdots d \\ x + 1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 5 \vdots d$$

$$p = 3 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 3) = 3^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3^{n+1} \\ x^2 - x + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \text{ (vô lý)}$$

$p \neq 3$. Ta xét hai trường hợp sau:

$$\text{TH1: } d = 5 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 3) = 3 \cdot 5^n$$

Suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+1=5 \\ x^2-x+3=3.5^{n-1} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x+1=3.5 \\ x^2-x+3=5^{n-1} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x+1=5^{n-1} \\ x^2-x+3=3.5 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x+1=3.5^{n-1} \\ x^2-x+3=5 \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ n=2 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x=14 \\ 5^{n-1}=185 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ n=2 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ n=1 \end{array} \right\} \end{array} \right]$$

TH2:

$$d=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+1=3 \\ x^2-x+3=p^n \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x+1=p^n \\ x^2-x+3=3 \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ p=5 \\ n=1 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ p=2 \\ n=1 \end{array} \right\} \end{array} \right]$$

Vậy $(x, n, p) = \{(4, 2, 5); (2, 1, 5); (1, 1, 2)\}$.

BÀI 20. Gọi a_n là số cách xếp hợp lệ, b_n là số cách xếp mà chỉ có thí sinh thứ 1 và thứ n có cùng đề với nhau.

Để dàng thấy rằng $a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$, $b_n = 2a_{n-1}$.

Để dàng tính được a_2, b_2 , suy ra công thức tổng quát của a_n là $a_n = 3^n + 3 \cdot (-1)^n$.

Xét bất phương trình $3^n + 3 \cdot (-1)^n \leq 2013$ ($n \in \mathbb{N}$).

Vậy $n_{\max} = 6$.

BÀI 21. Tự làm.

BÀI 22. Tự làm.

BÀI 23. Gọi S_n là tổng các ô trên bảng $n \times n$, a_i là số nằm trên ô có tọa độ (i, i) .

Để dàng thấy rằng $S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n+1} - a_{2n}$.

Từ đây có thể suy ra rằng $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} a_i \leq 2n + 1$.

$S_{2013} \leq 2013$.

Ta có thể xây dựng được bảng thỏa yêu cầu đề bài bằng cách đặt các số 1 vào hàng thứ $2k + 1$, số -1 vào hàng thứ $2k$.

BÀI 24. Vì $m > n \geq 1$ nên ta có:

2014^m và 2014^n có hai chữ số tận cùng bằng nhau theo đúng thứ tự $\Leftrightarrow 2014^m - 2014^n = 2014^n \cdot (2014^{m-n} - 1) : 100 \quad (1)$

Vì $m > n$ nên $(2014^{m-n} - 1)$ là số lẻ. Do đó từ (1) $\Rightarrow 2014^n : 4 \Rightarrow n \geq 2$.

Từ (1) $\Rightarrow (2014^{m-n} - 1) : 25 \quad (2)$

Đặt $m - n = 10k + r$ với k, r là số tự nhiên và $0 \leq r \leq 9$.

$\Rightarrow 2014^{m-n} \equiv 14^{m-n} = (14^5)^{2k} \cdot 14^r = (537824^2)^k \cdot 14^r \equiv ((-1)^2)^k \cdot 14^r \equiv 14^r \pmod{25}$

Nên từ (2) $\Rightarrow 14^r \equiv 1 \pmod{25}$. Với $0 \leq r \leq 9$ chỉ có $r = 0$ thỏa mãn.

Vậy $m = n + 10k$. Mà $m > n$ nên $k \geq 1$
 Mà $n \geq 2$ nên $m + n = 2n + 10k \geq 2.2 + 10.1 = 14$
 Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = n + 10 \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 \\ n = 2 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m = 12 \\ n = 2 \end{cases}$

BÀI 25. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 5 đỉnh có cùng một màu.

Ta vẽ đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 9 đỉnh, 9 đỉnh này chia đường tròn thành 9 phần.

Gọi (x, y, z) lần lượt là số đo các cung (đơn vị phần) của một bộ ba đỉnh.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y \leq z$.

Ta tính được số các bộ (x, y, z) là 6.

Trong 5 đỉnh cùng màu có $C_5^3 = 10$ tam giác.

Theo nguyên tắc Dirichlet, có ít nhất 2 tam giác có cùng bộ (x, y, z) (đpcm).

BÀI 26. Câu này có vẻ dễ nhất:

Ta có $\begin{cases} m^2 + 2 : n \\ n^2 + 2 : m \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 2)(n^2 + 2) : mn \Rightarrow 2(m^2 + n^2 + 2) : mn$

Mà m, n lẻ nên $m^2 + n^2 + 2 : mn$

Đặt $m^2 + n^2 + 2 = kmn \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2 - kmn = 0(*)$

Gọi (a, b) là cặp nghiệm nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn PT $(*)$ $a > b$.

Ta có $a^2 + b^2 + 2 - kab = 0(1)$

Coi (1) là PT ẩn a Trong đó $k; b$ là tham số.

PT (1) là bậc 2 nên có 1 no là a no còn là no của PT (1) là a_0 .

Theo Vi-et:

$$\begin{cases} a + a_0 = bk \\ a \cdot a_0 = b^2 + 2 \end{cases}$$

Do đó $a_0 \in \mathbb{N}$ là no nguyên dương.

Từ đó (b, a_0) cũng là no PT (1) Mà (a, b) Min nên $a_0 > a(2)$ $a_0 = \frac{b^2 + 2}{a} < \frac{a^2 + 2}{a} =$

$$a + \frac{2}{a} < a + 1 \text{ do } a, b \text{ lẻ } > 1 ; a > b$$

Do đó $a_0 \leq a$ Kết hợp (2) ra vô lí Từ đó Điều G/s là sai nên $b \geq a$

Nếu $b > a$ cmtt

$$\Rightarrow b = a \Rightarrow 2a^2 + 2 = ka^2 \Rightarrow 2 : a^2 \rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow QED$$

BÀI 27. Theo bài ra, ta có: $(x - y)(x + y) = 100.30^{2n}$.

Suy ra $x+y$ và $x-y$ đều chẵn.

Đặt $a = \frac{x+y}{2}; b = \frac{x-y}{2}$, ta được:

$$a \cdot b = 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n+2} = A$$

Số các ước của A là $(2n+1)^2 \cdot (2n+3)$

Vì $a > b$ nên suy ra số cặp (x, y) thỏa mãn là số cặp (a, b) thỏa mãn là $\frac{1}{2} [(2n+1)^2 \cdot (2n+3) - 1] = (n+1)(4n^2+6n+1)$

Ta sẽ chứng minh $(n+1)(4n^2+6n+1)$ không thể là số chính phương.

Thật vậy, giả sử $(n+1)(4n^2+6n+1)$ là số chính phương. Vì $\gcd(n+1; 4n^2+6n+1) = 1$ nên $4n^2+6n+1$ phải là số chính phương.

Vô lý vì $(2n+1)^2 < 4n^2+6n+1 < (2n+2)^2$

BÀI 28. Xét một phân tử k bất kì thuộc S :

Có $2^3 - 1 = 7$ cách chọn để tồn tại ít nhất một trong các tập A, B, C .

Vậy có 7^n cách chọn 3 tập A, B, C thỏa mãn ycdB.

BÀI 29. Nếu có hai trong ba số a, b, c bằng nhau thì cả ba đều bằng nhau. Giả sử các số a, b, c đôi một khác nhau.

Từ giả thiết:

$$-p = \frac{a^n - b^n}{b - c} = \frac{b^n - c^n}{c - a} = \frac{c^n - a^n}{a - b} \Rightarrow -p^3 = \frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a}$$

. Nếu n lẻ thì $a^n - b^n, a - b$ cùng dấu, dẫn đến $-p^3 = \frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a} > 0$, vô lí.

Vậy phải có n chẵn.

Nếu p lẻ thì $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$ lẻ, mà n chẵn nên tổng $A = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$ gồm một số chẵn các số hạng, nhưng A lại lẻ nên a, b khác tính chẵn lẻ. Hay $a - b \equiv 1 \pmod{2}$.

Tương tự $b - c \equiv c - a \equiv 1 \pmod{2}$.

Suy ra $3 \equiv (a - b) + (b - c) + (c - a) \equiv 0 \pmod{2}$, mâu thuẫn.

Như vậy phải có p chẵn, tức $p = 2$.

Được:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a} = -8$$

Vì n chẵn nên đặt $n = 2k$. Được :

$$\left| \prod_{cyc} \frac{a^{2k} - b^{2k}}{a - b} \right| = 8 \Leftrightarrow \left| \prod_{cyc} (a + b) \frac{a^{2k} - b^{2k}}{a^2 - b^2} \right| = 8 \Leftrightarrow \left| \prod_{cyc} (a + b)(a^{2k-2} + \dots + b^{2k-2}) \right| = 8$$

Nếu ít nhất một trong ba số a, b, c bằng 0, giả sử $a = 0$ thì:

từ giả thiết ban đầu ta dễ dàng có hệ $\begin{cases} c^n = b^n + 2c \\ c^n = 2b \end{cases} \Rightarrow (2c)^n = c^{n^2} + 2c \Rightarrow$

$c^{n-1}(2^n - c^{n+1}) = 2$. Dễ dàng thấy mâu thuẫn ở đây.

Như vậy ta chỉ việc xét $|a|, |b|, |c| \geq 1$. Nếu $k \geq 2$ thì:

$$8 = \left| \prod_{cyc} (a + b)(a^{2k-2} + \dots + b^{2k-2}) \right| \geq |(a + b)(b + c)(c + a)(a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4)| \geq 8|(a + b)(b + c)(c + a)|$$

Dễ dàng chỉ ra được điều này vô lí.

Như vậy phải có $k = 1$, tức $n = 2$. Khi đó $(a + b)(b + c)(c + a) = -8$ (*)

Mặt khác từ giả thiết đề bài dễ thấy a, b, c cùng tính chẵn lẻ. Kết hợp với (*) ta có $|a + b| = |b + c| = |c + a| = 2$, từ đây dễ dàng suy ra $a = b = c$.

Trái giả thiết phản chứng. Điều phải chứng minh.

BÀI 30. Tự làm.

BÀI 31. Tổng quát là định lí Sivistre. Chứng minh bằng qui nạp.

BÀI 32. Ý tưởng là đếm bằng 2 cách.

Giả sử phản chứng có 2 loại tập chí mà ko có bất kì thư viện địa phương nào khai thác nó. ta chuyển về ngôn ngữ tổ hợp:

bài toán: Có tồn tại hay ko 2013 tập con $A_1, A_2, \dots, A_{2013} \subset X = \{1, 2, 3, \dots, 2014\}$ sao cho:

i) $|A_i \cap A_j| \leq 504$ ii) $|A_i| \geq 1008$ Mục đích của chúng ta là chứng minh không tồn tại thì khi ấy giả sử phản chứng sẽ sai và bài toán được chứng minh.

Ta sẽ đếm bằng 2 cách với phép giao và phép hợp.

1) Đặt $M = \sum |A_i \cup A_j|$ rõ ràng $M = \sum |A_i \cup A_j| = \sum |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j| \geq (1008 + 1008 - 504) \cdot \binom{2013}{2}$ (1)

Gọi a_i là số tập con trong số $A_1, \dots, A_{2013}$ nhận i làm phần tử của nó.

Khi đó ta đếm M theo 2 cách như sau:

$M = \sum_{i=1}^{2014} \left(\binom{a_i}{2} + (2013 - a_i)a_i \right)$ (2) thật vậy $\binom{a_i}{2}$ là cặp số A_m, A_n để a_i cùng nằm trong cả A_m, A_n còn $(2013 - a_i)a_i$ là cặp số A_m, A_n để a_i nằm vào 1 trong hai A_m, A_n .

Do đó từ (1)(2) suy ra $\sum_{i=1}^{2014} \left(\binom{a_i}{2} + (2013 - a_i)a_i \right) \geq (1008 + 1008 - 504) \cdot \binom{2013}{2}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2014} \frac{4015a_i - a_i^2}{2} \geq 1512 \cdot \binom{2013}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4015 \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i \right) - \sum_{i=1}^{2014} a_i^2}{2} \geq 1512 \cdot \binom{2013}{2}$$

Áp dụng BDT Cauchy $\sum_{i=1}^{2014} a_i^2 \geq \frac{1}{2014} \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i \right)^2$

Ta có:

$$\frac{4015 \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i \right) - \frac{1}{2014} \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i \right)^2}{2} \geq \frac{4015 \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i \right) - \sum_{i=1}^{2014} a_i^2}{2} \geq 1512 \cdot \binom{2013}{2}$$

Đặt $\sum_{i=1}^{2014} a_i = S$

$$\text{Suy ra } \frac{4025S - \frac{1}{2014}S^2}{2} \geq 1512 \cdot \binom{2013}{2} \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{2014}S^2 - 4025S + 3024 \cdot \binom{2013}{2} (*)$$

Theo dl về tam thức bậc 2, $x_1 \leq S \leq x_2$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm lớn nhất của (*)
Thử trực tiếp ta có $2029609 \leq S \leq 6076471$ (A)

2) Đặt $N = \sum |A_i \cap A_j|$ tương tự trên ta cũng Cm đc $N \leq 504. \binom{2013}{2}$

Mặt khác tương tự ta cũng Cm đc $N = \sum_{i=1}^{2014} \binom{a_i}{2}$

Do đó:

$$\begin{aligned} 504. \binom{2013}{2} &\geq \sum_{i=1}^{2014} \binom{a_i}{2} \\ \Leftrightarrow 504. \binom{2013}{2} &\geq \sum_{i=1}^{2014} \frac{a_i^2 - a_i}{2} \\ \Leftrightarrow 504. \binom{2013}{2} &\geq \frac{\sum_{i=1}^{2014} a_i^2 - S}{2} \end{aligned}$$

Áp dụng BDT Cauchy $\sum_{i=1}^{2014} a_i^2 \geq \frac{1}{2014} S^2$

Do đó $504. \binom{2013}{2} \geq \frac{1}{2014} \cdot \frac{S^2 - S}{2}$.

$\Leftrightarrow 1008. \binom{2013}{2} \geq \frac{1}{2014} \cdot S^2 - S$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2014} \cdot S^2 - S - 1008. \binom{2013}{2} \leq 0$

Giải BPT bậc 2 này tương tự trên $0 \leq S \leq 2028600$ (2) (do $S \in N$) (B)

Từ (A), (B) suy ra $2029609 \leq S \leq 2028600$ điều này mâu thuẫn $\Rightarrow$ DPCM

BÀI 33. 1) $(2^n + 3^n)(3^n + 5^n):mn$ và tương tự với m .

Ta đặt p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n có 2 khả năng.

Nếu $p|2^n + 3^n \rightarrow p|2^{2n} - 3^{2n}$ gọi a nhỏ nhất sao cho $2^a - 3^a:p$ nên $a|2n$ mà a phải chẵn vì a lẻ thì $a|n$ khi đó $2^n - 3^n:2^a - 3^a:p \rightarrow 2.3^n:p$ mâu thuẫn, do đó $a = 2k$ suy ra $k|n$ nên k lẻ do đó $2k|p-1$ và k lẻ nên $k=1$ vì nếu $k>1$ thì tồn tại r lẻ, $r|k < p-1 < p \Rightarrow r < p$ mà $r|n$ mâu thuẫn do đó $k=1$ nên $p=5$ suy ra $5|n$.

Nếu $p|3^n + 5^n$ lập luận tương tự $\Rightarrow p|3+5=8$ vô lí vì p lẻ do $p|n$ lẻ.

Do đó ta cm xong $5|n$ và tương tự với m đặt $5^x||n, 5^y||m$ theo LTE, $2^n + 3^n:5^{x+y} \Rightarrow 2^{5^x} + 3^{5^x}:5^{x+y} \Rightarrow v_5(2+3) + v_5(5^x) \geq x+y \Rightarrow 1+x \geq x+y \Rightarrow y \leq 1$ mà $y \geq 1$ nên $y=1$ tương tự $x=1$ từ đó có $25|mn, mn \not\equiv 125$.

2) Từ giả thiết có $f(k):k^2 \Rightarrow (2^k + 3^k)(3^k + 5^k):k^2$.

Ta xây dựng k theo 2 cách:

Quy nạp điều sau: Tồn tại k sao cho $k = 5.p_2 \dots p_l$ với $p_i \neq p_j$.

Và $p_i|2^{5.p_2 \dots p_{i-1}} + 3^{5.p_2 \dots p_{i-1}}$.

Đầu tiên $k = 5.x_1$ ($p_1 = 5$) tiếp đó $k = 5.p_2.x_2$ với $p_2|2^5 + 3^5$ ($p_2 \neq 5$ hay $p_2 = 11$)

Gs quy nạp ta có $k = 5.p_2.p_3...p_l$ với $p_i | 2^{5.p_2...p_{i-1}} + 3^{5.p_2...p_{i-1}}$ các số p_i đôi 1 pb.

Ta cm tồn tại số k để $k = 5.p_2.p_3...p_l.p_{l+1}$.

Thật vậy ta có $2^k + 5^k = 2^{5.p_2.p_3...p_l} + 3^{5.p_2.p_3...p_l}$.

Đặt $2^{5.p_2.p_3...p_{l-1}} = A, B = 3^{5.p_2.p_3...p_{l-1}}$.

Khi đó $A^{p_l} + B^{p_l} = (A + B)(A^{p_l-1} - ... + B^{p_l-1})$.

Chú ý theo cách chọn $p_i | 2^{5.p_2...p_{i-1}}$ do đó $5, p_2, ..., p_l | 2^{5.p_2.p_3...p_{l-1}} + 3^{5.p_2.p_3...p_{l-1}} = A + B$.

Mặt khác $\gcd((A + B); (A^{p_l-1} - ... + B^{p_l-1})) | p_l$ (1) trong khi $A + B \not\vdots p_l$ nên $A^{p_l-1} - ... + B^{p_l-1} \not\vdots p_l$ mặt khác $v_{p_l}(A^{p_l} + B^{p_l}) = v_{p_l}(A + B) + v_{p_l}(p_l) = v_{p_l}(A + B) + 1$ do đó $v_p(A^{p_l-1} - ... + B^{p_l-1}) = 1$ mà $(A^{p_l-1} - ... + B^{p_l-1}) > p_l$ do đó nó còn 1 ước nguyên tố khác p_l và khác hẳn $5, p_2, ..., p_{l-1}$ (do (1)) gọi ước nguyên tố đó là p_{l+1}

Do đó $k = 5.p_2...p_l.p_{l+1}$ dễ kiểm chứng đúng nên quy nạp đúng.

Như vậy từ cách quy nạp trên ta có thể thấy tồn tại k là số square-free tức là số có dạng $p_1 p_2 ... p_l$ với l tùy ý.

Cũng thấy rằng $k = p_1 p_2 ... p_l$ và $2^k + 3^k \vdots k$ với $p_1, p_2, ..., p_l$ được chọn theo phương thức như cách quy nạp thì ta thấy $2^k + 3^k = 2^{p_1 p_2 ... p_l} + 3^{p_1 p_2 ... p_l}$ thấy $2^{p_1...p_i} + 3^{p_1...p_i} \vdots p_{i+1}$ (theo phương thức chọn quy nạp) do đó $v_{p_{i+1}}(2^{p_1 p_2 ... p_l} + 3^{p_1 p_2 ... p_l}) = v_{p_{i+1}}(2^{p_1...p_i} + 3^{p_1...p_i}) + v_{p_{i+1}}(p_{i+1}...p_l) \geq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \vdots p_{i+1}^2$.

(với mọi $i = \overline{1, l}$) từ đây suy ra $2^k + 3^k \vdots k^2$.

Chọn $l = 1911^{103}$ khi đó $\alpha_1 + ... + \alpha_l = 1911^{103}$ đây là đpcm.

BÀI 34. Tự làm.

BÀI 35. Tự làm.

BÀI 36. Ta có:

$$n(n-1)(2n-1) \leq 6.2013$$

$$n(n+1)(2n+1) \geq 6.2013$$

Suy ra $n = 18$

Vậy ta có các số viết vào bảng B_{18} là 1786, ..., 2013.

Tổng các số viết trong bảng B_{18} là 433086.

BÀI 37. Gọi x_i là khoảng cách giữa điểm tô màu đỏ thứ $i-1$ và i .

Đặt:

$$a_1 = x_1$$

$$a_2 = x_2 - p$$

$$a_3 = x_3 - p$$

$$a_{k+1} = x_{k+1} - p$$

Ta có số cách tô màu thoả mãn yêu cầu đề bài là số nghiệm nguyên không âm của PT:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{k+1} = n - k(p+1)$$

Áp dụng bài toán chia kẹo Euler, ta tính được bằng $C_{n-p(k+1)+k}^k$

BÀI 38. x là số thứ vị khi và chỉ khi $x(x-1) \vdots 100$.

Suy ra: $x = 4k$ hoặc $x = 4k + 1$.

$x = 25q$ hoặc $x = 25q + 1$.

Theo định lí thặng dư Trung Hoa ta tìm ra được $x = 100k, 100k + 1, 100k + 25, 100k + 76$.

Vậy số số thứ vị thoả yêu cầu đề bài là 82.

BÀI 39. Gọi x_i là số chuyển tham gia của thành viên thứ i .

Suy ra $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 30$.

Ta sẽ đếm số bộ (thành viên, chuyển, chuyển) bằng 2 cách.

Cách 1: Với mỗi thành viên có $C_{x_i}^2$ cách chọn 2 nhóm tham gia.

Vậy số bộ cần đếm là $\sum_{i=1}^n C_{x_i}^2$.

Cách 2: Có C_6^2 cách chọn 2 trong 6 nhóm trên.

Mà với 2 nhóm bất kì có không quá 2 thành viên chung nên số bộ cần đếm không quá $C_6^2 \cdot 2 = 30$.

Từ 2 cách đếm trên suy ra $\sum_{i=1}^n C_{x_i}^2 \leq 30$.

$$\sum_{i=1}^n C_{x_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2} - 15.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$.

Theo bất đẳng thức Chebychev, $\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2} \geq \frac{(\sum x_i)^2}{2n} = \frac{450}{n}$.

Suy ra $\frac{450}{n} - 15 \leq 30$.

Hay $n \geq 10$.

Vậy GTNN của n là 10.

BÀI 40. Tự làm.

BÀI 41. Tự làm.

BÀI 42. Tự làm.

BÀI 43. Xét các số có dạng $A_j = \sum_{i=1}^{10} b_i a_i$, trong đó $b_i \in \{0; 1\}$, $a_i; i = \overline{1; 10}$.

Dễ thấy có $2^{10} = 1024$ số như vậy. Khi đó trong các A_j sẽ tồn tại 2 số A_k và A_h thỏa mãn $A_k \equiv A_h \pmod{1023} \implies A_k - A_h \equiv 0 \pmod{1023}$. Điều này chứng tỏ rằng:

$$\sum (b_{ki} - b_{hi}) u_i \vdots 1023; i = \overline{1; 10}; b_{ki} \in \{0; 1\}$$

Đặt $b_{ki} - b_{hi} = x_i$ thì dễ thấy $x_i \in \{-1; 0; 1\}$. Từ đó có đpcm.

BÀI 44. Tự làm.

BÀI 45. Gọi $d_i = d_1 + d_2 + d_4$

Ta có: $i \geq 5$

Mặt khác, $d_8 d_i = d_{d_4-1} \leq n$

Suy ra $i \leq 5$

Vậy $i = 5, d_4 = 13$

d_2 là ước nguyên tố nhỏ nhất của n nên $d_2 \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$

n có 12 ước nên suy ra có nhiều nhất 3 ước nguyên tố.

Nếu $d_2 = 2$ suy ra $d_5 = 16$ nên 4, 8 là ước của n , bé hơn $d_4 = 13$, không thoả mãn.

Nếu $d_2 = 3$ suy ra $d_5 = 17$. Đến đây ta có thể tính được $n = 9.13.17 = 1989$ là nghiệm.

Nếu $d_2 = 5, 7, 11$ dễ thấy không thoả mãn.

Suy ra $n = 1989$.

BÀI 46. Tự làm.

BÀI 47. Giả sử x_0 là nghiệm chung thỏa hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + px_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + qx_0 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (p - q)x_0 = 1$$

Nếu $p = q$ hoặc $x_0 = 0$ vô lí.

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{p-q}.$$

Thay vào hai phương trình được $2p^2 - 3pq + q^2 + 1 = 0$.

Dùng miền giá trị suy ra $\min A = 4$ tại $q = 3$.

$\Rightarrow \dots$

BÀI 48. Gọi M là tập các số có dạng $4^n.k$ trong S , n không âm và k lẻ.

Ta đếm được $|M| = 2013$ (cho n chạy từ $1 \rightarrow 6$ rồi đếm k).

Gọi $S_x = S \cap \{x; 2x\} \forall x \in M$ và $S' = \bigcup_{x \in M} S_x$.

Nhận xét rằng M đã chứa các số dạng $2^{2n}.k$ và do đó S' là tập M bổ sung thêm các số dạng $2^{2n+1}.k$. Suy ra $S' = S$.

Vậy có thể phân hoạch tập S thành 2013 tập (dễ thấy là không giao nhau) S_x ($x \in M$).

Do đó, theo nguyên lý Dirichlet, 1 tập con bất kì của S có 2014 phần tử sẽ chứa 1 tập S_x và do đó không thỏa giả thiết.

BÀI 49. Dùng bổ đề LTE cho số 2: $v_2(x^n - y^n) = v_2(x^2 - y^2) + v_2(n) - 1$.

BÀI 50. Ta sẽ giải bài này bằng đếm bang hai cách:

Với ô ở hàng thứ i , cột thứ j có bi, đặt $s(i, j)$ là hiệu số bi của hàng với cột chứa ô đó, a_i là số bi ở hàng thứ i , b_i là số bi ở cột thứ i .

$$\text{Nhận xét: } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m b_i.$$

Ta có:

$$\sum s(i, j) = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^m b_i^2 > 0.$$

Vậy có ít nhất một viên bi thoả yêu cầu đề bài.

Đến đây ta phản chứng.

Giả sử chỉ có duy nhất một $s(t, k) > 0$.

Vì mỗi cột có ít nhất một viên bi và $\sum s(i, j) > 0$ nên ta suy ra được $a_t > m$ (vô lí).

Suy ra đpcm.

BÀI 51. Hiển nhiên nếu $x = 0$ chỉ thỏa mãn khi $y = 0$.

Nếu $x = -1$ thì đúng với mọi y .

Kết luận $(x, y) = (0, 0), (-1, n)$ với n nguyên dương tùy ý.

BÀI 52. Bạn đầu, đặt P nằm ngoài 2014 giác trên. Ta xét thuật toán sau: Mỗi lần thực hiện cho P "nhảy" qua một và chỉ một cạnh (hoặc đường chéo) của đa giác này. Ta thấy qua một số bước thực hiện thuật toán, ta có điểm P xác định.

Xét 1 bước P "nhảy" qua AB .

Gọi k là số tam giác có 2 điểm A, B chứa P .

Khi đó, sau khi thực hiện bước này, số tam giác chứa P tăng lên $2012 - k - k = 2012 - 2k$.

Suy ra tính chẵn lẻ của số tam giác chứa P không đổi.

Mặt khác, số tam giác lúc chưa thực hiện thuật toán là 0, vậy số tam giác chứa P luôn chẵn.

BÀI 53. Xét lũy thừa cơ số 2:

Ta có: $\max \{v_2(a), v_2(b), v_2(c)\} = 3$

Áp dụng nguyên lí bao hàm và loại trừ ta được kết quả là: $3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = 4^3 - 3^3$.

Làm tương tự như vậy với lũy thừa cơ số 3, 5, 7 ta được $(4^3 - 3^3)(6^3 - 5^3)(8^3 - 7^3)(12^3 - 11^3)$ bộ (a, b, c) có tính thứ tự.

BÀI 54. Ta chia ra 2 TH:

*) $x = y$, TH này ta được nghiệm $x = y = 2$

*) $x \neq y$.

Đặt $d = (x, y) \Rightarrow x = dx_1, y = dy_1$.

Chú ý rằng $x^3 + y^3 = (x + y)(x + y)^2 - 3xy(x + y)$ nên $x^3 + y^3 - x^2y^2 : (x + y)^2 \Leftrightarrow \frac{xy(3x + 3y + xy)}{(x + y)^2} \in \mathbb{N}$.

Hay $\frac{dx_1y_1(3x_1 + 3y_1 + dx_1y_1)}{(x_1 + y_1)^2} \in \mathbb{N}$.

Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của d . Nếu số mũ của p trong $(x_1 + y_1)^2$ lớn hơn trong d thì vô lí vì $(x_1, x_1 + y_1) = (y_1, x_1 + y_1) = 1$, dẫn đến số mũ của p dưới mẫu lớn hơn trên tử trong biểu thức (*).

Cụ thể là khi đó $v_p(dx_1y_1(3x_1 + 3y_1 + dx_1y_1)) = v_p(d) + v_p(d) < v_p(x + y)^2$.

Từ đó suy ra $(x_1 + y_1) \mid d$.

Ta có $x^3 + y^3 - x^2y^2 = d^3(x_1^3 + y_1^3 - dx_1^2y_1^2)$

Mà $x_1^3 + y_1^3 = (x_1 + y_1)(x_1^2 + y_1^2 - x_1y_1) < dx_1^2y_1^2$ hay nói cách khác $x^3 + y^3 - x^2y^2 < 0$, không thỏa mãn.

Vậy TH này không có gt thỏa.

Vậy cặp (x, y) thỏa mãn là $(2, 2)$.

BÀI 55. Xét tích: $A = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2013} + 1\right)$.

Sau khi thực hiện mỗi phép biến đổi, ta có tích trên không đổi.

Vậy số cuối cùng sau 2012 lần biến đổi là:

$$\left(\frac{1}{1} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2013} + 1\right) - 1 = 2013$$

BÀI 56. Bỏ đề: số cách tô màu cho đa giác đều 12 cạnh sao cho không có mẫu đơn sắc nào là 906.

Xét đa giác đều 12 cạnh:

Ta chỉ cần đếm số cách tô màu không có tam giác đều và tứ giác đều nào cùng màu (có 4 tam giác đều và 3 tứ giác đều).

Có 6^4 cách tô sao cho không có tam giác đều nào cùng màu.

Xét các cách tô sao cho có ít nhất 1 tứ giác đều cùng màu: Có $3 \times 2 \times 3^4$ cách tô.

Xét các cách tô sao cho có ít nhất 2 tứ giác đều cùng màu: Có $3 \times (2 + 2 \times 2^4)$ cách tô.

Xét các cách tô sao cho có 3 tứ giác đều cùng màu: Có 6 cách tô.

Theo nguyên lý bù trừ ta có tổng cộng 906 cách tô.

Quay lại bài toán:

Ta nhận thấy rằng số cách tô màu 24-giác đều sao cho không có một mẫu đơn sắc nào cùng chính là số cách tô màu 2 12-giác đều không có một mẫu đơn sắc nào được tạo bởi 24 đỉnh trên: 906^2 cách tô (áp dụng bỏ đề trên).

BÀI 57. Ta sẽ CM $k \leq n(n+1)$.

Xét $k \leq n(n+1)$.

Ta sẽ tô màu như sau:

Ở hàng 1 ta tô các ô thứ 1, 3, 5, ..., $2n+1$

Ở hàng 3 ta tô các ô thứ 1, 3, 5, ..., $2n+1$

...

Ở hàng $2n-1$ ta tô các ô thứ 1, 3, 5, ..., $2n+1$

Ta sẽ CM $k < n^2 + n + 1$ bằng quy nạp

Xét $n=1$: dễ dàng suy ra đpcm.

Giả sử BDT trên đúng với $n=i$

Xét $n=i+1$:

Ta chia bảng trên thành 4 phần: $2i \times (2i+1)$, $2 \times 2i$, $2 \times (2i+1)$, 2×2 .

Dễ dàng thấy rằng trong bảng $2i \times (2i+1)$ số ô được tô màu bé hơn $i^2 + i + 1$, bảng $2 \times 2i$ số ô được tô màu bé hơn hoặc bằng i , bảng $2 \times (2i+1)$ số ô được tô màu bé hơn hoặc bằng $i+1$, bảng 2×2 số ô được tô màu bé hơn hoặc bằng 1.

Suy ra $k < (i+1)^2 + (i+1) + 1$.

Suy ra đpcm.

Vậy $\max_k = n(n+1)$.

BÀI 58. Giả sử các số đó là $a_1 < a_2 < \dots < a_9$.

Xét 20 số hạng đầu tiên sẽ tồn tại 2 số có chữ số tận cùng là 0 và sẽ có một trong 2

số có chữ số hàng chục khác 9. Gọi số đó là n .

Xét 19 số $n + 1, n + 2, \dots, n + 19$, ta có:

$S(n + i) = S(n) + i$ với $i = 1, \dots, 9$.

Và $S(n + 19) = S(n) + 10$.

Ta có dãy số $S(n) + 1, \dots, S(n) + 10$.

Theo nguyên tắc Dirichlet thì một trong các số sau phải chia hết cho 11, suy ra đpcm.

BÀI 59. Gọi tập hợp người đọc của ngày thứ i là A_i .

Bổ đề: $|\bigcap_{i=1}^{30} A_i| = 1$

Xét tập A_1 :

Gọi a là phần tử của A_1 thuộc nhiều tập nhất. Số tập hợp mà a thuộc lớn hơn hoặc bằng 6.

Gọi các tập hợp chứa a là $A'_1, \dots, A'_m$ ($m \geq 6$).

Giả sử tồn tại tập B không có phần tử a .

Mà $|B| = 5$ nên theo nguyên tắc Dirichlet, có ít nhất 2 tập A'_i, A'_j sao cho $|B \cap A'_i \cap A'_j| = 1$.

Mà $A'_i \cap A'_j = a$ nên $a \in B$ (vô lí).

Suy ra $\bigcap_{i=1}^{30} A_i = \{a\}$ (đpcm).

Quay lại bài toán:

Vì $|\bigcap_{i=1}^{30} A_i| = 1$ nên dễ dàng thấy rằng $|\bigcup_{i=1}^{30} A_i| = 30.4 + 1 = 121$.

BÀI 60. Gọi $a_1, a_2, \dots$ là các số trên bảng.

Xét tích sau:

$$A = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)$$

Nhận xét: Mọi số $a_i + 1$ đều có dạng 2^k .

Mặt khác, $2509 + 1$ và $20132014 + 1$ không có dạng này nên không thể xuất hiện, suy ra đpcm.

BÀI 61. Chuyển bài toán về dạng hình học, 18 người biểu diễn thành 18 điểm, nối các điểm này lại với nhau. Đoạn thẳng được tô màu xanh nếu như 2 người ở hai đầu mút quen nhau và mau đỏ nếu họ không quen nhau. Ta sẽ chứng minh tồn tại 1 tứ giác mà các cạnh và đường chéo của nó được tô cùng màu.

Chứng minh: Một điểm M được nối với 17 điểm còn lại tạo thành 17 đoạn thẳng, theo nguyên lí đi-rích-lê, tồn tại 9 cạnh cùng màu, giả sử là màu xanh.

Xét 9 điểm khác M ở đầu mút các đoạn thẳng xanh kể từ M .

Nếu tồn tại tam giác nào có 3 cạnh cùng màu xanh thì tam giác đó tạo với đỉnh M 1 tứ giác thỏa ycdb.

Nếu không có tam giác nào có 3 cạnh cùng màu xanh:

Nếu tồn tại điểm A nào đó sao cho từ điểm đó xuất phát ít nhất 4 đoạn thẳng màu xanh (giả sử là AB, AC, AD, AE) thì bài toán được chứng minh.

Nếu điểm nào trong 9 điểm cũng chỉ là đầu mút của nhiều nhất 3 đoạn xanh, ta thấy rằng không thể xảy ra trường hợp cả 9 điểm đều là đầu mút của cả 3 đoạn xanh vì như thế thì số đoạn thẳng xanh là $\frac{9 \times 3}{2}$ không là số nguyên.

Như vậy tồn tại ít nhất 1 điểm sao cho nó là đầu mút của nhiều nhất 2 đoạn thẳng

xanh, đồng nghĩa với nó là đầu mút của 6 đoạn đỏ.

Giả sử 6 đoạn đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG.

Theo bài toán quen thuộc thì ta luôn có 3 tam giác có 3 cạnh cùng màu, giả sử là BCD mà tam giác nào cũng phải có ít nhất 1 đoạn đỏ nên BCD có 3 cạnh màu đỏ từ đó suy ra ABCD là tứ giác thỏa ycđb.

BÀI 62. Tự làm.

BÀI 63. Ta đếm số bộ $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ thỏa $x_1 = a$.

Với mỗi $x_i, i = 2, 3 \dots n$ thì có 2 cách chọn nên số bộ này có 2^{n-1} bộ. Đặt a_n là số dãy thỏa $x_1 = 1$ và $x_n = a$; b_n là số dãy thỏa $x_n = b$ và $x_1 = 1$, c_n là số dãy thỏa $x_n = c$ và $x_1 = 1$.

Khi đó dễ có ctth: $a_{n+1} = b_n + c_n$ và $a_n + b_n + c_n = 2^{n-1}$ ($n \geq 3$).

Từ đây, ta được ctth: $a_n + a_{n+1} = 2^{n-1}$ với a_n là số dãy thỏa ycđb, $n \geq 3$.

3.2 Gợi ý giải đề thi quốc gia, quốc tế

BÀI 1. Ta cần CM tồn tại duy nhất n sao cho: $\sum_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i) - a_n < 0$ và $\sum_{i=0}^n (a_{n+1} - a_i) - a_{n+1} \geq 0$.

Với mọi $n \geq 1$ đặt $b_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i) - a_n$, ta có $b_1 = -a_0 < 0$ nên chỉ cần CM (b_n) tăng không bị chặn là xong.

Ta thấy $b_{n+1} - b_n = n(a_{n+1} - a_n) \geq n$ do $a_i \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có đpcm.

BÀI 2. k tốt nhất là $\sqrt{n-1}$.

Với $k = \sqrt{n-1}$ để chứng minh tồn tại một hình $k \times k$ không có ô vuông nào thì chỉ cần dùng Dirichlet cho hen đúng $n \times k$.

Khi đó có k cột nên sẽ có k ô nhỏ dc đánh dấu. Theo dirichlet thì có 2 ô có hiệu tọa độ đứng không nhỏ hơn $k+1$. Suy ra tồn tại 1 hình $k \times k$ không chứa ô nào.

Với $k = \sqrt{n-1} + 1$ ta chỉ ra 1 cách đánh dấu các ô vuông nhỏ sao cho không thỏa mãn. Đánh số tọa độ các ô là từ 1 đến n . Giả sử $n = k \cdot m + t$ Khi đó ta đánh số các ô ntn $(i; (i-1)k + 1)$ với i chạy từ 1 đến m và $((i-1)k + 1; i)$. Tức là ta chia hình $n \times n$ thành các hình $k \times k$, sau khi đánh dấu như vậy thì mỗi hình $k \times k$ đều chứa một hình $(k-m) \times (k-m)$ mà các hàng và các cột lớn chứa mỗi ô trong hình đó đều chưa có ô đánh dấu.

Ta lại dùng các đánh dấu tương tự như trên, làm các bước như thế sẽ đánh dấu được $k \cdot m$ ô và cuối cùng còn một hình $t \times t$ ở góc phải ta đánh dấu theo đường chéo hv này để có thêm t ô đánh dấu nữa là hoàn thành n ô.

Có thể các bạn vẽ ra sẽ thấy ý tưởng đánh dấu của mình và ở đây mình cũng chỉ nêu ý tưởng đánh dấu như vậy, không biết có gì sai sót không, nếu đúng thì mong là có bạn nào đó thể hiện nó một cách rõ ràng hơn. Và dựa theo cách đánh số như vậy thì với 1 ô bất kì (x, y) không được đánh dấu thì tồn tại ít nhất một ô (x_1, y_1) mà $|x - x_1| < k$ hoặc $|y - y_1| < k$.

BÀI 3. Giả sử n là số nhỏ nhất mà mệnh đề không đúng, tức là tồn tại một số đồng tiền có tổng mệnh giá không quá $n-1/2$ nhưng không chia được thành n nhóm, mỗi nhóm có tổng mệnh giá không quá 1.

Khi đó trong tất cả các phần ví dụ với giá trị n này, ta chọn phần ví dụ với số lượng tiền nhỏ nhất. Gọi m là đồng tiền nhẹ nhất.

Theo tính nhỏ nhất, ta có thể chia các đồng tiền còn lại thành n nhóm, mỗi nhóm không vượt quá 1 nhưng lại lớn hơn $1-m$ (vì nếu có nhóm $\leq 1-m$ thì ta có thể bổ sung đồng tiền trọng lượng m vào đó).

Vậy ta có $n-1/2 > n(1-m) + m$, suy ra $m > 1/(2n-2)$. Tiếp theo, nếu có 2 đồng tiền mệnh giá $1/2k$ thì ta có thể thay bằng 1 đồng tiền mệnh giá $1/k$ trái với tính nhỏ nhất của số đồng tiền.

Tương tự, nếu có p đồng tiền mệnh giá $1/p$ thì ta có thể bỏ p đồng tiền này đi. Nhóm còn lại sẽ không thể chia được thành $n-1$ nhóm, mỗi nhóm có tổng mệnh giá không vượt quá 1 (nếu chia được thì các đồng tiền cũ cũng chia được). Mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của n .

Vậy tổng mệnh giá các đồng tiền sẽ nhỏ hơn:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-2} < \frac{1}{2} + \frac{3}{3} + \frac{5}{5} + \dots + \frac{2n-3}{2n-3} = n - \frac{3}{2}$$

và như vậy phần ví dụ này đúng cho $n-1$, mâu thuẫn.

BÀI 4. Tham khảo bài giải tại [đây](#).

(Có thể vào artofproblemsolving.com/Forum/ xem đáp án).

BÀI 5. Trong bài toán đã cho, ta thấy hoành độ và tung độ hoàn toàn độc lập với nhau nên dễ vẽ hình dung, có thể xét riêng thành phần hoành độ.

Trước hết, ta viết các số từ -20 đến 20 (bỏ số 0 ra) thành các dãy mà liên sau số x là số $2x$ theo mod 41. Khi đó, ta được 2 dãy như bên dưới:

$$A : 1, 2, 4, 8, 16, -9, -18, 5, 10, 20, -1, -2, -4, -8, -16, 9, 18, -5, -10, -20, 1$$

$$B : 3, 6, 12, -17, 7, 14, -13, 15, -11, 19, -3, -6, -12, 17, -7, -14, 13, -15, 11, -19, 3$$

Tô màu các số của dãy này sao cho trong 2 số đối nhau thì có đúng 1 số được tô màu. Ta quan tâm đến số lượng các cặp số liên tiếp cùng được tô màu trong dãy.

Do có sự lặp lại ở cả 2 dãy nên để dễ hình dung, ta chuyển thành vòng tròn và phát biểu lại bài toán như sau:

Cho 20 điểm chia đều một đường tròn sao cho trong 2 điểm đối xứng qua tâm thì có đúng 1 đỉnh được tô màu. Tính số các cặp đỉnh liên tiếp được tô màu có thể có.

Xét các trường hợp số đỉnh chẵn nhỏ hơn:

- Đa giác 4 đỉnh: 1 cặp.
- Đa giác 6 đỉnh: 0-2 cặp.
- Đa giác 8 đỉnh: 1-3 cặp.
- Đa giác 10 đỉnh: 0-2-4 cặp.

...

Như thế, dự đoán tổng quát là:

Với n là số chẵn, gọi S_n là tập hợp số các cặp kề nhau cùng được tô màu có thể có của đa giác có n đỉnh thì: $S_{4n} = \{2k+1 | 0 \leq k \leq n-1\}$ và $S_{4n-2} = \{2k | 0 \leq k \leq n-1\}$.

Điều này có thể chứng minh bằng quy nạp như sau:

- Với $n = 2$ thì nhận xét đúng.

- Giả sử đúng đến n .

Xét đa giác có $4n + 2$ đỉnh. Đa giác này có thể tạo thành bằng cách thêm đỉnh A vào giữa hai đỉnh thứ $2n$, $2n+1$ và thêm đỉnh B vào giữa hai đỉnh thứ $4n$, 1 . Ta xét các trường hợp:

- Nếu đỉnh $2n$ và $2n + 1$ đều được tô và A không được tô thì tương ứng: đỉnh $4n$, 1 không được tô và B được tô. Số cặp kề nhau cùng được tô giảm đi 1.

- Nếu đỉnh $2n$ và $2n + 1$ đều được tô và A cũng được tô thì tương ứng: đỉnh $4n$, 1 không được tô và B không được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.

- Nếu trong hai đỉnh $2n$ và $2n + 1$, có 1 đỉnh được tô và A cũng được tô thì tương ứng: trong hai đỉnh $4n$, 1 có 1 đỉnh được tô và B không được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.

- Nếu trong hai đỉnh $2n$ và $2n + 1$, có 1 đỉnh được tô và A không được tô thì tương ứng: trong hai đỉnh $4n$, 1 có 1 đỉnh được tô và B được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.

Do đó, $S_{4n+2} = \{x \pm 1 | x \in S_{4n}\}$ hay $S_{4n+2} = \{2k | 0 \leq k \leq n\}$.

Tương tự, ta cũng có $S_{4n+4} = \{x \pm 1 | x \in S_{4n+2}\}$. Tất nhiên không xảy ra trường hợp S_{4n+4} có chứa số -1 vì để có trường hợp 0 cặp số ở $4n + 2$, các đỉnh phải được tô xen kẽ và trường hợp giảm đi số bộ không xảy ra, suy ra $S_{4n+4} = \{2k + 1 | 0 \leq k \leq n\}$.

Nhận xét được chứng minh.

Từ đó suy ra $S_{20} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Do đó, kết quả cho bài toán phụ sẽ là $2S_{20}$ với định nghĩa $2S = S + S = \{a + b | a, b \in S\}$.

Quay trở lại bài toán ban đầu, để chuyển từ 1 thành phần x ở trên thành 2 thành phần (x, y) , ta có thể hình dung như sau:

Ứng với mỗi vòng tròn chứa các số thuộc dãy A , ta lấy một vòng tròn mới cũng gồm các số thuộc dãy A đặt lên đó sao cho mỗi số thuộc đường tròn cũ khớp với một số thuộc đường tròn mới. Viết các cặp số khớp nhau thành một dãy, dãy đó chính là dãy các tọa độ điểm mà liên sau của (x_1, y_1) là $(2x_1, 2y_1)$ theo mod 41.

Dễ thấy có tất cả 20 cách ghép như thế (cố định vòng tròn cũ và xoay vòng tròn mới). Tương tự với việc ghép các dãy $A - B$, $B - A$ và $B - B$ nên có tổng cộng là 80 cách ghép tạo thành 80 dãy.

Tuy nhiên, ta cũng xét thêm 4 dãy đặc biệt, tương ứng với các điểm nằm trên trục tung và trục hoành.

Cụ thể là xét thêm dãy C gồm 20 số 0 và xét 4 cách ghép: $A - C$, $C - A$, $B - C$, $C - B$. Do đó, tổng cộng có 84 dãy các tọa độ.

Theo chứng minh ở trên thì ở mỗi dãy, số các cặp có thể có là S_{20} vậy nên đáp số của bài toán là $84S_{20}$, cũng chính là các số chẵn từ 84 đến $9 \cdot 84$.

Bài toán đến đây là kết thúc.

Ta thử đặt vấn đề trong trường hợp thay 20 và 41 bởi các số khác.

Chẳng hạn nếu thay 41 bởi 11 thì thay vì có 84 dãy mà mỗi dãy độ dài 20, ta sẽ có đến 168 dãy mà mỗi dãy có độ dài là 10. Đáp số sẽ là $168S_{10}$.

BÀI 6. Hướng dẫn:

1) Trong hình kích thước $2m + 1, 2n + 1, 2p + 1$ thì 8 ô ở góc và ô trung tâm có cùng một số.

2) Hai ô thuộc cùng "mặt phẳng", cách nhau $2m$ ô thì có số bằng nhau. (vì chúng là 2 đỉnh trong một hình kích thước $2m + 1, 2n + 1, 2p + 1$).

3, Như vậy hai ô thuộc cùng "mặt phẳng", cách nhau $2d = 2gcd(m, n, p)$ ô thì có số bằng nhau.

BÀI 7. a. Ta định nghĩa một nhóm các đỉnh xanh là một dãy các đỉnh xanh liên tiếp trên đường tròn và bị chặn hai đầu bởi màu đỏ. Tương tự với nhóm các đỉnh đỏ.

Rõ ràng số nhóm đỉnh xanh phải bằng số nhóm đỉnh đỏ.

Đặt các nhóm lượng đỉnh trong các đỏ là $r_1, r_2, \dots, r_k$ và số lượng đỉnh trong các nhóm xanh là $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Hơn nữa, trong một nhóm có kích thước là t thì số cặp đỉnh cùng màu là $t - 1$.

Khi đó, ta có $A = \sum_{i=1}^k (r_i - 1)$ và $B = \sum_{i=1}^k (b_i - 1)$.

Ngoài ra, ta cũng có: $\sum_{i=1}^k r_i = 79, \sum_{i=1}^k b_i = 24$.

Từ đó suy ra $A = 79 - k$ và $B = 24 - k$.

Ta cần có $1 \leq k \leq 24$ và dễ dàng suy ra có 24 cặp cặp (A, B) có dạng $(A, B) = (79 - k, 24 - k)$ với $k = 1, 2, 3, \dots, 24$.

b. Theo câu a thì với $B = 14$, ta tìm được số nhóm $k = 24 - 14 = 10$.

Khi đó, ta có $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 24$ và $r_1 + r_2 + \dots + r_{10} = 79$.

Ta thấy ứng với mỗi bộ $(b_1, b_2, \dots, b_{10})$ và một bộ $(r_1, r_2, \dots, r_{10})$ là các bộ nghiệm nguyên dương của hai phương trình trên thì có đúng 1 cách tô thỏa mãn đề bài.

Do đó, theo bài toán chia kẹo Euler, số cách tô cần tìm là $C_{23}^9 \cdot C_{78}^9$.

BÀI 8. Xét 2 trường hợp : **Trường hợp 1:** có ít nhất 1 số bằng 0

Ta lần lượt suy ra:

i) Có ít nhất 3 số bằng 0

ii) Có ít nhất 4 số bằng 0.

Suy ra 1 bộ nghiệm

Trường hợp 2: không có số nào bằng 0.

Ta đưa bài Toán về số nguyên , rồi tiếp tục.

Gọi các số đó là $x_1, \dots, x_{2014}$

Đặt $P = \prod_{i=1}^{2014} x_i$.

Ta thấy $\frac{P}{x_i}$ đều là số lập phương , bởi thế: $\exists n_1 \in \mathbb{N}, x_k^{(1)} : x_i = n_1 \cdot [x_k^{(1)}]^3$

Tiếp theo là lùi vô hạn.

Dễ thấy việc lùi vô hạn chỉ dừng lại khi tất cả các số đều mang giá trị 1 hoặc -1.

BÀI 9. Có thể dễ dàng nhận thấy dạng bài này sử dụng quy nạp, và ta sẽ quy nạp theo k .

Ta có khẳng định đề bài đúng với $k = 1$ và mọi $n \in \mathbb{N}^*$. (Chọn $m_1 = n$).

Giả sử khẳng định đúng đến k và đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh khẳng định này đúng với $k + 1$.

Thật vậy để có điều này ta sẽ chứng minh 2 điều : Nếu đề bài đúng với bộ $(k; n)$ thì nó cũng đúng với $(k + 1; 2n)$ và đúng với $(k + 1; 2n - 1)$.

+) Cm Nếu đề bài đúng với bộ $(k; n)$ thì cũng đúng với $(k + 1; 2n)$:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2n} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) + \frac{1}{2n}$$

Mặt khác :

$$\frac{2^k + n - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(2^k + n - 1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

Vậy nên:

$$1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) + \frac{1}{2(2^k + n - 1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) \left(1 + \frac{1}{2(2^k + n - 1)}\right)$$

Chọn $m_{k+1} = 2(2^k + n - 1)$ ta có ngay đpcm.

+) Cm Nếu đề bài đúng với bộ $(k; n)$ thì cũng đúng với $(k + 1; 2n - 1)$:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2n - 1} - \frac{n + 2^k - 1}{n(2n - 1)} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2n - 1} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) + \frac{n + 2^k - 1}{n(2n - 1)}$$

Mà:

$$\frac{n + 2^k - 1}{n(2n - 1)} = \frac{1}{2n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

Suy ra :

$$1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2n - 1} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) + \frac{1}{2n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n - 1}\right)$$

Chọn $m_{k+1} = 2n - 1$ ta cũng có ngay đpcm.

Vậy lời giải được hoàn tất (theo nguyên lý quy nạp).

BÀI 10. Dự đoán là $\left\lfloor \frac{2013 + 2014}{2} \right\rfloor$, giờ chỉ cần cm cái này thỏa mãn, chắc là quy nạp, và đã cm được $\left\lfloor \frac{2013 + 2014}{2} \right\rfloor$ là nhỏ nhất.

Thật vậy xét một cấu hình $2013 + 2014$ đỉnh như sau: Cho tất cả $2013 + 2013$ đỉnh

Đến một lúc nào đó, bạn làm toán vì bạn thích chứ không phải để chứng tỏ một cái gì nữa.

đỏ và xanh này lên đường tròn, cách đều nhau, sao cho cứ một điểm xanh lại có một điểm đỏ đối xứng với nó qua tâm, xanh đỏ xen kẽ nhau.

Như vậy sẽ lấp đủ 2013 + 2013 đỉnh, còn thừa một đỉnh xanh ta cho tùy ý vào vị trí giữa hai đỉnh kề nhau bất kì trong cấu hình trên, khi đó dễ thấy không có ba điểm thẳng hàng, số đường ít nhất là $\left\lfloor \frac{2013 + 2014}{2} \right\rfloor$, giờ cm nó là số thỏa mãn là xong.

BÀI 11. Bổ đề: Giả sử có cách đánh số sao cho $a_0 = 0, a_1 = a, a_n = n$ thì ta phải có $(a, n) = 1$ và $a_k \equiv ka \pmod{n}$ và cách đánh số đó là duy nhất.

Chứng minh: Ta chứng minh bằng quy nạp theo k rằng $a_k \equiv ka \pmod{n}$.

Ta có $a_1 = a$, nên khẳng định đúng với $k = 1$. Ta chứng minh với $k + 1$.

Giả sử $a_{k+1} = x \neq (k + 1)a \pmod{n}$ ta xét các trường hợp sau:

Th1: $x > a$, khi đó ta phải có $x - a$ phải thuộc tập $\{a_1, \dots, a_k\}$ hay $x - a \equiv la \pmod{n}$ với $0 \leq l \leq k$, mà $a_{k+1} \neq la \pmod{n}$ với mọi $0 \leq l \leq k$ nên vô lý.

Th2: $x < a$, khi đó ta có $n - a + x < n$ và dễ thấy vì $(n - a + x + a) = x + n$ nên ta cũng phải có $n - a + x$ xuất hiện trước x , hay $n - a + x \equiv la \pmod{n}$ với $1 \leq l \leq n$, suy ra $x \equiv (l + 1)a \pmod{n}$ (mâu thuẫn).

Từ điều trên ta dễ thấy là phải có $(a, n) = 1$.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Với mỗi cách đánh số thỏa mãn bài toán đặt $a_0 = 0, a_1 = a, a_n = b$. Giả sử $a < b$ (trường hợp $a > b$ tương tự). Nếu $b = n$ theo bổ đề ta có $(a, n) = 1$ và với mỗi cặp $(a, n) = 1$ thì có đúng một cách đánh số thỏa mãn.

Nếu $b < n$, dễ thấy là ta phải có $a + b > n$. Do đó $gs \ b > a$ nên ta có $L = n - b < a$. Ta bỏ đi $L < a$ số $b + 1, \dots, n$, khi đó ta thu được cách đánh số thỏa mãn với cặp đỉnh kề 0 là a và b và max là b . Theo bổ đề ta có duy nhất 1 cách đánh số thỏa mãn với $(a, b) = 1$ là $0, a \pmod{b}, 2a \pmod{b}, \dots, b - a \pmod{b}, b$. Bây giờ ta chèn lại các số $b + 1, \dots, n$ vào cách đánh số này.

Dễ thấy là các số $1, 2, \dots, L$ lần lượt đi liền sau các số $b - a + 1, b - a + 2, \dots, b - a + L$ (chú ý là $l \leq n - b = L < a$ và hiệu của hai số liền nhau của cách đánh số cho $(a, b) = 1$ là a hoặc $a - b$). Đến đây ta phải chèn số $b + 1$ vào giữa $b - a + 1$ và l . Cách chèn này là duy nhất.

Mặt khác có thể chứng minh rằng cách chèn lại các số $b + 1, \dots, n$ sẽ thu được cách đánh số thỏa mãn với n số.

Tổng hợp ta có số cách đánh số thỏa mãn chính bằng số bộ $(a, b) = 1$ mà $a + b > n, 1 \leq a, b \leq n$. Dễ dàng chứng minh được số này $= 1 + \sum_{k=2}^n \varphi(k)$. DPCM.

BÀI 12. Ta chứng minh 2013 đường thẳng là đủ.

Nhìn vào dữ kiện của bài toán thì nghĩ ngay đến chứng minh bằng quy nạp với N điểm đỏ và $N + 1$ điểm xanh.

Với $N + 1$ thì dễ thấy chỉ 1 đường thẳng là đủ.

Ta xét với N . Nếu N chẵn thì N đường thẳng là đủ (xét các cặp đường thẳng song song và chứa đúng 2 điểm đỏ).

Với N lẻ, xét bao lồi của $2N + 1$ điểm là một đa giác ≥ 3 cạnh.

Nếu bao lồi có chứa 1 điểm đỏ, thì ta dùng 1 đường thẳng chia đôi mặt phẳng, một phần chứa duy nhất điểm đỏ đó và phần còn lại chứa $N - 1$ đỏ và $N + 1$ xanh. Ta thấy với $N - 1$ đường thẳng nữa thì đủ cho phần mp này. Vậy ta cũng có N đường

thẳng là đủ.

Nếu bao lồi không chứa điểm đỏ nào, thì có hai điểm xanh mà với một đường thẳng thì ta chia được thành hai phần, phần chứa 2 điểm xanh và phần chứa $N - 1$ điểm xanh và N điểm đỏ. Đến đây dùng giả thiết quy nạp thì ta $N - 1$ đường thẳng là đủ cho phần mặt phẳng này. Do vậy N đường thẳng là đủ.

Vậy ta kết luận N đường thẳng là đủ.

Bây giờ ta cần chỉ ra một trường hợp mà N đường thẳng là cần. Thật vậy với một bao lồi gồm N điểm xanh và N điểm đỏ xen kẽ nhau. Khi đó mỗi cạnh có hai đỉnh khác màu của bao lồi phải bị cắt bởi một trong các đường thẳng. Vì có $2N$ cạnh và mỗi đường thẳng chỉ cắt không quá 2 cạnh nên phải cần ít nhất là N đường thẳng. DPCM.

BÀI 13. Bổ đề: Giả sử có cách đánh số sao cho $a_0 = 0, a_1 = a, a_n = n$ thì ta phải có $(a, n) = 1$ và $a_k \equiv ka \pmod{n}$ và cách đánh số đó là duy nhất.

Chứng minh: Ta chứng minh bằng quy nạp theo k rằng $a_k \equiv ka \pmod{n}$.

Ta có $a_1 = a$, nên khẳng định đúng với $k = 1$. Ta chứng minh với $k + 1$.

Giả sử $a_{k+1} = x \neq (k + 1)a \pmod{n}$ ta xét các trường hợp sau:

Th1: $x > a$, khi đó ta phải có $x - a$ phải thuộc tập $\{a_1, \dots, a_k\}$ hay $x - a \equiv la \pmod{n}$ với $0 \leq l \leq k$, mà $a_{k+1} \neq la \pmod{n}$ với mọi $0 \leq l \leq k$ nên vô lý.

Th2: $x < a$, khi đó ta có $n - a + x < n$ và dễ thấy vì $(n - a + x + a) = x + n$ nên ta cũng phải có $n - a + x$ xuất hiện trước x , hay $n - a + x \equiv la \pmod{n}$ với $1 \leq l \leq n$, suy ra $x \equiv (l + 1) \pmod{n}$ (mâu thuẫn).

Từ điều trên ta dễ thấy là phải có $(a, n) = 1$.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Với mỗi cách đánh số thỏa mãn bài toán đặt $a_0 = 0, a_1 = a, a_n = b$. Giả sử $a < b$ (trường hợp $a > b$ tương tự). Nếu $b = n$ theo bổ đề ta có $(a, n) = 1$ và với mỗi cặp $(a, n) = 1$ thì có đúng một cách đánh số thỏa mãn.

Nếu $b < n$, dễ thấy ta phải có $a + b > n$. Do đã giả sử $b > a$ nên ta có $L = n - b < a$. Ta bỏ đi $L < a$ số $b + 1, \dots, n$, khi thu được cách đánh số thỏa mãn với cặp đỉnh kề 0 là a và b và $\max$ là b .

Theo bổ đề ta có duy nhất 1 cách đánh số thỏa mãn với $(a, b) = 1$ là $0, a \pmod{b}, 2a \pmod{b}, \dots, b - a \pmod{b}, b$.

Bây giờ ta chèn lại các số $b + 1, \dots, n$ vào cách đánh số này.

Dễ thấy là các số $1, 2, \dots, L$ lần lượt đi liền sau các số $b - a + 1, b - a + 2, \dots, b - a + L$ (chú ý là $l \leq n - b = L < a$ và hiệu của hai số liền nhau của cách đánh số cho $(a, b) = 1$ là a hoặc $a - b$).

Đến đây ta phải chèn số $b + 1$ vào giữa $b - a + 1$ và l . Cách chèn này là duy nhất.

Mặt khác có thể chứng minh rằng cách chèn lại các số $b + 1, \dots, n$ sẽ thu được cách đánh số thỏa mãn với n số.

Tổng hợp ta có số cách đánh số thỏa mãn chính bằng số bộ $(a, b) = 1$ mà $a + b > n, 1 \leq a, b \leq n$. Dễ dàng chứng minh được số này $= 1 + \sum_{k=2}^n \varphi(k)$. DPCM.

BÀI 14. ĐK1:

$$a^2b + a:a^2 + b \Leftrightarrow b(a^2 + b) - b^2 + a:a^2 + b \Leftrightarrow a - b^2:a^2 + b$$

ĐK2:

$$ab^2 + b:b^2 - a \Leftrightarrow a(b^2 - a) + a^2 + b:b^2 - a \Leftrightarrow a^2 + b:b^2 - a$$

Ta có 2 TH:

TH1:

$$a^2 + b = b^2 - a \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 - b \Leftrightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 4b^2 - 4b + 1 \Leftrightarrow (2a + 1)^2 = (2b - 1)^2 \\ \Leftrightarrow a + 1 = b \text{ hoặc } a = -b \text{ TH2:}$$

$$a^2 + b = a - b^2 \Leftrightarrow a^2 - a = -b^2 - b \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 = -4b^2 - 4b - 1 + 2 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 = -(2b + 1)^2 + 2$$

Đoạn còn lại mọi người làm nhé.

BÀI 15. Ta thấy $5q^4 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 3p^4 - 4r^2 \equiv 26 \equiv 1 \pmod{5}$

+) Nếu p, r không chia hết cho 5 thì $3p^4 \equiv 3 \pmod{5}, 4r^2 \equiv 4; 1 \pmod{5} \Rightarrow 3p^4 - 4r^2 \equiv -1; 2 \pmod{5}$

Suy ra phải có 1 số chia hết cho 5 mà p, q, r là các số nguyên tố nên p, r có 1 số bằng 5.

+) Nếu $p = 5 \Rightarrow 5q^4 + 4r^2 = 1849 \Rightarrow q = 3, r = 19$

+) Nếu $r = 5 \Rightarrow 3p^4 - 5q^4 = 126 \Rightarrow 3p^4 = 5q^4 + 126$ loại vì $3q^4 \equiv 3 \pmod{5}, 126 + 5r^4 \equiv 1 \pmod{5}$

Vậy $p = 5, q = 3, r = 19$.

BÀI 16. Thực chất yêu cầu của bài toán chỉ là tìm số trung điểm ít nhất của n điểm trong mặt phẳng.

Thoạt đầu ta nghĩ cứ 2 điểm sẽ cho ta 1 trung điểm, nhưng lại có thể có các hình bình hành (2 đoạn chung nhau giao điểm). Điểm mấu chốt của bài toán là ở đó.

Vì có n điểm nên theo nguyên tắc cực hạn sẽ tồn tại 2 điểm có khoảng cách cực đại. Giả sử AB max.

Ta sẽ chứng minh 5 trung điểm sau đây là phân biệt:

+, trung điểm M của AB

+, trung điểm của AX

+, trung điểm của BX

+, trung điểm của AY

+, trung điểm của BY

(với X, Y là 2 điểm phân biệt khác A, B trong $n-2$ điểm còn lại)

Hiển nhiên thấy trung điểm của AX, AB, BX đôi 1 phân biệt (vì nếu trùng nhau thì A, X, B sẽ trùng nhau).

Tương tự trung điểm của AB, BY, AY cũng phân biệt

Ta chỉ cần xét tới sự phân biệt của trung điểm của AX và BY .

Gọi N là trung điểm chung của $AX, BY \Rightarrow ABYX$ là hình bình hành $AX = YB$ hoặc $XB = AY$ sẽ lớn hơn AB .

vô lý vì ta đã giả sử AB max.

Do đó số trung điểm được tạo thành ít nhất là $1 + (n - 2) + (n - 2) = 2n - 3$.

BÀI 17. Nhận thấy ngay nếu $k \geq 3$ thì $n^2 \equiv 5 \pmod{8}$ là điều vô lý. Do vậy chỉ việc thử với $k = 0, 1, 2$. Ta được cặp $(k, n) = (0, 4)$.

BÀI 18. Dễ dàng kiểm tra được cặp $(0, 0), (2, 2)$ thỏa mãn. Ta xét $x, y > 2$.

Viết lại phương trình : $49(7^{x-2} - 1) = 50(5^{y-2} - 1)$

Ta có :

$$5^{y-2} \equiv 1 \pmod{49} \Rightarrow \text{ord}_{49}(5) \mid y - 2 \Rightarrow 42 \mid y - 2$$

Suy ra: $31 \mid 5^3 - 1 \mid 5^{42} - 1 \mid 5^{y-2} - 1$

Do vậy mà :

$$7^{x-2} \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow \text{ord}_{31}(7) \mid x - 2 \Rightarrow 30 \mid x - 2 \Rightarrow 15 \mid x - 2 \quad (1)$$

Thế nhưng lại dễ thấy :

$$7^{x-2} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow \text{ord}_5(7) \mid x - 2 \Rightarrow 4 \mid x - 2 \quad (2)$$

Từ (1)(2) ta suy ra :

$$60 \mid x - 2 \Rightarrow 7^{x-2} - 1 \vdots 7^{60} - 1 \vdots 125$$

Mà ta lại có $125 \nmid 50(5^{y-2} - 1)$, đến đây ta gặp mâu thuẫn.

Đáp số của bài toán là $(0, 0), (2, 2)$.

BÀI 19. Hướng dẫn giải:

Ta chọn 3 đỉnh ra để tạo tam giác $\Rightarrow$ có C_n^3 .

Sau đó ta trừ các tam giác có 1 hoặc 2 cạnh thuộc các cạnh đa giác.

BÀI 20. Xét các số có dạng $x + ky$ với $x, y \in \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor\}$, Có $> p$ giá trị nên tồn tại:

$$x + ky \equiv u + kv \pmod{p}$$

$\Leftrightarrow a^2 + 5b^2 \equiv 0 \pmod{p} (a, b > 0)$ Lại có $a^2 + 5b^2 < 6p$ Ta xét 5TH:

$$\text{TH1: } a^2 + 5b^2 = p. \text{ Khi đó } p^2 = (a^2 - 5b^2)^2 + 5(2ab)^2$$

$$\text{TH2: } a^2 + 5b^2 = 2p. \text{ Khi đó } p^2 = \left(\frac{a^2 - 5b^2}{2}\right)^2 + 5(ab)^2$$

$$\text{TH3: } a^2 + 5b^2 = 3p. \text{ Khi đó } 2p = \left(\frac{a+5b}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = \left(\frac{a-5b}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 \text{ Quay}$$

trở về TH 2 .

$$\text{TH4: } a^2 + 5b^2 = 4p. \text{ Khi đó } p = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (\text{TH1})$$

$$\text{TH5: } a^2 + 5b^2 = 5p \text{ Khi đó } p = 5a_1^2 + b^2 \quad (\text{TH1})$$

BÀI 21. Bổ đề 1 : Với số nguyên dương n và số nguyên dương a .

Ta có :

i)

$$\left\lfloor \frac{n+1}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \quad \text{khi } a \nmid n+1$$

ii)

$$\left\lfloor \frac{n+1}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1 \quad \text{khi } a \mid n+1$$

Chứng minh :

Đặt $n + 1 = ka + r$, $t \in [0, a - 1]$.

Nếu $r = 0$ thì:

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ka - 1}{a} \right\rfloor = k + \left\lfloor \frac{-1}{a} \right\rfloor = k - 1 = \left\lfloor \frac{n + 1}{a} \right\rfloor - 1$$

Nếu $r \neq 0$ thì:

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ka + r - 1}{a} \right\rfloor = k + \left\lfloor \frac{r - 1}{a} \right\rfloor = k = \left\lfloor \frac{n + 1}{a} \right\rfloor \text{ Bỏ đề được chứng minh.}$$

Bổ đề 2 : Với số nguyên dương n , ta có :

i) $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ nếu $n+1$ không là số chính phương.

ii) $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ nếu $n+1$ là số chính phương.

Chứng minh :

Nếu $n+1$ chính phương, đặt $n+1 = a^2$ thì $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{a^2} \rfloor = a$

Còn $a - 1 = \sqrt{a^2 - 2a + 1} < \sqrt{n} = \sqrt{a^2 - 1} < \sqrt{a^2} = a \Rightarrow \lfloor \sqrt{n} \rfloor = a - 1 = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - 1$.

Nếu $n+1$ không chính phương. Giả sử $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = a, \lfloor \sqrt{n} \rfloor = b \Rightarrow a \geq b$. Ta có $a \leq \sqrt{n+1} \Rightarrow a^2 \leq n+1$ nhưng do dấu bằng không xảy ra (vì $n+1$ không chính phương) nên $a^2 < n+1 \Rightarrow a^2 \leq n \Rightarrow a \leq \sqrt{n} \Rightarrow a \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor = b$. Kéo theo $a = b$.

Bổ đề được chứng minh.

Quay trở lại bài toán :

Ta chứng minh bằng quy nạp. Kiểm tra được dễ dàng với những giá trị đầu tiên. Giả sử :

$$A = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2m$$

Ta xét với $n+1$:

Giả sử $n+1$ có đúng k ước nguyên dương, hiển nhiên các ước này thuộc tập $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}$

Khi đó :

$$B = \left\lfloor \frac{n+1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{n+1} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right) + k + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$$

Nếu $n+1$ không là số chính phương thì trong phân tích tiêu chuẩn của $n+1$ sẽ có một thừa số nguyên tố có số mũ lẻ. Giả sử $n+1 = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \dots p_i^{t_i} \dots p_s^{t_s}$ với t_i lẻ. khi đó $2 \mid k = (t_1 + 1)(t_2 + 1) \dots (t_s + 1)$ vì t_i lẻ.

Tức trường hợp này k chẵn, đặt $k = 2k'$.

Mặt khác theo bổ đề trên khi $n+1$ không chính phương thì $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Do vậy ta có $B = 2m + 2k'$ chẵn.

Nếu $n+1$ chính phương thì tất cả các ước nguyên tố trong phân tích tiêu chuẩn đều có số mũ chẵn. Khi đó số ước của $n+1$ lẻ, tức $k = 2k' + 1$.

Theo bổ đề lại có $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$.

Do vậy ta có $B = 2m + 2k' + 2$ chẵn.

Theo nguyên lý quy nạp bài toán được chứng minh.

BÀI 22. Ta giải bài này bằng tư tưởng xích và đối xích.

Cho 2 tập hợp con của U là A và B . A và B có quan hệ so sánh khi và chỉ khi

Đến một lúc nào đó, bạn làm toán vì bạn thích chứ không phải để chứng tỏ một cái gì nữa.

$$|A \Delta B| \geq 2.$$

Gọi họ tập con lớn nhất của U sao cho với bất kì hai tập phân biệt A , thì $|A \Delta B| \geq 2$ là K .

Khi đó theo định lí Dilworth, $|K|$ bằng số phân hoạch nhỏ nhất của các đối xích hợp thành họ các tập hợp con của U .

Gọi T là số phân hoạch của các đối xích hợp thành họ các tập hợp con của U .

Ta sẽ xây dựng một số T sao cho $T = 2^{n-1}$.

Với $n = 2$ thì tồn tại T .

Giả sử với $n = k$, tồn tại $T = 2^{k-1}$.

Xét $n = k + 1$.

Khi đó có 2^{n-1} tập con của U chứa phần tử $n + 1$ và nếu ta bỏ phần tử $n + 1$ đi, theo giả thiết quy nạp, ta có thể lập thêm 2^{n-1} phân hoạch của họ tập hợp con của U chứa $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, suy ra đpcm.

Vì $|K|$ bằng số phân hoạch nhỏ nhất của các đối xích hợp thành họ các tập hợp con của U nên $|K| \leq 2^{n-1}$.

Vậy $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

—————Hết—————

4 Phụ lục

Thế nào là Số học và Tổ hợp?

4.1 Số học

Số học là một phân nhánh toán học lâu đời nhất và sơ cấp nhất, được hầu hết mọi người thường xuyên sử dụng từ những công việc thường nhật cho đến các tính toán khoa học và kinh doanh cao cấp, qua các phép tính cộng, trừ, nhân, chia. Người ta thường dùng thuật ngữ này để chỉ một phân nhánh toán học chú trọng đến các thuộc tính sơ cấp của một số phép tính trên các con số. Những nhà toán học đôi khi dùng chữ số học (cao cấp) để nhắc đến môn lý thuyết số, nhưng không nên nhầm lý thuyết này với số học sơ cấp.

4.2 Tổ hợp

Tổ hợp (hay giải tích tổ hợp, đại số tổ hợp, lý thuyết tổ hợp) là một ngành toán học rời rạc, nghiên cứu về các cấu hình kết hợp các phần tử của một tập hữu hạn phần tử. Các cấu hình đó là các hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp,... các phần tử của một tập hợp.

Nó có liên quan đến nhiều lĩnh vực khác của toán học, như đại số, lý thuyết xác suất, lý thuyết ergod (ergodic theory) và hình học, cũng như đến các ngành ứng dụng như khoa học máy tính và vật lý thống kê.

Toán học tổ hợp liên quan đến cả khía cạnh giải quyết vấn đề lẫn xây dựng cơ sở lý thuyết, mặc dù nhiều phương pháp lý thuyết vững mạnh đã được xây dựng, tập trung vào cuối thế kỷ 20 (xem trang Danh sách các chủ đề trong toán học tổ hợp). Một trong những mảng lâu đời nhất của toán học tổ hợp là lý thuyết đồ thị.