# BÀI TẬP LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN MIỀN NAM LẦN THỨ XVIII

## Chủ đề: SỐ HỌC

( VĂN PHÚ QUỐC- GV. TRƯỜNG ĐH QUẢNG NAM)

**1.** Tìm hai số nguyên dương thỏa mãn PT: $x^{2011}+y^{2011}=(2013)^{2011}$.

**HD:**

Giả sử $x, y$ là hai số nguyên dương thỏa mãn PT đã cho. Suy ra: $x, y<2013$.

Không mất tính tổng quát, giả sử: $x \geq y$.

Do $2013>x$ nên $2013 \geq x+1$ ( $x \in \mathbb{Z}^{+}$)

Suy ra: $2013^{2011} \geq (x+1)^{2011}=x^{2011}+2011x^{2010}+\ldots+2011x+1 \Rightarrow x^{2011}+y^{2011}>x^{2011}+2011.x^{2010}$

$$\Rightarrow y^{2011}>2011.x^{2010}.$$

Do $x \geq y$ nên $\begin{cases} x^{2011}>2011x^{2010} \\ y^{2011}>2011y^{2010} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2011 \\ y>2011 \end{cases}$. Như vậy: $2011<x, y<2013 \Rightarrow x=y=2012$.

**2.** Tìm phần nguyên trong biểu diễn thành số thập phân của số:

$$Q=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}} \;;\; x \in \mathbb{N}^{*}.$$

**HD:**

Với $x \in \mathbb{N}^{*}$ thì:

$(4x+1)^2<36x^2+10x+3<(6x+2)^2 \Rightarrow 4x+1<\sqrt{36x^2+10x+3}<6x+2$

Cộng $4x^2$ vào mỗi vế của BĐT trên ta có: $(2x+1)^2<4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}<(2x+2)^2$

$$\Rightarrow 2x+1<\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}<2x+2.$$

Cộng thêm $x^2$ vào mỗi vế của BĐT ta có: $(x+1)^2<x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}<(x+2)^2$

$$\Rightarrow x+1<\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{36x^2+10x+3}}}<x+2.$$

Vậy $[Q]=x+1$.

**3.** Chứng minh rằng nếu $x, y, x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: $x^{2012}+y^{2012}=z^{2012}$ thì $Min\{x, y\} \geq 2012$.

**HD:**

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y$ thỏa mãn PT :

$$x^{2012}+y^{2012}=z^{2012} \Rightarrow z^{2012}>y^{2012} \Rightarrow z>y \Rightarrow z \geq y+1$$

$$\Rightarrow z^{2012} \geq (y+1)^{2012} = y^{2012} + 2012y^{2011} + ... + 1 \geq y^{2012} + 2012y^{2011}$$

$$\Rightarrow x^{2012} + y^{2012} \geq y^{2012} + 2012y^{2011} \Rightarrow x^{2012} \geq 2012y^{2011} \geq 2012y^{2011} \text{ ( vì } x \leq y \text{ )}$$

$$\Rightarrow x \geq 2012.$$

Vậy $Min\{x, y\} = x \geq 2012$.

**4.** Số $a = 1^k + 9^k + 19^k + 2013^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ có phải là số chính phương không?

**HD:**

Với $k \in \mathbb{Z}$ và k lẻ ta có:

$$1^k \equiv 1(mod4) \text{ ; } 9^k \equiv 1(\text{mod } 4); 19^k \equiv -1(\text{mod } 4) \text{ ; } 2013^k \equiv 1(\text{mod } 4).$$

Do đó: $a \equiv 2(\text{mod } 4)$. Vậy $a$ không phải là số chính phương.

**5.** Chứng minh rằng nếu $x^2 + 2y$ là một số chính phương với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thì $x^2 + y$ là tổng của hai số chính phương.

**HD:**

Ta có: $x^2 + 2y > x$.

Giả thiết $\Rightarrow x^2 + 2y = (x+t)^2$ với $t \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2y = t^2 + 2tx \Rightarrow t$ chẵn $\Rightarrow t = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^+$.

Do đó: $2y = 4k^2 + 4kx \Rightarrow y = 2k^2 + 2kx \Rightarrow x^2 + y = (x+k)^2 + 2kx$ (đpcm).

**6.** Tìm số nguyên tố $p$ sao cho $2p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

**HD:**

Rõ ràng: $p \neq 2 \Rightarrow p \geq 3$.

Giả sử $ap+1 = t^3$ ; $t \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2p = t^3 - 1 \Leftrightarrow 2p = (t-1)(t^2+t+1)$.

Vì $(t^2+t+1, 2) = 1$ nên $t-1 \vdots 2$.

Mặt khác do $p$ là số nguyên tố nên $t-1 = 2 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow p = 13$.

**7.** Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên $a$ sao cho $b = n^4 + a$ không phải là số nguyên tố với mọi $n \in \mathbb{N}$.

**HD:**

Xét số $a = 4k^4, k \in \mathbb{N}$ và $k > 1$. Ta có:

$$b = n^4 + 4k^4 = (n^2 - 2nk + 2k^2)(n^2 + 2nk + 2k^2).$$

với $n^2 - 2nk + 2k^2 = (n-k)^2 + k^2 > 1$ ; $n^2 + 2nk + 2k^2 = (n+k)^2 + k^2 > 1$

Vậy $b$ không phải là số nguyên tố.

**8.** Cho $p$ là số nguyên tố bất kỳ khác 2 và khác 5. Chứng minh rằng trong dãy $9, 99, 999, 9999, \ldots$ có vô số số hạng chia hết cho $p$.

**HD:**

Do $p$ là số nguyên tố khác 2 và khác 5 nên $(p, 10) = 1$ (1)

Vì $p$ là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ, ta có: $(10^p - 10) \vdots p \Rightarrow 10(10^{p-1} - 1) \vdots p$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $10^{p-1} - 1 \vdots p \Rightarrow 10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Do đó, với mọi $n$ nguyên dương thì $10^{n(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 10^{n(p-1)} - 1 \vdots p$ với $n$ nguyên dương.

Mặt khác, $10^{n(p-1)} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n(p-1)}$. Từ đó suy ra tồn tại vô số số hạng của dãy $9, 99, 999, 9999, \ldots$ chia hết cho $p$.

**9.** Cho $p$ là số nguyên tố lẻ. Chứng minh: $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k - (2^p + 1)$ chia hết cho $p^2$.

**HD:**

Ta có: $T = \sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k - (2^p + 1) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k - \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k + 1\right)$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k C_{p+k}^k + 1 + C_{2p}^p - \left(\sum_{k=0}^{p-1} C_p^k + 3\right) = \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left(C_{p+k}^k - 1\right) + \left(C_{2p}^p - 2\right)$$

- Chứng minh: $\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left(C_{p+k}^k - 1\right) \vdots p$ với $1 \le k \le p-1$ ( vì $C_p^k \vdots p$).

Thật vậy: $C_{p+k}^k - 1 = \dfrac{(p+k)!}{k!.p!} - 1 = \dfrac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k) - k!}{k!}$.

Vì $(p+1)(p+2)\ldots(p+k) \equiv k! \pmod{p} \Rightarrow (p+1)(p+2)\ldots(p+k) - k!$ chia hết cho $p$ và $k!$.

Mà $(p, k!) = 1$ suy ra: $(p+1)(p+2)\ldots(p+k) - k!$ chia hết cho

$k!p \Rightarrow \left(C_{p+k}^k - 1\right) \vdots p \Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left(C_{p+k}^k - 1\right) \vdots p^2$ (1)

- Chứng minh: $\left(C_{2p}^p - 2\right) \vdots p^2$

Thật vậy: $(1+x)^{2p} = (1+x)^p (1+x)^p \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k x^k = \left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} C_p^j x^{p-j}\right)$.

Đồng nhất hệ số của $x^p$ hai vế ta được: $C_{2p}^p = \sum_{k=0}^{p} \left(C_p^k\right)^2 \Leftrightarrow C_{2p}^p = 2 + \sum_{k=0}^{p-1} \left(C_p^k\right)^2$.

$C_p^k \vdots p \Rightarrow \left(C_p^k\right)^2 \vdots p^2$ với mọi $1 \le k \le p-1 \Rightarrow C_{2p}^p \equiv 2\left(\bmod p^2\right) \Rightarrow \left(C_{2p}^p - 2\right) \vdots p^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $T \vdots p^2$.

**10.** Giải PT nghiệm nguyên: $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 1599$ với $x_1, x_2, ..., x_{14} \in \mathbb{Z}$

**HD:**

Xét $n$ là một số nguyên tùy ý.

- Nếu $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ thì $n^4 = 16k^4 \equiv 0\left(\bmod 16\right)$.

- Nếu $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ thì $n^2 - 1 = 4k\left(k+1\right) \vdots 8 \Rightarrow n^4 - 1 \vdots 16 \Leftrightarrow n^4 \equiv 1\left(\bmod 16\right)$.

Do đó: $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 \equiv r\left(\bmod 16\right)$.

Với $r \in \mathbb{N}$ và $r \le 14$.

Mặt khác, ta có: $1599 \equiv 15\left(\bmod 16\right)$.

Do đó : PT đã cho không thể có nghiệm nguyên.

**11.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n$, phân số sau đây tối giản: $\dfrac{21n+4}{14n+3}$.

**HD:**

Gọi $d = \left(21n+4; 14n+3\right)$.

Ta có: $21n+4 = kd$ ; $14n+3 = hd$ với $k, h \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra: $7n+1 = \left(k-h\right)d$.

Do đó: $21n+3 = 3\left(k-h\right)d$.

Vì vậy: $1 = \left(21n+4\right) - \left(21n+3\right) = kd - 3\left(k-h\right)d = \left(3h-2k\right)d \Rightarrow d = 3h - 2k = 1$.

Vậy phân số đã cho tối giản.

**12.** Chứng minh $B = \dfrac{1}{630}x^9 - \dfrac{1}{21}x^7 + \dfrac{13}{30}x^5 - \dfrac{82}{63}x^3 + \dfrac{32}{35}x$ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của $x$.

**HD:**

Xét $A = x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)\left(x^2-16\right)$

$= \left(x-4\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)$.

Còn $B = \dfrac{A}{630} = \dfrac{A}{2.5.7.9}$.

**13.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên $a,b$ ta có: $(3a+5b,8a+13b)=(a,b)$.

**HD:**

Ta có: $8a+13b=2(3a+5b)+(2a+3b)$ ; $3a+5b=1(2a+3b)+(a+2b)$ ; $2a+3b=2(a+2b)-b$.

Vậy $(8a+13b,3a+5b)=(3a+5b,2a+3b)=(2a+2b,a+2b)=(a+2b,b)=(a,b)$.

**14.** Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, biết rằng tồn tại số nguyên dương $a$ sao cho không có số nào trong các số $P(1),P(2),...,P(a)$ chia hết cho $a$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $z$ ta có $P(z)\neq 0$.

**HD:**

Giả sử tồn tại số nguyên $b$ sao cho $P(b)=0$. Khi đó ta có: $P(x)=(x-b)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên. Đặt $b=aq+r$, $1\le r<a$. Ta cos: $P(r)=(r-b)Q(r)=-aQ(r)\vdots a$ ( mâu thuẫn gt)

**15.** Chứng minh rằng các số $2^p-1$ và $2^q-1$ là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $p$ và $q$ nguyên tố cùng nhau.

**HD:**

ĐK cần: Giả sử $(2^p-1,2^q-1)=1$ và $k=(p,q)$. Đặt $p=ku,q=kv$.

Khi đó: $2^p-1=(2^k)^u-1\vdots 2^k-1$. Tương tự: $2^q-1\vdots 2^k-1$.

Như vậy $2^k-1$ là một ước chung của $2^p-1$ và $2^q-1$. Kết hợp với giả thiết suy ra: $2^k-1=1\Leftrightarrow k=1$.
Vậy $p$ và $q$ nguyên tố cùng nhau.

ĐK đủ: Giả sử $(p,q)=1$. Khi đó tồn tại các số nguyên $s,t$ sao cho $ps+qt=1$. Gọi $d=(2^p-1,2^q-1)$.

- Xét TH: $s>0$. Khi đó $t<0$. Đặt $v=-t>0$. Suy ra: $ps-qv=1$. Ta có: $2^{ps}-1\vdots 2^p-1\Rightarrow 2^{ps}-1\vdots d$.

Tương tự: $2^{qv}-1\vdots d$. Từ đó suy ra: $(2^{ps}-1)-(2^{qv}-1)\vdots d$ hay $2^{qv}(2^{ps-qv}-1)\vdots d$. Kết hợp với đẳng thức $ps-qv=1$ suy ra: $2^{qv}\vdots d$.

Mặt khác do $2^p-1$ là một số lẻ nên $d$ lẻ. Từ đó suy ra: $d=1$.

- Xét TH: $s<0$, $t>0$ ta làm tương tự.

Tóm lại: $(2^p-1,2^q-1)=1$.

**16.** Cho $a,b$ là hai số nguyên sao cho $(a,b)=1$. Tìm $(5^a+7^a,5^b+7^b)$.

**HD:**

Không mất tính tổng quát, giả sử $a>b$. Đặt $s_a=5^a+7^a$.

Nếu $a \geq 2b$ ta có: $s_a = s_a s_{a-b} - 5^b 7^b s_{a-2b}$. Do đó: $(s_a, s_b) = (s_b, s_{a-2b})$.

Tương tự nếu $b < a < 2b$ thì ta có: $(s_a, s_b) = (s_b, s_{2b-a})$.

Vậy từ thuật toán Euclid suy ra nếu $a+b$ là số chẵn thì $(s_a, s_b) = (s_1, s_2) = 12$, còn nếu $a+b$ là số lẻ thì $(s_a, s_b) = (s_0, s_1) = 2$.

**17.** Tìm $\left[2^n+1, 2^n-1\right]$ với $n \in \mathbb{N}$.

**HD:**

- Nếu $n=0$ thì $2^n-1=0$.

- Nếu $n>0$ thì $2^n+1 = \left(2^n-1\right)+2$. Do đó: $\left(2^n+1, 2^n-1\right) = \left(2^n-1, 2\right) = 2$.

Suy ra: $\left[2^n+1, 2^n-1\right] = \dfrac{\left|\left(2^n+1\right)\left(2^n-1\right)\right|}{\left(2^n+1, 2^n-1\right)} = 4^n-1$..

**18.** Cho $p$ và $2p+1$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là một hợp số.

**HD:**

Do $p$ là số nguyên tố lớn hơn $3$ nên $p$ có dạng $p = 3k \pm 1$.

- Nếu $p = 3k+1$ thì $2p+1 = 6k+3 = 3\left(2k+1\right)$ không phải là một số nguyên tố nên trường hợp này không thể xảy ra.

- Nếu $p = 3k-1,\ k \geq 2$ thì $4p+1 = 12k-3 = 3\left(4k-1\right)$. Do $4k-1 \geq 7$ nên $4p+1$ là một hợp số.

**19.** Tìm số nguyên tố $p$ sao cho hai số $p+4$ và $p+8$ cũng là số nguyên tố.

**HD:**

- Nếu $p=3$ thì $p+4=7, p+8=11$ đều là những số nguyên tố.

- Nếu $p=3k+1$ thì $p+8 = 3k+9 = 3\left(k+3\right)$ là hợp số.

- Nếu $p=3k-1$ thì $p+4 = 3k+1 = 3\left(k+1\right)$ là hợp số.

Vậy $p=3$ là số nguyên tố duy nhất phải tìm.

**20.** Chứng minh rằng với $m>2$ , giữa $m$ và $m!$ có ít nhất một số nguyên tố. Từ đó suy ra rằng có vô số số nguyên tố.

**HD:**

Do $m>2$ nên $m!-1>4$. Gọi $p$ là một ước nguyên tố của $a = m!-1$ ta có: $p \leq a \Rightarrow P < m!$.

Bây giờ chứng tỏ $p>m$. Giả sử ngược lại rằng $p \leq m$. Khi đó: $p$ là ước của $m!$ và do đó $p$ là ước của $m!-\left(m!-1\right)=1$, điều này là vô lý. Vậy $p$ là số nguyên tố thỏa mãn $m<p<m!$.

**21.** Cho rằng các số tự nhiên $a,b$ và $n$. Biết rằng $k^n - a$ chia hết cho $k-b$ với mọi $k \in \mathbb{Z}^+, k \neq b$.

Chứng minh rằng: $a = b^n$.

**HD:**

Ta có: $k^n - b^n \vdots k - b$ với $k,b \in \mathbb{Z}$ và $k \neq b$.

Ta lại có: $k^n - a \vdots k - b$. Suy ra: $a - b^n \vdots k - b$ với mọi $b \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^+, k \neq b$.

Điều này chỉ có thể xảy ra $\Leftrightarrow a = b^n$.

**22.** Cho $A = 2^n + 3^n; B = 2^{n+1} + 3^{n+1}; C = 2^{n+2} + 3^{n+2}$.

a) Chứng minh: A và B nguyên tố cùng nhau ; b) Tìm $d = (A,C)$.

**HD:**

a) Ta có: $B - 2A = 3^n$.

Nếu A và B có một ước chung $d \neq 1$ thì $d|3^n \Rightarrow d|2^n$ ( Vô lý). Do đó A và B nguyên tố cùng nhau.

b) Ta có: $C - 4A = 5.3^n$. Điều này chứng tỏ ước chung lớn nhất của A và C có thể là 5 hoặc 1.

Muốn cho $(A,C) = 5$ thì $5|A \Leftrightarrow n$ lẻ.

Vậy $d = 5$ nếu $n$ lẻ ; $d = 1$ nếu $n$ chẵn.

**23.** Có tồn tại một số tự nhiên $n$ có thể viết dưới dạng: $n = x! + y!$ với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và $x \leq y$ bằng hai cách khác nhau hay không?

**HD:**

Giả sử tồn tại một số tự nhiên $n$ có thể viết dưới dạng:

$n = x_1! + x_2! = x_2! + y_2!$ với $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}^+$ và $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 \geq x_2$. Do đó: $x_2! + y_2! - y_1! \vdots x_2! \Rightarrow x_1! \vdots x_2!$ Vô lý.

**24.** Tìm nghiệm nguyên dương của PT: $x_1^{2012} + x_2^{2012} + ... + x_{2012}^{2012} = 2011x_1x_2...x_{2012}$

**HD:**

Ta có: $x_1^{2012} + x_2^{2012} + ... + x_{2012}^{2012} \geq 2012x_1x_2...x_{2012} > 2011x_1x_2...x_{2012}$ Vô lý.

**25.** Chứng minh rằng nếu có 6 số nguyên $a,b,c,d,e,f$ thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = f^2$ thì cả 6 số đó không đồng thời là số lẻ.

**HD:** ( Dễ dàng chứng minh được bình phương của một số nguyên lẻ chia cho 8 dư 1

Giả sử cả 6 số đó đều là số lẻ. Thế thì mỗi số hạng ở vế trái khi chia cho 8 đều dư 1. Như vậy cả vế trái chia cho 8 dư 5. Trong khi đó vế phải là số chia cho 8 dư 1. Điều này mâu thuẫn.

**26.** Cho số nguyên tố $p>3$ và m, n là hai số nguyên tố cùng nhau sao cho $\frac{m}{n}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}$.

Chứng minh rằng $m$ chia hết cho $p$.

**HD:**

Ta có: $((p-1)!)^2\frac{m}{n}=((p-1)!)^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}\right)$ là một số nguyên.

Mặt khác do $p$ là số nguyên tố nên $\left\{0,\frac{1}{1},\frac{1}{2},...,\frac{1}{p-1}\right\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ theo mod $p$.

Do đó: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}\equiv 1^2+2^2+...+(p-1)^2=\frac{(p-1)p(2p-3)}{6}\equiv 0(\text{mod } p)$(do $p\geq 5$ nên

$(p,6)=1$). Suy ra: $((p-1)!)^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\equiv 0$ (mod p) hay $((p-1)!)^2\frac{m}{n}\vdots p$.

Mà $(p-1,p)=1$ nên $m$ chia hết cho $p$.

**27.** Cho số nguyên $n\geq 3$. Lấy $n$ số $x_1,x_2,...,x_n$ và mỗi số $x_i$ bằng 1 hoặc $-1$ sao cho:

$x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$. Hãy chứng minh rằng $n$ phải là bội số của 4.

**HD:**

Đặt: $X_1=x_1x_2, X_2=x_2x_3,...,X_n=x_nx_1$.

Mỗi số $X_i$ bằng 1 hoặc $-1$, và $X_1+X_2+...+X_n=0$.

Như vậy nếu có $p$ số $X_i$ bằng 1 thì phải có $p$ số $X_j$ bằng $-1$. Suy ra: $n=2p$.

Mặt khác: $X_1X_2...X_n=(x_1x_2...x_n)^2=1$

Mà $X_1X_2...X_n=(-1)^p$. Vậy $p$ chẵn và $n=2p$ là một bội số của 4.

**28.** Chứng tỏ rằng số $444444+303030\sqrt{3}$ không thể biểu diễn dưới dạng $(x+y\sqrt{3})^2$ với $x,y\in\mathbb{Z}$.

**HD:**

Nếu $(A+B\sqrt{3})^2=C+D\sqrt{3}$ thì $C=A^2+3B^2, D=2AB$. Suy ra: $(A-B\sqrt{3})^2=C-D\sqrt{3}$.

Do đó nếu $(x+y\sqrt{3})^2=444444+303030\sqrt{3}$ thì cũng có $(x-y\sqrt{3})^2=444444-303030\sqrt{3}<0$ vô lý.

**29.** Chứng minh rằng đa thức: $P(x)=x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$ chia hết cho đa thức: $Q(x)=x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

**HD:**

Ta có: $P(x)-Q(x)=\left(x^{9999}-x^{9}\right)+\left(x^{8888}-x^{8}\right)+...+\left(x^{1111}-x\right)$

$$= x^{9}\left(\left(x^{10}\right)^{999}-1\right)+x^{8}\left(\left(x^{10}\right)^{888}-1\right)+...+\left(\left(x^{10}\right)^{111}-1\right).$$

$\Rightarrow P(x)-Q(x)\,\vdots\, x^{10}-1$ và do đó: $P(x)-Q(x)\,\vdots\, Q(x)=\dfrac{x^{10}-1}{x-1}\Rightarrow P(x)\,\vdots\, Q(x)$.

**30.** Cho $p$ là một số nguyên tố thỏa mãn $p\equiv 1(\bmod 6)$ và đặt $q=\left[\dfrac{2p}{3}\right]$.

Chứng minh nếu $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{(q-1).q}=\dfrac{m}{n}$ ; $m,n\in\mathbb{Z}$ thì $p|m$.

**HD:**

Ta có: $p\equiv 1(\bmod 6)$. Đặt $p=6k+1$, suy ra: $q=\left[\dfrac{2p}{3}\right]=4k$.

Khi đó $\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{(4k-1).4k}=\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}+...+\dfrac{1}{4k}$

$$=\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{4k}\right)+\left(\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{4k-1}\right)+...+\left(\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$=\frac{p}{(2k+1)4k}+\frac{p}{(2k+2)(4k-1)}+...+\frac{p}{3k(3k+1)}.$$

Suy ra: $p|m$.

**31.** Tìm nghiệm nguyên của PT: $x^{2}+2011x+2012y^{2}+y=xy+2011xy^{2}+2013$.

**HD:**

PT $\Leftrightarrow\left(x^{2}+2011x-2012\right)+\left(2012y^{2}-2012xy^{2}\right)+\left(y-xy\right)=1\Leftrightarrow(x-1)\left(x+2012-2012y^{2}-y\right)=1$.

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên hai thừa số trong vế trái của PT này đều là ước số của 1.

**32.** Cho $n$ là số tự nhiên, $a$ là ước nguyên dương của $2n^{2}$. Chứng minh $n^{2}+a$ không là số chính phương.

**HD:**

Giả sử $n^{2}+a=x^{2}$ (1) với $x\in\mathbb{Z}$. Theo giả thiết: $2n^{2}=ka$ với $k\in\mathbb{N}$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow x^{2}=n^{2}+\dfrac{2n^{2}}{k}\Leftrightarrow\left(\dfrac{kx}{n^{2}}\right)^{2}=k^{2}+2k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\dfrac{kx}{n}\in\mathbb{Z}$.

Vì vậy $k^{2}+2k$ phải là số chính phương ( Vô lý vì $k^{2}<k^{2}+2k<(k+1)^{2}$ ).

**33.** Chứng minh rằng số: $222^{555}+555^{222}$ chia hết cho 7.

**HD:**

Ta có: $222=7.31+5\Rightarrow 222\equiv 5\pmod 7\Rightarrow 222^{555}\equiv 5^{555}\pmod 7$.

Mặt khác: $5^2=25\equiv 4\pmod 7$

$5^3\equiv 4.5\pmod 7\equiv 6\pmod 7$

$5^4\equiv 6.5\pmod 7\equiv 2\pmod 7$

$5^5\equiv 2.5\pmod 7\equiv 3\pmod 7$

$5^6\equiv 3.5\pmod 7\equiv 1\pmod 7\Rightarrow 5^{6k}\equiv 1\pmod 7$.

Mà $555=6.92+3\Rightarrow 5^{555}\equiv 5^3\pmod 7\equiv 6\pmod 7$. Tức là: $222^{555}\equiv 6\pmod 7$.

Lập luận tương tự, ta có: $555=7.79+2\equiv 2\pmod 7\Rightarrow 555^{222}\equiv 2^{222}\pmod 7$.

$2^3\equiv 1\pmod 7\Rightarrow 2^{3k}\equiv 1\pmod 7$.

Mà $222=3.74\Rightarrow 2^{222}\equiv 1\pmod 7$. Tức $555^{222}\equiv 1$ (mod7).

Vậy $222^{555}+555^{222}\equiv 7\pmod 7\equiv 0\pmod 7$ tức là: $222^{555}+555^{222}$ chia hết cho 7.

**34.** Tìm bộ số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $p=m^2+n^2$ là số nguyên tố và $m^3+n^3-4$ chia hết cho $p$

**HD:**

Ta có: $m^3+n^3-4\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow -mn(m+n)-4\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow 3mn(m+n)+12\equiv 0\pmod p$.

Kết hợp với $m^3+n^3-4\equiv 0\pmod p$ suy ra:

$(m+n)^3+8\equiv 0\pmod p\Leftrightarrow (m+n+2)\left[m^2+n^2+2nm-2(m+n)+4\right]\equiv 0\pmod p$.

Do $p$ là số nguyên tố nên ta có 2 khả năng:

- TH1: Nếu $m+n+2\,\vdots\,(m^2+n^2)$ thì $m^2+n^2\le m+n+2\Leftrightarrow m(m-1)+n(n-1)\le 2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=n=1\\ m=2,n=1\\ m=1,n=2\end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy: bộ số $(m,n)$ là $(1;1),(2;1),(1;2)$ thỏa bài toán.

- TH2: Nếu $m^2+n^2+2nm-2(m+n)+4\,\vdots\,(m^2+n^2)\Rightarrow 2nm-2(m+n)+4\,\vdots\,(m^2+n^2)$.

Do $2nm-2(m+n)+4=2\left[(m-1)(n-1)+1\right]>0\Rightarrow 2nm-2(m+n)+4\ge m^2+n^2$

( chỉ xảy ra khi $m=n=1$).

**35.** Tìm tất cả các số nguyên tố $a,b,c$ sao cho: $abc < ab + bc + ca$.

**HD:**

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c$. Suy ra: $ab + bc + ca \le 3bc$.

Nếu $a \ge$ thì $3bc \le abc \Rightarrow ab + bc + ca \le abc$ mâu thuẫn với bài ra. Vậy $a = 2$ ( vì $a$ nguyên tố).

Do đó: $2bc < 2b + bc + 2c \Rightarrow \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow b < 5$.

- Với $b = 2 \Rightarrow c$ nguyên tố bất kì.
- Với $b = 3 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$.

Vậy nghiệm của bài toán là: $a = 2, b = 2, c = p$ nguyên tố và các hoán vị, hoặc $a = 2, b = 3, c = 3$ và các hoán vị.

**36.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ ta có: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1}$ chia hết cho $4^{n-1}$.

**HD:**

Ta có: $$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_{2n+1}^{2k} = \sum_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^{2k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k.(2n+1)!}{2.(2k)!(2n-2k+1)!} = \frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1}.$$

Mặt khác $4^n = (1+1)^{2n} - (1-1)^{2n} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}$.

Như vậy: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1} = (2n+1)4^{n-1} \vdots 4^{n-1}$.

**37.** Chứng minh rằng: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$ không chia hết cho 5 với mọi $n$ là số tự nhiên.

**HD:**

Ta có: $$(1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}x^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1}$$

$$(1-x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}x^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1}$$

Suy ra: $$(1+x)^{2n+1}(1-x)^{2n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}x^{2k}\right)^2 - \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1}\right)^2 \quad (*)$$

Cho $x = \sqrt{8}$, từ (*) suy ra: $7^{2n+1} = A^2 - 8B^2$ với $A = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}2^{3k}$ , $B = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$.

Vì $(-7)^{2n+1} \equiv \pm 2 \pmod 5$ nên :

- Nếu $B \vdots 5$ thì $A^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$ (**)

Tuy nhiên $\forall a \in \mathbb{N}$, $a = 5k, a = 5k \pm 1, a = 5k \pm 2$. Ta luôn có: $a^2 \equiv 0 \pmod 5$; $a^2 \equiv 1 \pmod 5$;

$a^2 \equiv 4 \pmod 5$. Suy ra: $A^2 \neq \pm 2 \pmod 5$ (***).

Từ (**) và (***) ta có điều mâu thuẫn.

Vậy B không chia hết cho 5.

**38.** Tính: $\left[\left(45+\sqrt{1999}\right)^{1999}\right]$, trong đó: $[a]$ là ký hiệu phần nguyên của số a.

**HD:**

Ta có: $\left(45+\sqrt{1999}\right)^{1999} + \left(45-\sqrt{1999}\right)^{1999} = \sum_{k=0}^{1999} C_{1999}^{k} 1999^{\frac{k}{2}}.45^{1999-k} + \sum_{k=0}^{1999} C_{1999}^{k} (-1)^{k} 1999^{\frac{k}{2}}.45^{1999-k}$

$= 2\sum_{k=0}^{999} C_{1999}^{2k} 1999^{k}.45^{1999-2k} = 2m$ với $m \in \mathbb{N}^*$.

Mà $44 < \sqrt{1999} < 45 \Rightarrow 0 < 45 - \sqrt{1999} < 1 \Rightarrow 0 < \left(45-\sqrt{1999}\right)^{1999} < 1$

Nên $\left[\left(45+\sqrt{1999}\right)^{1999}\right] = 2m - 1$ với $m = \sum_{k=0}^{999} C_{1999}^{2k} 1999^{k}.45^{1999-2k}$.

**39.** Chứng minh rằng: $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right]$ là số lẻ với mọi số tự nhiên $n$.

**HD:**

Đặt $\begin{cases} x = 2+\sqrt{3} \\ y = 2-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của PT $X^2 + 4X + 1 = 0$.

Đặt: $S_n = x^n + y^n$.

Ta có: $S_{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} = (x+y)\left(x^n + y^n\right) - xy\left(x^{n-1} + y^{n-1}\right) = 4S_n - S_{n-1}$

Suy ra: $S_{n+1} - 4S_n + S_{n-1} = 0$.

$S_0 = 2, S_1 = 4 \Rightarrow S_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ nên $0 < \left(2-\sqrt{3}\right)^n < 1$.

Do đó: $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n - 1 < \left(2+\sqrt{3}\right)^n < \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

Suy ra: $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right] = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n - 1$ là số lẻ (vì $S_0, S_1$ chẵn nên $S_n$ chẵn).

**40.** Chứng minh rằng biểu thức $A = \left(9+4\sqrt{5}\right)^n + \left(9-4\sqrt{5}\right)^n$ nhận giá trị nguyên và không chia hết cho 17 với mọi giá trị nguyên của $n$.

**HD:**

Làm tương tự như bài **39**

**41.** Tìm $n$ nguyên dương sao cho: $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+...+\left[\sqrt[3]{n^3+2n+4}\right]=7225$.

**HD:**

Với $m\in\mathbb{N}^*$, xét $\left[\sqrt[3]{m}\right]=k \Leftrightarrow k\le\left[\sqrt[3]{m}\right]<k+1 \Leftrightarrow k^3\le m\le(k+1)^3-1$.

Suy ra: với mỗi $k$ cho trước, số các số $m$ thỏa: $\left[\sqrt[3]{m}\right]=k$ là: $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$.

Gọi tổng tương ứng của chúng là $S_k$, ta có: $S_k=k\left(3k^2+3k+1\right)=3k^3+3k^2+k$.

Do: $\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]=n-1$ ; $\left[\sqrt[3]{n^3}\right]=\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]=...=\left[\sqrt[3]{n^3+2n+4}\right]=n$ với $n\ge2$

Nên $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+...+\left[\sqrt[3]{n^3+2n+4}\right]=\sum_{k=1}^{n-1}S_k+(2n+5)n=..=\dfrac{3n^4-2n^3+7n^2+20n}{4}=7225$.

Dễ dàng tìm được: $n=10$.

**42.** Cho $p$ là số nguyên tố khác 2 và $a,b$ là hai số tự nhiên lẻ sao cho $a+b$ chia hết cho $p$ và $a-b$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng: $a^b+b^a$ chia hết cho $2p$.

**HD:**

Giả sử $a\ge b$.

Gọi $r$ là dư trong phép chia $a$ cho $p$ thì $a\equiv r\pmod p$.

Do $a+b\,\vdots\,p$ nên $b\equiv -r\pmod p$.

Suy ra: $a^b+b^a\equiv r^b-r^a\pmod p$ hay $a^b+b^a\equiv r^b\left(1-r^{a-b}\right)\pmod p$.

Mặt khác: $a-b\,\vdots\,p-1$ nên $a-b=k(p-1)$.

Vì $r$ không chia hết cho $p$ nên theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$r^{p-1}\equiv1\pmod p\Rightarrow r^{k(p-1)}\equiv1\pmod p\Rightarrow r^{a-b}\equiv1\pmod p$.

Từ đó suy ra: $a^b+b^a\equiv0\pmod p$ tức là: $a^b+b^a\,\vdots\,p$.

Ngoài ra $a^b,b^a$ là các số nguyên lẻ nên $a^b+b^a\,\vdots\,2$.

Vậy $a^b+b^a\,\vdots\,2p$.

**43.** Tìm tất cả các số hữu tỉ dương $x,y$ sao cho $x+y$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ là các số nguyên.

**HD:**

Đặt $\begin{cases}x+y=m\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=m\\ xy=\dfrac{m}{n}\end{cases}\Rightarrow x,y$ là nghiệm của PT: $nX^2-mnX+m=0$.

Ta có: $\Delta=mn(mn-4)$

- Nếu $\Delta=0\Leftrightarrow mn=4$. Giải tìm $m,n$ sau đó tìm $x,y$.
- Nếu $\Delta>0\Leftrightarrow mn>4$. Mà $(mn-3)^2<\Delta<(mn-2)^2\Rightarrow\Delta$ không là số chính phương

$\Rightarrow$ Không tồn tại $X_1,X_2\in\mathbb{Q}$.