Phép chia hết

1.1 Đồng dư theo mô đun

Bài toán 1. Chứng minh rằng $a \equiv b \pmod m$ khi và chỉ khi $a - b$ chia hết m.

Bài toán 2. Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$, thì $a + c \equiv b + d \pmod m$.

Bài toán 3. Nếu $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, thì $a - c \equiv b - d \pmod m$.

Bài toán 4. Nếu $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, thì $ac \equiv bd \pmod m$.

Bài toán 5. Nếu $a \equiv b \pmod m$, n – số tự nhiên, thì $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Bài toán 6. Chứng minh rằng $n^2 + 1$ không chia hết cho 3 với bất cứ một số nguyên n nào.

Bài toán 7. Hãy tìm số dư của phép chia 6^{100} cho 7.

Bài toán 8. Chứng minh rằng $30^{99} + 61^{100}$ chia hết cho 31.

Bài toán 9. Chứng minh rằng
a) $43^{101} + 23^{101}$ chia hết cho 66.
б) $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$, nếu n – số lẻ.

Bài toán 10. Chứng minh rằng $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ chia hết cho n với n là số chẵn.

Bài toán 11. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số tự nhiên, không biểu diễn thành tổng của ba số lập phương.

Bài toán 12. Chứng minh rằng mọi số có dạng 10^{3n+1} không thể biểu dưới dạng tổng của hai số tự nhiên lập phương.

Bài toán 13. Chứng minh rằng trong 51 số nguyên tìm được hai số, bình phương của chúng cho cùng một số dư khi chia chúng cho 100.

Bài toán 14. Ta gọi số tự nhiên n là thuận tiện, nếu $n^2 + 1$ chia hết cho 1000001. Chứng minh rằng giữa các số 1, 2, …, 1000000 có số chẵn số thuận tiện.

Bài toán 15. a) Có thể bình phương một số tự nhiên có chữ số tận cùng là 2?
б) Có thể chỉ dùng các chữ số 2, 3, 7, 8 (có thể dùng một số lần cho một chữ số), để tạo ra một số tự nhiên chính phương?

Bài toán 16. Một số nào có thể cộng vào số $(n^2 - 1)^{1000} \cdot (n^2 + 1)^{1001}$, để kết quả chia hết cho n?

Bài toán 17. Hãy tìm số dư của phép chia số $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \ldots + 10^{10000000000}$ cho 7.

Bài toán 18. Tồn tại bao nhiêu số tự nhiên n, nhỏ hơn 10000, mà với chúng $2^n - n^2$ chia hết cho 7?

Bài toán 19. Ta kí hiệu k là tích của một vài số nguyên tố đầu tiên (lớn hơn một). Chứng minh rằng số a) k – 1; б) k + 1 không phải là số chính phương.

Bài toán 20. Có tồn tại không một số tự nhiên n, sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1955?

Bài toán 21. Chứng minh rằng $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 với số tự nhiên bất kì n.

Bài toán 22. Cho n – số tự nhiên sao cho n + 1 chia hết cho 24. Chứng minh rằng tổng của tất cả ước số tự nhiên của n chia hết cho 24.

Bài toán 23. Dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ những số tự nhiên sao cho $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ với mọi n.
a) $a_1 = a_2 = 1$. Chứng minh rằng không có một số hạng nào không chia hết cho 4.
б) Chứng minh rằng $a_n - 22$ là hợp số với mọi n > 10.

1. 2. Ghi hệ số thập phân và những dấu hiệu chia hết

Bài toán 24. Chứng minh rằng số tự nhiên bất kì lấy đồng dư với chữ số cuối cùng của nó theo mô đun a) 10; б) 2; в) 5.

Bài toán 25. Chứng minh rằng $\underline{a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n} = \underline{a_{n-1}a_n}$ (mod 4).

Bài toán 26. Hãy phát biểu và chứng minh tiêu chuẩn chia hết của một số cho 2^n và 5^n.

Bài toán 27. Chữ số cuối cùng của bình phương một số tự nhiên là 6. Chứng minh rằng chữ số trước chữ số cuối cùng là một số lẻ.

Bài toán 28. Chữ số trước chữ số cuối cùng của một số tự nhiên bình phương là số lẻ. Chứng minh rằng chữ số cuối cùng của nó là 6.

Bài toán 29. Chứng minh rằng lũy thừa của 2 không thể có bốn chữ số cuối cùng có cùng một chữ số giống nhau.

Bài toán 30. Hãy tìm một số có 100 chữ số không có số không mà nó chia hết cho tổng các chữ số của nó.

Bài toán 31. Chứng minh rằng số tự nhiên bất kì đều đồng dư với tổng các chữ số của nó theo mô đun a) 3; б) 9.

Bài toán 32. Có thể viết một số chính phương bằng cách dùng 10 lần các chữa số a) 2, 3, 6; б) 1, 2, 3 ?

Bài toán 33. Trong cơ số 10 của số 2^{100} tính tổng các chữ số, kết quả tìm được lại tính tổng các chữ số của nó và vân vân. Cuối cùng ta nhận được một số có một chữ số. Hãy tìm số này.

Bài toán 34. Chứng minh rằng nếu viết ngược thứ tự của các chữ số của một số tự nhiên bất kì, thì hiệu của số ban đầu và số vừa tạo ra sẽ chia hết cho 9.

Bài toán 35. Viết thêm vào số 15 ở phía bên phải và phía bên trái một chữ số sao cho số nhận được chia hết cho 15.

Bài toán 36. Có bao nhiêu chữ số có bốn chữ số mà chúng chia hết cho 45, mà hai chữ số ở giữa nó là số 97?

Bài toán 37. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà nó chia hết cho 36, trong các viết của nó bắt gặp tất cả mười chữ số.

Bài toán 38. Chứng minh rằng tích của chữ số cuối cungùng của số 2^n và tổng tất cả các chữ số của số này trừ số cuối cùng, chia hết cho 3.

Bài toán 39. Có thể có tổng các chữ số của một số chính phương bằng 1970 không?

Bài toán 40. Từ các số có ba chữ số tính tổng các chữ số của nó. Từ số nhận được chia hết cho chính nó và hơn nữa chia hết 100 lần. Chứng minh rằng trong kết quả nhận được bằng.

Bài toán 41. Cho A là tổng của các chữ số số 4444^{4444}, còn B là tổng các chữ số của số A. Hãy tìm tổng các chữ số của số B.

Bài toán 42. Chứng minh rằng
$\underline{a_1a_2...a_n} \equiv a_n - a_n + ... + (-1)^{n-1} a_1 \pmod{11}$

Bài toán 43. Chứng minh rằng число 111 … 11 (2n số 1) là hợp số.

Bài toán 44. Chứng minh rằng số $\underline{a_1a_2 ... a_na_n ...a_2a_1}$ là hợp số.

Bài toán 45. Cho a, b, c, d – các chữ số khác nhau. Chứng minh rằng $\underline{cdcdcdcd}$ không chia hết cho $\underline{aabb}$.

Bài toán 46. A là một số có sáu chữ số, trong cách viết của nó bắt gặp mỗi chữ số sau một lần 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chứng minh rằng A không chia hết cho 11.

Bài toán 47. Chứng minh rằng hiệu một số có số lượng các chữ số chẵn và một số bằng cách viết ngược lại thứ tự chữ số trong số này, chia hết cho 99.

Bài toán 48. Có thể tạo từ những chữ số 2, 3, 4, 9 (mỗi số có thể viết lặp lại một số lần) thành hai số, một số trong chúng bằng 19 lần số còn lại?

Bài toán 49. Tổng hai chữ số a và b chia hết cho 7. Chứng minh rằng số $\underline{aba}$ cũng chia hết cho 7.

Bài toán 50. Tổng các chữ số của một số có ba chữ số bằng 7. Chứng minh rằng số này chia hết cho 7 khi và chỉ khi hai chữ số cuối cùng của nó bằng nhau.

Bài toán 51. a) Cho số có 6 chữ số $\underline{abcdef}$, hơn nữa $\underline{def}$ - $\underline{abc}$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng cả chính số đó chia hết cho 7.
б) Hãy phát biểu và chứng minh rằng tiêu chuẩn chia hết cho 7.
в) Hãy phát biểu và chứng minh rằng tiêu chuẩn chia hết cho 13.

Bài toán 52. a) Cho số có 6 chữ số $\underline{abcdef}$, hơn nữa $\underline{abc}+\underline{def}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng cả chính số đó chia hết cho 37.
б) Hãy phát biểu và chứng minh tiêu chuẩn chia hết cho 37.

Bài toán 53. Có tồn tại không một số có ba chữ số $\underline{abc}$ sao cho $\underline{abc}$ - $\underline{cba}$ là bình phương của một số tự nhiên?

Bài toán 54. Tìm số nhỏ nhất mà viết chỉ bằng số 1 lại chia hết cho 333 … 33 (trong cách viết 100 bộ ba).

Bài toán 55. Có thể có tổng một vài số tự nhiên đầu tiên có các chữ số kết thúc là 1989?

Bài toán 56. Tìm tất cả những số tự nhiên mà chúng tăng lên 9 lần, nếu giữa chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng chục cho vào đó số 0.

Bài toán 57. Giữa những chữ số có hai chữ số là bội của của 3, đặt vào số 0, và thêm vào số có ba chữ số vừa nhận được hai lần chữ số phần trăm. Ta nhận được một số 9 lần lớn hơn số ban đầu. Tìm số ban đầu.

Bài toán 58. Tìm số có 4 chữ số, mà nó là một số chính phương, hai chữ số đầu tiên của nó bằng nhau và hai chữ số cuối cùng cũng giống nhau.

Bài toán 59. Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số, lũy thừa của mọi số tự nhiên của nó có kết thúc ba chữ số tạo bởi số ban đầu.

Bài toán 60. Thêm vào từ phía phải một số chữ số 3. Chứng minh rằng mọi trường hợp đều nhận được một số phức hợp.

Bài toán 61. Chứng minh rằng все числа ряда 10001,100010001,1000100010001, … là hợp số.

1.3. Phương trình số nguyên và các bài toán khác

Bài toán 62. Giải phương trình $3x + 5y = 7$ trong các số nguyên.

Bài toán 63. Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình $3x – 12y = 7$.

Bài toán 64. Giải phương trình $1990x – 173y = 11$.

Bài toán 65. Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình $21x + 48y = 6$.

Bài toán 66. Giải phương trình $2x + 3y + 5z = 11$ trong tập số nguyên.

Bài toán 67. Một con kiến đứng tại một ô trên một bàn cờ vô hạn ô vuông trên một tờ giấy. Nó có thể chuyển đến được m ô về phía phải hoặc đến n ô bên trái. Với số m và n nào nó có thể di chuyển đến ô bên phải bên cạnh? Số bước đi nhỏ nhất nào nó có thể làm được?

Bài toán 68. $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.

Bài toán 69. $xy = x + y + 3$.

Bài toán 70. $x^2 = 14 + y^2$.

Bài toán 71. $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

Bài toán 72. $x^2 + y^2 = 4z - 1$.

Bài toán 73. $x^2 - 7y = 10$.

Bài toán 74. $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.

Bài toán 75. $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Bài toán 76. $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

Bài toán 77. $3^m + 7 = 2^n$.

Bài toán 78. $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Bài toán 79. $1/a + 1/b + 1/c = 1$.

Bài toán 80. $x^2 - y^2 = 1988$.

Bài toán 81. Chứng minh rằng phương trình $1/x - 1/y = 1/n$ có một nghiệm duy nhất trong tập số tự nhiên khi và chỉ khi n là số nguyên tố.

Bài toán 82. Giải phương trình trong tập số nguyên. $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$.

Bài toán 83. Giải phương trình trong tập số nguyên. $x^2 + y^2 = z^2$.

Bài toán 84. Giải phương trình trong tập số nguyên. $x^2 - 5y^2 = 1$.

1.4. Định lí Fermat nhỏ

Bài toán 85. Cho $ka \equiv kb \pmod m$, k và m – nguyên tố cùng nhau. Khi đó $a \equiv b \pmod m$.

Bài toán 86. Cho $ka \equiv kb \pmod{kn}$. Khi đó $a \equiv b \pmod n$.

Bài toán 87. Tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 101.

Bài toán 88. Tìm số dư của phép chia 3^{102} cho 101.

Bài toán 89. Chứng minh rằng $300^{3000} - 1$ chia hết cho 1001.

Bài toán 90. Tìm số dư của phép chia 8^{900} cho 29.

Bài toán 91. Chứng minh rằng $7^{120} - 1$ chia hết cho 143.

Bài toán 92. Chứng minh rằng số $30^{239} + 239^{30}$ là hợp số.

Bài toán 93. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng $(a + b)^p = a^p + b^p$ (mod p) với mọi số nguyên a và b.

Bài toán 94. Tổng của ba số a, b và c chia hết cho 30. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5$ cũng chia hết cho 30.

Bài toán 95. Cho p và q là những số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng
a) $p^q + q^p = p + q$ (mod pq).
б) [(pq+qp)/pq] là một số chẵn, nếu p, q $\neq$ 2.

Bài toán 96. Cho p là số nguyên tố, và a không chia hết cho p. Chứng minh rằng tìm được số tự nhiên b, sao cho $ab \equiv 1$ (mod p).

Bài toán 97. (Định lí Wilson). Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng $(p - 1)! \equiv -1$ (mod p).

Bài toán 98. Cho n – số tự nhiên, không phải bội của 17. Chứng minh rằng hoặc $n^8 + 1$, hoặc $n^8 - 1$ chia hết cho 17.

Bài toán 99. a) Cho p – số nguyên tố, khác 3. Chứng minh rằng số 111 … 11 (p số 1) không chia hết cho p.
б) Cho p > 5 – số nguyên tố. Chứng minh rằng số 111 … 11 (p – 1 số 1) chia hết cho p.

Bài toán 100. Chứng minh rằng với số nguyên tố bất kì p, hiệu số 111 … 11222 … 22333 … 33 … 888 … 88999 … 99 – 123456789 (trong số thứ nhất những số khác không được lặp lại p lần) chia hết cho p.