Chuyên đề 20. PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG

I. PHẦN NGUYÊN

1. Định nghĩa

Phần nguyên của số thực a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a, kí hiệu là $[a]$. Ta có $[a] \le a < [a] + 1$.

Phần lẻ của số thực a là hiệu của a với phần nguyên của nó, kí hiệu là $\{a\}$.

Ta có $\{a\} = a - [a]$, $0 \le \{a\} < 1$.

Ví dụ. $[5{,}3] = 5$; $[-5{,}3] = -6$; $[2012] = 2012$;

$\{5{,}3\} = 5{,}3 - 5 = 0{,}3$; $\{-5{,}3\} = -5{,}3 - (-6) = 0{,}7$;

$\{2012\} = 2012 - 2012 = 0$.

2. Tính chất

1) $a \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow [a] = a$ hoặc $\{a\} = 0$.

2) $n \in \mathbf{Z}$ và $n \le a < n + 1 \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow [a] = n$.

3) $[\{a\}] = \{[a]\} = 0$.

4) Nếu $n \in \mathbf{Z}$ thì $[n + a] = n + [a]$; $\{n + a\} = \{a\}$.

5) Nếu $[n + a] = n$ thì $n \in \mathbf{Z}$ và $0 \le a < 1$.

6) $a \ge b \Rightarrow [a] \ge [b]$.

7) $[a] + [b] \le [a + b]$.

Tổng quát $[a_1] + [a_2] + \ldots + [a_n] \le [a_1 + a_2 + \ldots + a_n]$.

8) $[a] - [b] \ge [a - b]$.

9) $\{a\} + \{b\} \ge \{a + b\}$; $\{a\} - \{b\} \le \{a - b\}$.

10) Nếu $[a] = [b]$ thì $|a - b| < 1$.

11) $[a] + \left[a + \dfrac{1}{2}\right] = [2a]$.

12) Nếu $n \in \mathbf{N}^*$ thì $[na] \ge n[a]$; $\left[\dfrac{[a]}{n}\right] = \left[\dfrac{a}{n}\right]$.

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -[a]$;

Nếu a không là số nguyên thì $[-a] = -[a] - 1$;

Chứng minh

Các tính chất từ 1) đến 5) có thể chứng minh dễ dàng trên dựa vào định nghĩa phần nguyên.

6) Vì $a \ge b$ nên tồn tại số $c \ge 0$ sao cho $a = b + c$. Do đó $a = [b] + \{b\} + c$, suy ra

$$[a] = [b] + [\{b\} + c]. \text{ Mà } [\{b\} + c] \ge 0 \text{ nên } [a] \ge [b].$$

7) Viết $a = [a] + \{a\}$, $b = [b] + \{b\}$. Khi đó

$$[a + b] = [[a] + \{a\} + [b] + \{b\}] = [a] + [b] + [\{a\} + \{b\}].$$

Mà $[\{a\} + \{b\}] \ge 0$ nên

$$[a + b] \ge [a] + [b].$$

8) Áp dụng tính chất 7 ta có

$$[a - b] + [b] \le [a - b + b] = [a] \text{ nên } [a] - [b] \ge [a - b].$$

9) $\{a\} - \{b\} = a - [a] + b - [b] = (a + b) - ([a] + [b]) \ge a + b - [a + b]$

$$= \{a + b\}.$$

Vậy $\{a\} - \{b\} \ge \{a - b\}$.

10) Từ $[a] = [b]$ suy ra $a - \{a\} = b - \{b\}$. Không giảm tổng quát, giả sử $a \ge b$.

Nếu $a = b$ thì $|a - b| = 0$;

Nếu $a > b$ thì từ $a - b = \{a\} - \{b\} \le \{a - b\}$

suy ra $|a - b| = a - b \le \{a - b\} < 1$.

Vậy luôn có $0 \le |a - b| < 1$.

11) Đặt $\{a\} = d$ thì $0 \le d < 1$.

- Nếu $0 \le d < \frac{1}{2}$ thì $\left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[[a] + d + \frac{1}{2}\right] = [a] + \left[d + \frac{1}{2}\right] = [a]$;

$[2a] = [2([a] + d)] = 2[a] + [2d] = 2[a]$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Nếu $\frac{1}{2} \le d < 1$ thì $\left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[[a] + d + \frac{1}{2}\right] = [a] + \left[d + \frac{1}{2}\right] = [a] + 1$;

$[2a] = [2([a] + d] = 2[a] + [2d] = 2[a] + 1$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

12) Ta có

$$[na] = [n([a] + \{a\})] = n[a] + [n\{a\}]\text{, mà } [n\{a\}] \geq 0 \text{ nên } [na] \geq n[a].$$

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \left[\frac{[a]}{n} + \frac{\{a\}}{n}\right] = \left[\frac{[a]}{n}\right].$$

14) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -a = -[a]$.

Nếu a không nguyên thì $0 < \{a\} < 1$, nên $-1 < -\{a\} < 0$, suy ra $[-\{a\}] = -1$.

Ta có $[-a] = [-([a] + \{a\})] = [-[a]] + [-\{a\}] = -[a] - 1$.

II. ỨNG DỤNG

1. Chứng minh một số bài toán về số học

Ví dụ 20.1. Cho $a > 0$ và số n nguyên dương. Chứng minh rằng số các số nguyên dương là bội số của n và không vượt quá a là $\left[\frac{a}{n}\right]$.

Giải.

Ta viết $a = nq + r$, trong đó q là số tự nhiên, $0 \leq r < n$.

Rõ ràng các bội số của n không vượt quá a là n, 2n, …, qn, tổng cộng có q số.

Mặt khác $\left[\frac{a}{n}\right] = q$. Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Ví dụ 20.2. Số 2012! có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

Giải.

Vì 10 = 2.5 nên để biết 2012! có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0, ta cần phải tính số mũ của 5 khi phân tích 2012! ra thừa số nguyên tố.

Theo kết quả ở Ví dụ 20.1, số mũ của 5 khi phân tích 2012! ra thừa số nguyên tố bằng

$$\left[\frac{2012}{5}\right] + \left[\frac{2012}{5^2}\right] + \left[\frac{2012}{5^3}\right] + \left[\frac{2012}{5^4}\right] = 402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

(Do $2012 < 5^5$).

Số mũ của 2 khi phân tích 2012! Ra thừa số nguyên tố nhiều hơn 501.

Vậy 2012! Có tận cùng là 501 chữ số 0.

Nhận xét. Nếu $5^k \le n < 5^{k+1}$ thì số chữ số 0 tận cùng về bên phải của số n! bằng

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{5^k}\right].$$

Ví dụ 20.3. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k.

Giải.

Ta có $2012 = 2^2.503$.

Số mũ cao nhất của 503 có trong 2011! là

$$\left[\frac{2011}{503}\right] = 3 \quad (\text{do } 2011 < 503^2).$$

Vậy 2011 ! chia hết cho 503^3 và không chia hết cho 503^4, hiển nhiên 2011! chia hết cho 4^3. Do vậy 2011! chia hết cho 2012^3 và không chia hết cho 2012^4.

Muốn cho $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k thì $k \le 3.2012 = 6036$.

Vậy maxk = 6036.

Ví dụ 20.4. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\frac{n}{2010}\right]=\left[\frac{n}{2011}\right]=\left[\frac{n}{2012}\right]. \qquad (1)$$

Giải.

Viết $n = 2010k + r$ ($0 \le r \le 2009$, k, r là các số tự nhiên). Thay vào (1) ta có

$$\left[\frac{2010k+r}{2010}\right]=\left[\frac{2011k+r-k}{2011}\right]=\left[\frac{2012k+r-2k}{2012}\right]$$

$$\Leftrightarrow k = k+\left[\frac{r-k}{2011}\right]=k+\left[\frac{r-2k}{2012}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{r-k}{2011}\right]=\left[\frac{r-2k}{2012}\right]=0.$$

Suy ra $0 \le r-2k$ nên $2k \le r \le 2009$, $0 \le k \le 1004$.

Vậy $n = 2010k + r$ ($0 \le k \le 1004$; $2k \le r \le 2009$).

Do có 1005 giá trị của k (từ 0 đến 1004). Với mỗi k thì r nhận các giá trị từ 2k đến 2009. Vậy số nghiệm tự nhiên n của (1) là

$$\sum_{k=0}^{1004}(2010-2k) = 1011030.$$

Ví dụ 20.5. Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho

$\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt{x^2-1}\right]$ là số nguyên tố.

Giải.

Nhận xét

$$\left[\sqrt{n^2}\right] = \left[\sqrt{n^2+1}\right] = \ldots = \left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right] = n, n \in \mathbf{N}.$$

Đặt $S_n = \left[\sqrt{n^2}\right] + \left[\sqrt{n^2+1}\right] + \ldots + \left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right] = (2n+1)n. = 2n^2 + n.$

Do đó $y = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt{x^2-1}\right] = S_1 + S_2 + \ldots + S_{x-1}$

$$= \frac{x(4x^2-3x-1)}{6}.$$

Nên $6y = x(4x^2 - 3x - 1)$, suy ra $6y \,\vdots\, x$, mà x, y là các số nguyên tố suy ra

$$x \in \{2 ; 3 ; y\}.$$

Nếu x = 2 thì y = 3 (thoả mãn); nếu x = 3 thì y = 13 (thoả mãn) ; nếu x = y thì $y = -1$ hoặc $y = \frac{7}{4}$ (loại).

Vậy bài toán có hai nghiệm x = 2 và x = 3.

2. Giải phương trình có chứa dấu phần nguyên

1. Dạng 1. $[f(x)] = a$ $(a \in \mathbf{Z})$

Phương pháp: $[f(x)] = a$ $(a \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow a \le f(x) < a + 1.$

Ví dụ 20.6. Giải phương trình

$$[x]^2 - 3[x] + 2 = 0.$$

Giải.

Đặt $[x] = y$ $(y \in \mathbf{Z})$, phương trình có dạng

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ hoặc } y = 2.$$

Nếu y = 1 thì $[x] = 1 \Leftrightarrow 1 \le x < 2$

Nếu y = 2 thì $[x] = 4 \Leftrightarrow 2 \le x < 3.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là [1 ; 3).

Ví dụ 20.7. Giải phương trình

$$[x^2+5]^2 - 9[x^2+7] = -26.$$

Giải.

Do $[x^2+7] = [x^2+5]+2$. Đặt $y = [x^2+5]$, với $y \in \mathbf{Z}$ và $y \geq 5$.

Ta có $y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ (loại do $y \geq 5$) hoặc $y = 8$.

Với $y = 8$ thì $[x^2+5] = 8 \Leftrightarrow 8 \leq x^2 + 5 < 9 \Leftrightarrow 3 \leq x^2 < 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq x < 2 \text{ hoặc } -2 < x \leq -\sqrt{3}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left(-2; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,; 2\right)$.

2. Dạng 2. [f(x)] = g(x)

Phương pháp : Đặt $g(x) = t$ (t nguyên), biểu diễn $f(x) = h(t)$ đưa về phương trình

$$[h(t)] = t \Leftrightarrow t \leq h(t) < t+1 \text{ hay } 0 \leq h(t) - t < 1.$$

Tìm t, sau đó từ $g(x) = t$ tìm ra x.

Ví dụ 20.8. Giải phương trình

$$\left[\frac{4-3x}{5}\right] = \frac{5x-5}{7}.$$

Giải.

Đặt $\dfrac{5x-5}{7} = t$ $(t \in \mathbf{Z})$ thì $x = \dfrac{7t+5}{5}$; $\dfrac{4-3x}{5} = \dfrac{5-21t}{25}$.

Ta có

$$\left[\frac{5-21t}{25}\right] = t \Leftrightarrow t \leq \frac{5-21t}{25} < t+1$$

$$\Leftrightarrow 25t \leq 5-21t \leq 25t+25 \Leftrightarrow \frac{-20}{46} < t \leq \frac{5}{46}.$$

Do t nguyên nên $t = 0$. Suy ra $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 20.9. Giải phương trình

$$x^2 - 9[x] + 8 = 0.$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng $[x] = \dfrac{x^2 + 8}{9}$.

Đặt $\dfrac{x^2+8}{9} = t$ $(t \in \mathbf{N}^*)$ thì $x = \sqrt{9t-8}$ (do $x > 0$). Ta có

$\left[\sqrt{9t-8}\,\right] = t \Leftrightarrow t \le \sqrt{9t-8} < t+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 9t + 8 \le 0 \\ t^2 - 7t + 9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le t \le 8 \\ t \le \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } t \ge \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Do t là số tự nhiên nên $t \in \{1;6;\ 7;\ 8\}$. Do đó $x \in \{1; \sqrt{46}; \sqrt{55}\ ;\ 8\}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1\ ; \sqrt{46}; \sqrt{55}\ ;\ 8\}$.

Ví dụ 20.10. Giải phương trình

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}.$$

Giải.

Áp dụng tính chất 11) $[a] + \left[a + \dfrac{1}{2}\right] = [2a]$, ta có

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{2x-1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{4x-2}{3}\right]$$

nên phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{4x-2}{3}\right] = \frac{5x-4}{3}.$$

Đặt $\dfrac{5x-4}{3} = t$ $(t \in \mathbf{Z})$ thì $x = \dfrac{3t+4}{5}$; $\dfrac{4x-2}{3} = \dfrac{4t+2}{5}$. Suy ra

$$\left[\frac{4t+2}{5}\right] = t \Leftrightarrow 0 \le \frac{4t+2}{5} - t < 1 \Leftrightarrow -3 < t \le 2 \Leftrightarrow t \in \{-2;-1;0;1;2\}$$

(do t nguyên), tương ứng tìm được $x \in \left\{\dfrac{-2}{5}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{4}{5}\ ;\ \dfrac{7}{5}\ ; 2\right\}$.

3. Dạng 3. $[f(x)] = [g(x)]$

Phương pháp : Đặt $[f(x)] = [g(x)] = t$ suy ra $|f(x) - g(x)| < 1$, dẫn đến $a < x < b$.

Với $a < x < b$ suy ra $\begin{cases} a_1 < f(x) < b_1 \\ a_2 < g(x) < b_2 \end{cases}$, từ đó tìm được t.

Ứng với mỗi giá trị của t nguyên, giải hệ $\begin{cases} [f(x)] = t \\ [g(x)] = t \end{cases}$ để tìm x.

Tập hợp các giá trị x tìm được từ hệ trên sẽ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 20.11. Giải phương trình

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right].$$

Giải.

Đặt $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right] = t \ (t \in \mathbf{Z})$. Theo tính chất 10) ta có

$\left|\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-5}{6} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 11$. Khi đó

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x+1}{2} < 6 \\ -1 < \dfrac{2x-1}{3} < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \left[\dfrac{x+1}{2}\right] \le 5 \\ -1 \le \left[\dfrac{2x-1}{3}\right] \le 6 \end{cases}.$$ Suy ra $t \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

Với $t = 0$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{2x-1}{3} < 1 \\ 0 \le \dfrac{x+1}{2} < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x < 2 \\ -1 \le x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 1.$$

Với $t = 1$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le \dfrac{2x-1}{3} < 2 \\ 1 \le \dfrac{x+1}{2} < 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x < \dfrac{7}{2} \\ 1 \le x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 3.$$

Với t = 2 thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le \frac{2x-1}{3} < 3 \\ 2 \le \frac{x+1}{2} < 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2} \le x < 5 \\ 3 \le x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \le x < 5.$$

Với t = 3 thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le \frac{2x-1}{3} < 4 \\ 3 \le \frac{x+1}{2} < 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le x < \frac{11}{2} \\ 5 \le x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x < \frac{11}{2}.$$

Với t = 4 thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le \frac{2x-1}{3} < 5 \\ 4 \le \frac{x+1}{2} < 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{2} \le x < 8 \\ 7 \le x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \le x < 8.$$

Với t = 5 thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le \frac{2x-1}{3} < 6 \\ 5 \le \frac{x+1}{2} < 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 \le x < \frac{19}{2} \\ 9 \le x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow 9 \le x < \frac{19}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[0,5\,;\,1) \cup [2\,;\,3) \cup [3,5\,;\,5,5] \cup [7\,;\,8) \cup [9\,;\,9,5)$.

4. Dạng 4. Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên

Phương pháp : Sử dụng tính chất của phần nguyên, phân tích đa thức thành nhân tử, đặt ẩn phụ (nếu cần) để đưa về các dạng 1, 2, 3.

Ví dụ 20.12. Giải phương trình

$$[x] + [2x] + [3x] + ... + [2009x] = 4036082.$$

Giải.

Nhận xét rằng

$[x] \le x < [x] + 1$ suy ra $k[x] \le kx < k[x] + k$ nên $k[x] \le [kx] \le k[x] + k - 1$ $(k \in \mathbf{Z}^+)$.

Do đó thay $k = 1, 2, ..., 2009$ rồi cộng theo vế ta có

$$2019045\,[x] \le [x] + [2x] + ... + [2009x] \le 2019045[x] + 2017036.$$

$$2019045\,[x] \le 4036082 \le 2019045[x] + 2017036.$$

Lại có $4036082 = 2019045 + 2017037$. Do đó phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 20.13. Giải phương trình

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] - \left[x^2\right] = \left[-x^2\right].$$

Giải.

Áp dụng tính chất 13) ta có

$$\left[-x^2\right] = \begin{cases} -\left[x^2\right] \text{ khi } x^2 \in \mathbf{Z} \\ -\left[x^2\right] - 1 \text{ khi } x^2 \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

• Nếu x^2 là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 2.$$

Mà x^2 là số nguyên nên $x \in \left\{1\,;\,\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}\right\}$.

• Nếu x^2 không là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] = -1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3} + 1 < 1 \Leftrightarrow -1 \le x < \frac{1}{2}.$$

Mà x^2 không nguyên nên phải loại $x = -1$, $x = 0$ và $x = \sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(-1\,;\,0) \cup \left(0\,;\,\frac{1}{2}\right) \cup \left\{1\,;\,\sqrt{3}\right\}$.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA DẤU PHẦN NGUYÊN

Khi giải bất phương trình có chứa dấu phần nguyên, ta thường đặt biểu thức $[f(x)] = t$ (t nguyên) để chuyển về giải bất phương trình không còn chứa dấu phần nguyên, rồi vận dụng định nghĩa và tính chất của phần nguyên để tìm ra nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 20.14. Giải bất phương trình

$$[x + 2] > 5.$$

Giải.

Cách 1. Nhận xét rằng $[a] > b$ (b nguyên) khi và chỉ khi $a \geq b + 1$.

Ta có $[x + 2] > 5$ khi và chỉ khi $x + 2 \geq 6$. Do đó $x \geq 4$.

Cách 2. Đặt $[x + 2] = t$ (t là số nguyên) thì có $t > 5$. Do vậy $t \in \{6; 7\,; 8; ...\}$.

Từ $[x + 2] = t$ suy ra $t \leq x + 2 < t + 1$, suy ra $t - 2 \leq x < t - 1$, $t \in \{6; 7\,; 8; ...\}$.

Vậy $x \geq 4$. Bất phương trình có vô số nghiệm $x \geq 4$.

Ví dụ 20.15. Giải bất phương trình

$$2[x]^2 - 9[x + 1] + 16 < 0.$$

Giải.

Áp dụng tính chất 4) ta có $[x + 1] = [x] + 1$. Biến đổi bất phương trình thành

$$2[x]^2 - 9[x] + 7 < 0.$$

Đặt $[x] = t$ (t là số nguyên) thì có $2t^2 - 9t + 7 < 0$ suy ra $1 < t < 3{,}5$ mà t nguyên nên $t \in \{2\,;\,3\}$.

Với $t = 2$ thì $[x] = 2$ suy ra $2 \leq x < 3$.

Với $t = 3$ thì $[x] = 3$ suy ra $3 \leq x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2\,;\,4)$.

Ví dụ 20.16. Giải bất phương trình

$$[2x] > [x].$$

Giải.

Cách 1. Đặt $[x] = t$ (t là số nguyên) thì $t \le x < t + 1$ suy ra $2t \le 2x < 2t + 2$.

Do đó $[2x] = 2t$ hoặc $2t + 1$.

• Với $[2x] = 2t$ thì $0 \le \{x\} < 0{,}5$ và $2t > t \Leftrightarrow t > 0$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x \ge 1$.

• Với $[2x] = 2t + 1$ thì $0{,}5 \le \{x\} < 1$ ta có $2t + 1 > t \Leftrightarrow t > -1$, mà t nguyên nên t là số tự nhiên. Dẫn đến $x \ge 0$.

Kết hợp với $0{,}5 \le \{x\} < 1$ dẫn đến $x \ge 0{,}5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge 0{,}5$.

Cách 2. Nhận xét rằng $[a] > [b]$ khi và chỉ khi $a > b$ và $[a] \ne [b]$.

Ta có $[2x] > [x] \Leftrightarrow 2x > x$ và $[2x] \ne [x] \Leftrightarrow x > 0$ và $[2x] \ne [x]$.

Trước hết ta tìm x sao cho $[2x] = [x]$.

Đặt $[2x] = [x] = t$ (t nguyên) ta có

$|2x - x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ suy ra $0 < x < 1$ nên $[x] = 0$.

Với $t = 0$ thì $[x] = [2x] = 0$ suy ra $0 \le 2x < 1$ nên $0 \le x < 0{,}5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge 0{,}5$.

BÀI TẬP

20.1. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho $(100!)^k$ chia hết cho 10^{100}.

20.2. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \dots + \left[\sqrt[3]{x^3 - 1}\right] = 400.$$

20.3. Giải phương trình

$$x[x] + 3x - \{x\} + 2 = 0.$$

20.4. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 8[x] + 7 = 0$;

b) $\left[\dfrac{1-x}{2}\right] + \left[1 - \dfrac{x}{2}\right] = \dfrac{1-3x}{8}$.

20.5. Giải phương trình

$$20\left(x+37-\left[\frac{x+37}{3}\right]\right)=x.$$

20.6. Giải phương trình

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2012}\right]+....+\left[x+\frac{2011}{2012}\right]=2x+1005.$$

20.7. Giải các bất phương trình

a) $\left[\frac{2x-5}{9}\right]<10$;

b) $\left[\frac{3x-5}{7}\right]>x$;

c) $\left[\frac{2x+1}{2}\right]+[x+1]\leq\frac{6x+5}{2}$;

d) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]+\left[4x+\frac{1}{2}\right]+\left[8x+\frac{1}{2}\right]\geq 100,1.$