Các đề toán số học chọn lọc

K09 & lehoan

4.2006

Giới thiệu. Các bài toán được dẫn ra dưới đây đều là các bài toán do các thành viên diễn đàn *www.diendantoanhoc.net* giới thiệu và thảo luận trong CAT Số Học thuộc BOX Toán Olympic. Các thành viên tích cực nhất trong box Số Học đó là các bạn $hoang, Mr\ Stoke$, gần đây có thêm sự xuất hiện của bạn *emvaanh*. Bản tổng hợp 50 bài toán này là do hai CTV THPT $K09$ và *lehoan* biên tập

Như các bạn sẽ thấy thứ tự của các bài toán rất *lộn xộn*, thực ra điều đó lại khiến cho nội dung của collection trở nên rất đa dạng và phong phú. Hơn nữa, đằng sau sự *lộn xộn* là những mối liên hệ rất mật thiết, điều này sẽ được thể hiện trong phần tiếp sau của tài liệu. Các bạn thành viên thân quen và cả các bạn thành viên mới đều có thể tìm thấy trong các bài toán này những điều thú vị cho riêng mình. Trong thời gian tới, hi vọng những điều tâm đắc của các bạn sẽ được chia sẻ cùng nhau trong các topic mới và bổ ích hơn

Bài toán 1. *Tìm tất cả các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với mọi phần tử của dãy*

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad n \geq 1$$

Bài toán 2. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương* $x^2 - (a^2 + b^2) \cdot y^4 = 1$

Bài toán 3. *Cho* k *số tự nhiên* $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq n$ *thỏa mãn* $[a_i, a_j] > n$ *với mọi* $1 \leq i \leq j \leq k$*. Chứng minh rằng*

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{3}{2} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{6}{5}$$

Bài toán 4. *Hãy tìm tất cả các số nguyên dương* n *sao cho tồn tại hoán vị* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *của* $\{1, 2, ..., n\}$ *thoả mãn tính chất một trong hai tập hợp sau đây*

$$(i) \quad \{a_1, a_1a_2, ..., a_1a_2...a_n\}$$
$$(ii) \quad \{a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n\}$$

lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modun n

Bài toán 5. *Tìm số nguyên dương* k *lớn nhất để tồn tại* $2k$ *số nguyên dương đôi một phân biệt* $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ *mà* k *tổng* $a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_k + b_k$ *đôi một khác nhau và nhỏ hơn* 2005

Bài toán 6. *Giả sử* p *là một số nguyên tố. Chứng minh rằng trong* $2p - 1$ *số nguyên bất kì đều tồn tại* p *số có tổng là bội số của* p*. Kết luận của bài toán thay đổi như thế nào nếu bỏ đi giả thiết* p *nguyên tố*

Bài toán 7. *Chứng minh rằng số các hợp số thuộc một trong hai dạng sau đều là vô hạn*

$$(i) \quad 2^{2^n}+1 \qquad (ii) \quad 6^{2^n}+1$$

Bài toán 8. *Giả sử a, b, c là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau sao cho đẳng thức $a^n = b^2 + c^2$ đúng với số nguyên $n > 1$ nào đó. Chứng minh rằng a có thể viết thành tổng của hai số chính phương*

Bài toán 9. *Một số tự nhiên là bập bênh nếu khi đem nó nhân với 9 ta được chính số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại của các chữ số. Chẳng hạn số 1089 là một số bập bênh có 4 chữ số bởi vì $1089.9 = 9801$. Vấn đề của chúng ta là tìm tất cả các số bập bênh có n chữ số. Hơn nữa hãy tính số tất cả các số bập bênh có n chữ số*

Bài toán 10. *Chứng minh rằng với số tự nhiên n bất kỳ đều tồn tại hai số nguyên x, y thoả mãn $n|x^2 - 34y^2 + 1$*

Bài toán 11. *Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho tồn tại số thực dương c_k thoã mãn*

$$\frac{S(kn)}{S(n)} \geq c_k \quad \forall n \in N$$

Bài toán 12. *Tìm tập giá trị của N để phương trình sau có nghiệm nguyên dương*

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = N(x_1x_2...x_n - 1)$$

Bài toán 13. *Dãy số $p_1.p_2, ..., p_n, ...$ là dãy tất cả các số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại ba số hạng liên tiếp trong dãy trên thoả mãn tính chất mỗi số trong chúng đều lớn hơn bình phương chỉ số của chính số đó*

Bài toán 14. *Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n để số $2^n + 3^n$ có đúng 23 ước số nguyên tố*

Bài toán 15. *Cho dãy tăng các số tự nhiên $\{a_n\}$ có tính chất tồn tại hằng số M sao cho $a_{n+1} - a_n < M$ với mọi $n \in N$. Chứng minh rằng tập ước số nguyên tố của dãy trên là vô hạn*

Bài toán 16. *Xét $M = n(n-1)...(n-k+1)$ với $n \geq 2k$. Chứng minh rằng M có ước số nguyên tố lớn hơn k*

Bài toán 17. *Giả sử p là một số nguyên tố có dạng $4k+3$. Chứng minh khi đó $p-1$ số tự nhiên liên tiếp không thể chia làm hai nhóm có tích các thừa số trong mỗi nhóm bằng nhau*

Bài toán 18. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sau cho $n^2 - n + 11$ là tích của bốn số nguyên tố (không cần phân biệt)*

Bài toán 19. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) với z bé nhất có thể sao cho tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d có các tính chất*

$$\begin{cases} x^y = z^b = c^d, x > a > c \\ z = ab = cd \\ x + y = a + b \end{cases}$$

Bài toán 20. *Cho các số nguyên* $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *trong đó* $a_i \geq 2\ \forall 1 = \overline{1, n}$. *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các bộ số nguyên* $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *sao cho ta có tính chất sau*

$$b_1c_1 + b_2c_2 + ...b_nc_n | c_1^{a_1} + c_2^{a_2} + ... + c_n^{a_n}$$

Bài toán 21. *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho nếu với mọi hoán vị* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *của* $\{1, 2, ..., n\}$ *thì ta luôn tìm được chỉ số i mà* $a_1 + a_2 + ... + a_i$ *là một số chính phương*

Bài toán 22. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho* $n^3 - 1$ *là số chính phương*

Bài toán 23. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương s luôn tồn tại số tự nhiên n thoả mãn* $S(ns) = a$ *với* $S(x)$ *là tổng các chữ số của x*

Bài toán 24. *Cho số nguyên dương* $n > 1$. *Tìm số nguyên dương nhỏ nhất không có dạng* $\dfrac{n^a - n^b}{n^c - n^d}$ *với bất kỳ các số nguyên dương* a, b, c, d *nào đó*

Bài toán 25. *Cho số nguyên không âm a và số nguyên dương d. Chứng minh rằng trong* 73 *số* $a, a + d, ..., a + 72d$ *có ít nhất một số mà trong biểu diễn thập phân của nó có chữ số* 9

Bài toán 26. *Chứng minh rằng với mọi số thực* $\delta \in [0, 1]$ *và với mọi* $\varepsilon > 0$ *bất đẳng thức*

$$\left| \frac{\varphi(n)}{n} - \delta \right| < \varepsilon$$

đúng với số tự nhiên n nào đó

Bài toán 27. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$$

Với các giá trị tự nhiên của $a_1, a_2, ..., a_n$ *biết rằng* $S < 1$

Bài toán 28. *Cho số nguyên tố* $p = 4k + 1$. *Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho số* $[n.\sqrt{p}]$ *là một số chính phương*

Bài toán 29. *Tìm tất cả các số nguyên dương m và n sao cho với mọi số dương a thoả mãn* a^m, a^n *là các số nguyên thì suy ra a cũng là số nguyên*

Bài toán 30. *Cho trước số nguyên dương N. Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho với các số nguyên* a, b, c, d *tuỳ ý mà* $N^2 \leq a < b \leq c < d \leq N^2 + k$ *thì* $ad \neq bc$

Bài toán 31. *Tìm mọi nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$t^2 = 4zyz - x - y$$

Bài toán 32. *Giả sử A là tập hợp N thặng dư mod* N^2. *Chứng minh rằng tồn tại tập hợp B gồm N thặng dư mod* N^2 *thoả mãn tập hợp*

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

chứa ít nhất một nửa hệ thặng dư mod N^2

Bài toán 33. *Cho số tự nhiên $n > 2$. Chứng minh rằng*

$$1989 | n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

Bài toán 34. *Sắp xếp dãy các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần $p_1, p_2, \ldots$. Chứng minh rằng*

$$\frac{p_n!}{p_n(p_n+1)(p_n+2)...(p_{n+1}-1)} \in Z \quad \forall n \in N \quad n > 2$$

Bài toán 35. *Giả sử S là tập hợp tất cả các số nguyên tố bé hơn 40. Tìm số k nhỏ nhất sao cho với mọi tập con k phần tử của S đều tồn tại 3 phần tử đôi một phân biệt a, b, c sao cho $a + b + c$ cũng là một số nguyên tố*

Bài toán 36. *Số nguyên dương n được gọi là đáng ghét nếu tồn tại số nguyên dương m mà trong tập hợp $\{1, 2, ..., 28011980\}$ có đúng n số $x_1 < x_2 < ... < x_n$ không đồng dư với nhau theo mod n. Nếu điều này không xảy ra thì n được gọi là đáng yêu. Xác định số nguyên dương đáng yêu bé nhất*

Bài toán 37. *Cho các số nguyên dương a, b. Chứng minh rằng tồn tại bộ số nguyên dương $(n_1, n_2, .., n_k)$ thoả mãn tính chất $n_i + n_{i+1} | n_i n_{i+1}$ $\forall i = \overline{0, k}$ trong đó quy ước $n_0 = a, n_{k+1} = b$*

Bài toán 38. *Chứng minh rằng mọi số nguyên lớn hơn 17 đều có thể biểu diễn thành tổng của 3 số nguyên lớn hơn 1 đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh tính chất đó không đúng với 17*

Bài toán 39. *Cho số nguyên tố $p \geq 3$ và $a_1, a_2, ..., a_{p-2}$ là các số tự nhiên sao cho p không chia hết a_k và $a_k^k - 1$ với mọi k. Chứng minh rằng có thể chọn ra một số để tích các số đó có số dư là 2 khi chia cho p*

Bài toán 40. *Với số nguyên dương n gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n. Chứng minh rằng tồn tại k số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_k$ sao cho*

$$a_n + S(n) = a_m + S(m) \quad \forall \;\; 1 \leq n, m \leq k$$

Bài toán 41. *Chứng minh rằng phương trình $x^3 + y^3 + z^3 - t^3 = 42$ có vô hạn nghiệm nguyên. Số nghiệm nguyên dương của phương trình này là bao nhiêu, hữu hạn hay vô hạn*

Bài toán 42. *Giả sử n, a, b, c, d là các số tự nhiên $(n \geq 2)$ thoả mãn $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$ và $a + c < n$. Cố định n, tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$*

Bài toán 43. *Tập hợp S gồm $k + m - 1$ số nguyên bất kỳ, $m \geq k \geq 2, k|m$. Chứng minh rằng tồn tại m số trong các số đó có tổng chia hết cho k*

Bài toán 44. *Giả sử rằng biểu diễn thập phân của $\sqrt{5}$ có dạng*

$$\sqrt{5} = \overline{2, a_1 a_2 ... a_n \underbrace{bbb...bbb}_{m \text{ số } b} a_{n+1} ...}$$

Biết rằng $b \neq a_n, b \neq a_{n+1}$. Chứng minh rằng $n \geq m - 2$

Bài toán 45 (Open Question). *Giả sử P là một tập con khác rỗng của tập các số nguyên tố sao cho với mọi $p_1, p_2, ..., p_k \in P$ (không nhất thiết phân biệt) thì mọi ước số nguyên tố của số $p_1p_2...p_k + 1$ cũng thuộc vào P. Hỏi tập hợp P có trùng với tập hợp tất cả các số nguyên tố hay không*

Bài toán 46. *Tìm tất cả các hàm số $f : Z \to Z$ thoả mãn đẳng thức*

$$f(x^3) + f(y^3) + f(z^3) = (f(x))^3 + (f(y))^3 + (f(z))^3 \quad \forall x, y, z \in Z$$

Bài toán 47. *Giả sử m là một số nguyên dương lớn hơn 1 cho trước. Tìm hằng số C lớn nhất sao cho*

$$\sum_{1 \le k \le n, (k,m)=1} \frac{1}{k} \ge C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \forall n \in N$$

Bài toán 48. *Chứng minh hai mệnh dề sau đây*

i) Nếu $n > 49$ thì tồn tại hai số nguyên $a, b > 1$ sao cho $a + b = n$ và

$$\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(b)}{b} < 1$$

ii) Nếu $n > 4$ thì tồn tại hai số nguyên $a, b > 1$ sao cho $a + b = n$ và

$$\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(b)}{b} > 1$$

Bài toán 49. *Với mỗi số tự nhiên $n = \overline{a_t...a_2a_1}$ xét hàm số*

$$T(n) = 10 \sum_{i \text{ chẵn}} a_i + \sum_{i \text{ lẻ}} a_i$$

Hãy tìm số nguyên dương A nhỏ nhất sao cho tồn tại các số tự nhiên $n_1, n_2, .., n_{148}$ và $m_1, m_2, ..., m_{149}$ thoả mãn hai điều kiện

$$\begin{cases} A = n_1 + n_2 + ... + n_{148} = m_1 + m_2 + ...m_{149} \\ T(n_1) = T(n_2) = ... = T(n_{148}) \\ T(m_1) = T(m_2) = ... = T(m_{149}) \end{cases}$$

Bài toán 50. *Ký hiệu $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n và $\pi(n)$ là số các số nguyên tố không vượt quá n. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ ta có*

$$\varphi(n) \ge \frac{\pi(n)}{2}$$

K09
lehoan
www.diendantoanhoc.net
Trần Quốc Hoàn K50 CA Đại Học Công Nghệ Hà Nội
Lê Hồng Quý lớp 12 khối phổ thông chuyên Toán Đại Học Vinh tỉnh Nghệ An