Một số phương pháp giải các bài toán về số học qua các kỳ thi học sinh giỏi

Phan Ngọc Toàn
Trường THPT An Nhơn 1, Bình Định

Trong các kỳ thi học sinh giỏi toán ở các cấp cũng như thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế chúng ta thường thấy sự có mặt của các bài toán về số học. Số học là một phân môn ít được học tập và nguyên cứu trong chương trình toán học phổ thông hiện nay. Các em học sinh phổ thông chỉ được học một phần nhỏ về số học ở chương trình toán trung học cơ sở còn ở cấp trung học phổ thông thì hầu như ít có điều kiện để học tập. Các bài toán số học luôn là niềm đam mê đối với các em học sinh yêu toán bởi sự phong phú của các bài toán cũng như sử đa dạng trong cách giải của chúng.

Tuy nhiên, việc đưa ra một lời giải cho một bài toán số học mới lạ thật không dễ dàng . Học sinh thường gặp lúng túng trước những bài toán số học trong các kỳ thi học sinh giỏi chính bởi vì có nhiều bài toán khó nhưng những kiến thức để mà vận dụng giải được chúng có khi rất đơn giản nhưng lại không có định hướng rõ ràng. Chính vì lí do đó mà qua kinh nghiệm giảng dạy của bản thân mình cũng như việc sưu tầm, tham khảo nhiều tài liệu. Tôi đã viết chuyên đề " Một số phương pháp giải các bài toán về số học trong các kỳ thi học sinh giỏi".

Trong chuyên đề này tôi xin giới thiệu 3 phương pháp cơ bản nhất thường gặp khi giải quyết các bài toán số học

1. Phương pháp sử dụng các nguyên lí cơ bản của toán học
2. Phương pháp sử dụng các định lí cơ bản trong số học
3. Phương pháp hạn chế điều kiện trong bài toán số học

Các em học sinh mỗi khi gặp khó khăn trước các bài toán về số học thì có thể suy nghĩ về một trong ba phương pháp ở trên trước khi nghĩ đến các phương pháp khác.

1 Phương pháp sử dụng các nguyên lí cơ bản của toán học

Trong mục này chúng ta cùng tìm hiểu về việc vận dụng các nguyên lí cơ bản của toán học như: nguyên lí phản chứng, nguyên lí quy nạp, nguyên lí cực hạn, nguyên lí sắp thứ tự, nguyên lí Dirichlet, . . . trong việc giải các bài toán về số học.

Ví dụ 1. (IMO 1988)

Cho a, b là các số nguyên dương thõa mãn $a^2 + b^2$ chia hết cho $ab + 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ là một số chính phương .

Giải:

Xét hai số nguyên dương a, b thõa $a^2 + b^2 \vdots ab + 1$, đặt $k = \dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}, k \in \mathbb{Z}^+$

Giả sử k không là số chính phương , cố định k

Xét tập hợp $T = \left\{ (a, b) | , a, b \in \mathbb{Z}^+, \dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k \right\}$. Ta có : $T \neq \varnothing$

Theo nguyên lí cực hạn trong tập hợp T tồn tại cặp $(a_0, b_0) \in T$ sao cho $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất trong tất cả các cặp (a, b)như thế. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 \geq b_0 > 0$ Khi đó,

$$\frac{a_0^2 + b_0^2}{a_0 b_0 + 1} = k \Leftrightarrow a_0^2 - k b_0 a_0 + b_0^2 - k = 0 \tag{1}$$

Hay phương trình $x^2 - k b_0 x + b_0^2 - k = 0$ có một nghiệm là $a_0$nên nếu ta cố định b_0 thì phương trình còn có một nghiệm nữa là a_1. Ta dễ thấy $a_1 \neq a_0$ Theo định lí Viet ta được :

Từ điều kiện (**??**) suy ra $a_1 = k b_0 - a_0$ nên $a_1 \in \mathbb{Z}$ và $a_1 \neq 0$(vì nếu $a_1 = 0$ thì từ (**??**) có $k = b_0^2$ nên mâu thuẫn)

Nếu $a_1 < 0$thì $a_1^2 - k b_0 a_1 + b_0^2 - k \geq a_1^2 + k + b_0^2 - k > 0$ (mâu thuẫn với điều kiện (1))

Hay $a_1 > 0$ nên $(a_1, b_0) \in T$. Vì

$$a_0 \geq b_0 > 0 \text{ nên } a_1 = \frac{b_0^2 - k}{a_0} < \frac{a_0^2 - k}{a_0} < a_0 \Rightarrow a_1 + b_0 < a_0 + b_0$$

Điều này mâu thuẫn với cách chọn $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất

Vậy k là số chính phương .

Nhận xét :

Trong bài toán trên ta đã khéo léo vận dụng kết hợp giữa nguyên lí phản chứng và nguyên lí cực hạn để giải quyết bài toán.

Ví dụ 2. Cho a, b là các số nguyên dương thõa mãn $a^2 + b^2 + 1$ chia hết cho ab. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ là một số nguyên tố .

Giải:

Xét hai số nguyên dương a, b thõa $a^2 + b^2 + 1 \vdots ab$, đặt $k = \dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab}, k \in \mathbb{Z}^+$ Xét tập hợp $T = \left\{ (a, b) | , a, b \in \mathbb{Z}^+, \dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k \right\}$. Ta có : $T \neq \varnothing$

Theo nguyên lí cực hạn trong tập hợp T tồn tại cặp $(a_0, b_0) \in T$ sao cho $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất trong tất cả các cặp (a, b)như thế.

Nếu $a_0 \neq b_0$ thì không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 > b_0 \geq 1$

Khi đó,

$$\frac{a_0^2 + b_0^2 + 1}{a_0 b_0} = k \Leftrightarrow a_0^2 - k b_0 a_0 + b_0^2 + 1 = 0 \tag{2}$$

Hay phương trình $x^2 - kb_0x + b_0^2 + 1 = 0$ có một nghiệm là $a_0$nên nếu ta cố định b_0 thì phương trình còn có một nghiệm nữa là a_1. Ta dễ thấy $a_1 \neq a_0$

Theo định lí Viet ta được :

Từ điều kiện (**??**) suy ra $a_1 = kb_0 - a_0$ nên $a_1 \in \mathbb{Z}$

Từ điều kiện (**??**) suy ra $a_1 > 0$ nên $a_1 > 0$ hay $(a_1, b_0) \in T$.

Vì $a_0 > b_0 \geq 1$ nên

$$a_1 = \frac{b_0^2 + 1}{a_0} \leq \frac{a_0^2 - 2a_0 + 2}{a_0} = a_0 - 2 + \frac{2}{a_0} < a_0 \Rightarrow a_1 + b_0 < a_0 + b_0$$

Điều này mâu thuẫn với cách chọn $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất

Nên $a_0 = b_0$ suy ra $2a_0^2 + 1 \vdots a_0^2 \Rightarrow 1 \vdots a_0^2$ nên $a_0 = b_0 = 1$.

Khi đó, $k = 3$ là số nguyên tố .

Nhận xét :

Trong bài toán trên không phải lúc nào ta cũng có $a = b = 1$. Chỉ với cặp (a_0, b_0) nhỏ nhất mà ta đang xét mới có $a_0 = b_0 = 1$ nên từ đó luôn có $k = 3$ trong mọi trường hợp.

Ví dụ 3. (IMO 2007) Cho a, b là các số nguyên dương thõa mãn $(4a^2 - 1)^2$ chia hết cho $4ab - 1$. Chứng minh rằng: $a = b$.

Giải:

Ta có :

$$\left(4a^2 - 1\right)^2 \vdots 4ab - 1 \Rightarrow b^2(4a^2 - 1)^2 - 4a^3b(4ab - 1) \vdots 4ab - 1$$

Hay

$$4a^3b + b^2 - 8a^2b^2 \vdots 4ab - 1 \Rightarrow 4a^3b + b^2 - 8a^2b^2 + 2ab(4ab - 1) \vdots 4ab - 1$$

Từ đó ta được:

$$b^2 - 4a^3b - 2ab \vdots 4ab - 1 \Rightarrow b^2 - 4a^3b - 2ab - (4ab - 1) \vdots 4ab - 1$$

Nên

$$(a - b)^2 \vdots 4ab - 1$$

Xét hai số nguyên dương a, b thỏa $(a - b)^2 \vdots 4ab - 1$, đặt $k = \dfrac{(a - b)^2}{4ab - 1}, k \in \mathbb{Z}^+$ Cố định k, xét tập hợp

$$T = \left\{ (a, b) |, a, b \in \mathbb{Z}^+, \frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k \right\}$$

Ta có : $T \neq \varnothing$

Theo nguyên lí cực hạn trong tập hợp T tồn tại cặp $(a_0, b_0) \in T$ sao cho $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất trong tất cả các cặp (a, b)như thế.

Nếu $a_0 \neq b_0$ thì không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 > b_0 \geq 1$

Khi đó,

$$\frac{(a_0-b_0)^2}{4a_0b_0-1}=k \Leftrightarrow a_0^2-(2b_0+4kb_0)a_0+b_0^2+k=0 \quad (3)$$

Hay phương trình

$$x^2-(2b_0+4kb_0)x+b_0^2+k=0$$

có một nghiệm là a_0 nên nếu ta cố định b_0 thì phương trình còn có một nghiệm nữa là a_1. Ta dễ thấy $a_1 \neq a_0$ Theo định lí Viet ta được : $a_1 \in \mathbb{Z}$

Từ điều kiện trên suy ra $a_1 \in \mathbb{Z}$ và $a_1 > 0$ hay $(a_1, b_0) \in T$.

Vì ta chọn $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất nên

$$a_1 \geq a_0 \Rightarrow \frac{b_0^2+k}{a_0} \geq a_0 \Rightarrow k \geq a_0^2 - b_0^2$$

Từ đó,

$$\frac{(a_0-b_0)^2}{4a_0b_0-1} \geq a_0^2-b_0^2 \Rightarrow a_0-b_0 \geq (a_0+b_0)(4a_0b_0-1) \geq a_0+b_0$$

Điều này mâu thuẫn vì $a_0, b_0 > 0$

Vậy $a_0 = b_0 \Rightarrow k = 0$ nên $a = b$ với mọi cặp (a, b) thõa đề bài.

Nhận xét :

Trong bài toán trên trước hết đó là sự khéo léo trong cách biến đổi để đưa giải thiết về dạng bậc hai để có thể sử dụng định lí Viet

Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí cực hạn và phản chứng để đi dến $a_0 = b_0$ từ đó có $k = 0$ nên trong mọi trường hợp đều có $a = b$.

Tiếp theo ta đến với một số bài tập vận dụng nguyên lí Dirichlet.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn được 6 số , gọi là a, b, c, d, e, f sao cho $(a-b)(c-d)(e+f)$ chia hết cho 1800.

Giải:

Vì 3 số nguyên tố đầu tiên là nên trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5.

Lấy 9 số nguyên tố lớn hơn 5 ở trên chia cho 3 chỉ có các số dư là 1 hoặc 2 nên theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ít nhất là 5 số đồng dư với nhau theo modulo 3

Trong 5 số này không có số nào chia hết cho 5 nên tồn tại ít nhất hai số cùng số dư khi chia cho 5

Giả sử 2 số đó là a, bthì

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{3} \\ a \equiv b \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow a - b \vdots 15$$

Ta lại có, a và b cùng lẻ nên $a - b \vdots 2 \Rightarrow a - b \vdots 30$

Xét 7 số còn lại, Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 4 số đồng dư với nhau theo modulo 3 Tiếp theo đem 4 số này chia cho 5 ta được hai trường hợp sau :

TH1 : Nếu có 2 số cùng số dư giả sử là c, d thì :

$$\begin{cases} c \equiv d(\text{mod } 3) \\ c \equiv d(\text{mod } 5) \Rightarrow c - d \vdots 30 \\ c \equiv d(\text{mod } 2) \end{cases}$$

Khi đó, lấy bất kì 2 số e, f khác với a, b, c, d thì $e + f \vdots 2$
Nên

$$(a-b)(c-d)(e+f) \vdots 30.30.2 = 1800$$

TH2 : Nếu 4 số này chia cho 5 có số dư đôi một khác nhau
Giả sử trong đó có

$$\begin{cases} e \equiv 1(\text{mod } 5) \\ f \equiv 4(\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow e + f \vdots 5$$

ta lại có $e + f \vdots 2$ nên $e + f \vdots 10$
Khi đó, hai số còn lại giả sử là c, d thì:

$$\begin{cases} c \equiv d(\text{mod } 3) \\ c \equiv d(\text{mod } 2) \end{cases} \Rightarrow c - d \vdots 6$$

Nên $(a-b)(c-d)(e+f) \vdots 30.10.6 = 1800$

Vậy luôn tồn tại 6 sốa, b, c, d, e, f thõa $(a-b)(c-d)(e+f) \vdots 1800$.

Nhận xét :

Trong bài toán trên ta đã khéo léo vận dụng nguyên lí Dirichlet nhiều lần kết hợp với nhau để tạo ra các đồng dư thức giúp ta chứng minh được bài toán.

Ví dụ 5. Giả sử p là số nguyên tố dạng $4k + 3$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y sao cho $x^2 + y^2 + 1 \vdots p$

Giải:

Đặt

$$r_i \equiv i^2(\text{mod } p),\ i = \overline{1, \frac{p-1}{2}}\ ;\ \text{s}_i \equiv -1 - i^2(\text{mod } p),\ i = \overline{1, \frac{p-1}{2}}$$

Trong đó, r_i đôi một phân biệt, s_i đôi một phân biệt, $r_i, s_i \in T = \{1, 2, .., p-1\}$ Đặt

$$A = \left\{ r_1, ...r_{\frac{p-1}{2}} \right\}; B = \left\{ s_1, ...s_{\frac{p-1}{2}} \right\}$$

thì

$$|A| = |B| = \frac{p-1}{2}; |A \cup B| \leq p - 1$$

TH 1: Nếu $|A \cup B| < p-1$ thì $A \cap B \neq \varnothing$ nên tồn tại

$$r_i = s_j \Rightarrow i^2 \equiv -1 - j^2 (\bmod\ p) \Leftrightarrow i^2 + j^2 + 1 \vdots p$$

TH 2: Nếu $|A \cup B| = p-1$ thì$A \cap B = \varnothing$ nên các số r_i, s_i đôi một phân biệt Suy ra:

$$r_1 + ... + r_{\frac{p-1}{2}} + s_1 + ... + s_{\frac{p-1}{2}} = 1 + 2 + ... + (p-1) \equiv 0 (\bmod\ p)$$

Mâu thuẫn vì theo định nghĩa r_i, s_i thì:

$$r_1 + ... + r_{\frac{p-1}{2}} + s_1 + ... + s_{\frac{p-1}{2}} = \left[1^2 + 2^2 + ... + (\frac{p-1}{2})^2\right]$$
$$+ \left[\left(-1 - 1^2\right) + \left(-1 - 2^2\right) + ... + \left(-1 - (\frac{p-1}{2})^2\right)\right]$$
$$\equiv -\frac{p-1}{2} (\bmod\ p)$$

Vậy tồn tại các số nguyên x, y sao cho $x^2 + y^2 + 1 \vdots p$

Nhận xét :

Trong bài toán trên ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet phát biểu dưới dạng tập hợp.

Ví dụ 6. Cho số nguyên dương m. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên a, b thõa đồng thời các điều kện sau :

a). $|a| \leq m, |b| \leq m$

b). $0 < a + b\sqrt{2} \leq \dfrac{1+\sqrt{2}}{m+2}$

Giải:

Đặt $f(x,y) = x + y\sqrt{2}, x, y \in \mathbb{Z}$. Xét tập

$$T = \{\, f(x,y) |\, x, y \in \mathbb{Z}; 0 \leq x, y \leq m\}$$

Ta thấy

$$f(x,y) = f(x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Nếu $f(x,y) \in T$ thì $0 \leq f(x,y) \leq (\sqrt{2}+1)m$

Chia đoạn $\left[0; (\sqrt{2}+1)m\right]$ thành $m^2 + 2m$ phần bằng nhau

Vì $|T| = (m+1)^2$ nên theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại hai phần tử $f(a_1, b_1) \neq f(a', b') \in T$ và thuộc cùng một đoạn nhỏ vừa chia . Giả sử $f(a_1, b_1) > f(a', b')$.

Khi đó, $0 < f(a_1, b_1) - f(a', b') = (a_1 - a') + (b_1 - b')\sqrt{2} \leq \dfrac{\sqrt{2}+1}{m+2}$

Đặt

$$a = a_1 - a', b = b_1 - b'$$

thì

$$0 < a + b\sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{m+2} \text{ với } |a|\,, |b| \leq m$$

Vậy tồn tại các số nguyên a, b thõa đồng thời các điều kện đề bài.

Nhận xét :

Dựa vào điều kiện cần chứng minh ta đã phân tích phải vận dụng nguyên lí Dirichlet. Nhưng cái hay là ở chỗ ta đã dựa vào điều kiện cần chứng minh để tạo ta số chuồng và số thỏ phù hợp để vận dụng nguyên lí Dirichlet.

Ví dụ 7. CMR: với mỗi số nguyên dương k đều chọn được số nguyên dương n sao cho $n.2^k - 7$ là số chính phương.

Giải:

Với $k = 1, k = 2, k = 3$ ta dễ dàng kiểm tra bài toán đúng nên ta chỉ xét khi $k \geq 3$

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo k :

Giả sử bài toán đã đúng đến $k \geq 3$ nghĩa là $n.2^k - 7 = a^2, a \in \mathbb{Z}^+$ .Vì $n.2^k - 7$ là số lẻ nên a lẻ.

Ta chứng minh bài toán cũng đúng với $k + 1$.

Nếu số n tồn tại ở bước giả sử với k là một số chẵn thì :

$$n.2^k - 7 = a^2, a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \frac{n}{2}.2^{k+1} - 7 = a^2$$

nên chỉ việc chọn $m = \dfrac{n}{2}$ thì bài toán đúng khi $k + 1$

Nghĩa là ta có: $m.2^{k+1} - 7 = a^2$

Nếu số n ở trên là số lẻ : xét số nguyên dương p ta có:

$$(a+p)^2 = a^2 + 2ap + p^2 = n.2^k - 7 + 2ap + p^2 = n.2^k - 7 + p(p + 2a)$$

Chọn $p = 2^{k-1}$ thì

$$(a+p)^2 = (n + a + 2^{k-2})2^k - 7$$

Vì n và a là số lẻ nên $n + a + 2^{k-2}$ là số chẵn hay $n + a + 2^{k-2} = 2n_1$

Khi đó, $n_1.2^{k+1} - 7 = (a + 2^{k-1})^2$ nên chỉ việc chọn $m = n_1$ thì bài toán đúng khi $k + 1$

Vậy tồn tại số nguyên dương n sao cho $n.2^k - 7$ là số chính phương.

Nhận xét :

Ở bài toán trên ta đã kết hợp vận dụng nguyên lí quy nạp với việc xây dựng số m thõa đề bài.

Sự khó khăn của các bài toán kiểu này đó là xây dựng các đại lượng thõa yêu cầu đề bài trong phép chứng minh quy nạp .

Ví dụ 8. (Việt Nam 1997) CMR: với mỗi số nguyên dương n đều chọn được số nguyên dương k sao cho $19^k - 97$ chia hết cho 2^n

Giải:

Với $n = 1, n = 2$ chọn $k = 2$ nên ta chỉ xét khi $n \geq 3$

Ta cnhận xét: $19^{2^{n-2}} - 1 = 2^n t_n$ với t_n là số lẻ

Với $n = 3$, nhận xét đúng. Giả sử nhận xét đã đúng khi $n = k$

Khi $n = k+1$, $19^{2^{k-1}} - 1 = (19^{2^{k-2}} + 1)(19^{2^{k-2}} - 1) = 2.s_n 2^n t_n = 2^{n+1}(s_n t_n)$ với $s_n t_n$ là số lẻ

Vậy nhận xét được chứng minh.

Ta cbài toán bằng quy nạp theo n :

Với $n = 3$, bài toán đúng

Giả sử tồn tại $k_n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $19^{k_n} - 97 = 2^n a$

Nếu a là số chẵn thì hiển nhiên $19^{k_n} - 97 = 2^{n+1} a_1$

Nếu a là số lẻ, đặt $k_{n+1} = k_n + 2^{n-2}$

Khi đó, $19^{k_{n+1}} - 97 = 19^{2^{n-2}}(19^{k_n} - 97) + 97(19^{2^{n-2}} - 1) = 2^n(19^{2^{n-2}} a + 97t_n) \vdots 2^{n+1}$

Vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $19^k - 97$ chia hết cho 2^n.

2 Phương pháp sử dụng các định lí cơ bản trong số học

Các định lí cơ bản của số học như: định lí cơ bản về số nguyên tố, định lí Fermat, định lí Euler , định lí Wilson, định lí phần dư Trung Hoa, hệ thặng dư đầy đủ, hệ thặng dư thu gọn, cấp của phần tử , thặng dư bậc hai,... đóng một vai trò khá quang trọng trong việc giải quyết các bài toán số học

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn a^3 chia hết cho b, b^3 chia hết cho c và c^3 chia hết cho a. Chứng minh rằng $(a+b+c)^{13} \vdots abc$.

Giải:

Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của abc.

Khi đó tồn tại α, β, γ nguyên không âm sao cho:

$$a = p^\alpha A, b = p^\beta B, c = p^\gamma C \text{ và } (p, A) = (p, B) = (p, C) = 1.$$

do $a^3 \vdots \Rightarrow p^{3\alpha} A^3 \vdots p^\beta B$ mà $(p, A) = 1$ nên $3\alpha \geq \beta$.

Tương tự ta thấy $3\beta \geq \gamma$ và $3\gamma \geq \alpha$.

Ta có $abc = p^{\alpha+\beta+\gamma} ABC$ và $(p, ABC) = 1$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh số mũ đúng của p trong $(a+b+c)^{13}$ không nhỏ hơn

$$\alpha + \beta + \gamma$$

Giả sử $\alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$

Khi đó, số mũ đúng của $(a+b+c)^{13}$ là 13α

Mà $\alpha + \beta + \gamma \leq \alpha + 3\alpha + 9\gamma = 13\alpha$

Suy ra $(a+b+c)^{13} \vdots p^{\alpha+\beta+\gamma}$

Nhận xét :

Chính giả thiết bài toán và kết luận cần chứng minh là chia hết cho một tích abc nên làm cho ta suy nghĩ đến việc vận dụng định lí cơ bản về số nguyên tố.

Số nguyên tố đóng một vài trò khá quang trọng trong số học . Khi ta cần chứng minh một tính chất nào đó đúng cho một hợp số ta có thể đưa về chứng minh tính chất đó đúng trên một thừa số nguyên tố rồi từ đó giải quyết bài toán.

Ví dụ 10. (Iran 1998) Cho x, a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $x^{a+b} = a^b b$. Chứng minh rằng $a = x$ và $b = a^x$.
Giải:

$x = 1$, bài toán hiển nhiên đúng. Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của một trong ba số x, a, b, Khi đó $x = p^\alpha X; a = p^\beta A, b = p^\gamma B; (p, X) = (p, A) = (p, B) = 1$ với α, β, γ không âm và không đồng thời bằng 0. Ta được:

$$(p^\alpha X)^{a+b} = (p^\beta A)^b . p^\gamma B$$

Đồng nhất số mũ của p ở hai vế ta được $\alpha(a + b) = \gamma + b\beta$.
Dễ thấy $\gamma > 0$ vì nếu $\gamma = 0$ thì

$$\alpha(a + b) = b\beta \Leftrightarrow (\beta - \alpha)b = \alpha a \Leftrightarrow (\beta - \alpha)b = \alpha . p^\beta A$$

Mà $(b, p) = 1$ (do $\gamma = 0$) nên $\beta - \alpha \vdots p^\beta \Rightarrow \beta > p^\beta$ (vô lí)
Vậy $\gamma > 0$
Ta có

$$\alpha(a + b) = \gamma + b\beta \Leftrightarrow \alpha(a + p^\gamma B) = \alpha + p^\gamma B\beta \Leftrightarrow \alpha a - \gamma = p^\gamma(B\beta - \alpha B)$$

Do γ không chia hết cho p^γ nên a không chia hết cho p^γ

Hay $\beta < \gamma \Rightarrow b \vdots a$

Mặt khác $\alpha a - \gamma = b(\beta - \alpha) \vdots a$ nên $\gamma \vdots a$
Tư đó suy ra tồn tại một số nguyên dương c sao cho $b = c^a$
Ta dễ dàng có được điều phải chứng minh.

Nhận xét :
Cùng như ví dụ trên chính giả thiết bài toán và kết luận cần chứng minh đó là các đẳng thức với số mũ làm cho ta suy nghĩ đến việc vận dụng định lí cơ bản về số nguyên tố.

Ví dụ 11. Giả sử phương trình $x^{2017} + ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số nguyên a, b, c có 3 nghiệm nguyên là x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng: $(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ chai hết cho 2017.
Giải:

Phương trình đã cho được viết lại:

$$\left(x^{2017} - x\right) + \left[ax^2 + (b + 1)x + c\right] = 0$$

Đặt

$$f(x) = ax^2 + (b + 1)x + c$$

Theo định lí Fermat nhỏ : $x_i^{2017} - x_i \vdots 2017, \forall i = 1, 2, 3$ nên $f(x_i) \vdots 2017, \forall i = 1, 2, 3$ Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \vdots 2017$ thì bài toán được chứng minh. Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$không chia hết cho 2017 thì theo trên ta được:

$$\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \vdots 2017 \\ f(x_2) - f(x_3) \vdots 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)\left[a(x_1 + x_2) + b + 1\right] \vdots 2017 \\ (x_2 - x_3)\left[a(x_2 + x_3) + b + 1\right] \vdots 2017 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(x_1 + x_2) + b + 1 \vdots 2017 \\ a(x_2 + x_3) + b + 1 \vdots 2017 \end{cases} \Rightarrow a(x_1 - x_2) \vdots 2017 \Rightarrow a \vdots 2017$$

Từ đó suy ra, $b + 1 \vdots 2017$ mà $f(x_i) = ax_i^2 + (b+1)x_i + c \vdots 2017$ nên $c \vdots 2017$ Từ đó, $a + b + c + 1 \vdots 2017$ Vậy

$$(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \vdots 2017$$

Nhận xét :

Sự xuất hiện các biểu thức x^{2017}và 2017 là số nguyên tố đã làm ta nhớ đến định lí Fermat.

Ví dụ 12. Tồn tại hay không số nguyên x sao cho $x^2 + x + 1$ chia hết cho

Giải: Nhận xét 2027 là số nguyên tố dạng $3k + 2$ Giả sử tồn tại số nguyên x sao cho $x^2 + x + 1$ chia hết cho Khi đó, tồn tại $a \in \{1, 2, ..., 2026\}$ thõa mãn $a^2 + a + 1 \vdots 2027$ Nên $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1) \vdots 2027 \Rightarrow a^{2025} - 1 \vdots 2027$ hay $a^{2025} \equiv 1 (\text{mod } 2027)$ Suy ra: $a^{2026} \equiv a (\text{mod } 2027)$ Mặt khác, theo định lí Fermat thì $a^{2026} \equiv 1 (\text{mod } 2027)$nên $a \equiv 1 (\text{mod } 2027)$ (m.t) Vậy không tồn tại số nguyên x thỏa đề bài.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n thỏa mãn

$$n \mid 1 + m^{3^n} + m^{2.3^n}$$

Giải:

Từ $n \mid 1 + m^{3^n} + \left(m^{3^n}\right)^2 \Rightarrow n \,\Big|\, m^{3^{n+1}} - 1$

Đặt $d = \text{ ord}_n(m) \Rightarrow d \mid 3^{n+1} \Rightarrow d = 3^k \quad (k \in \mathbb{N})$

Nếu $k \geq n \Rightarrow d \mid 3^n \Rightarrow n \mid m^{3^n} - 1$

$\Rightarrow m^{2.3^n} + m^{3^n} + 1 \equiv 3(\mod n) \Rightarrow n = 3 \Rightarrow 3m^{3^3} + m^{2.3^3} 1 + m^{3^3} + m^{2.3^3}$

Từ đây dễ thấy phải chọn $m \equiv 1(\mod 3)$

Nếu $k \geq n + 1$ thì $d = 3^{n+1}$ mà $d \mid \varphi(n) \Rightarrow d < n$ lại có $3^{n+1} > n$ (vô lý)

Vậy bài toán có nghiệm $(m, n) = (m, 3)$ trong đó $m \equiv 1(\mod 3)$

Nhận xét :

- Ở bài toán này ta đã

Ví dụ 14. Cho n, b là các số tự nhiên , đồng thời $n \geq 5, 2 \leq b \leq n$. CMR $\left[\dfrac{(n-1)!}{b}\right]$ chia hết cho $b - 1$

Giải: Nếu $b < n$ thì : $(n-1)! \vdots b(b-1) \Rightarrow \dfrac{(n-1)!}{b} \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{(n-1)!}{b} \vdots (b-1)$

Nếu $b = n = r.s$ với $1 < r < s < n$. Vì $(n, n-1) = 1$ nên $s < n - 1$. suy ra: $(n-1)! \vdots rs(n-1) = b(b-1)$

Nếu $b = n = p^2$, p là số nguyên tố . Vì $n = p^2 \geq 5$ nên $1 < p < 2p < p^2 - 1 = n - 1$
Nên $(n-1)! \vdots p(2p)(n-1) = 2b(b-1)$
Nếu $b = n = p$ nguyên tố thì theo Wilson

$$\left[\frac{(p-1)!}{p}\right] = \left[\frac{(p-1)!+1}{p} - \frac{1}{p}\right] = \frac{(p-1)!+1}{p} - 1 = \frac{(p-1)! - (p-1)}{p} \vdots (p-1)$$

3 Phương pháp hạn chế điều kiện trong bài toán

Học sinh thường gặp lúng túng trước các bài toán số học là vì một phần các em không biết nên sử dụng giả thiết bài toán như thế nào. Khi đó, một cách thường làm đó là tìm cách thu hẹp phạm vi kiến thức liên quan đến giả thiết và kết luận hay nói nôm na là hạn chế điều kiện của bài toán. Khi ta hạn chế được một số điều kiện trong bài toán sẽ giúp ta có định hướng để giải quyết bài toán tốt hơn. Chúng ta cùng xem xét qua một số ví dụ sau:

Ví dụ 15. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c, dđôi một khác nhau sao cho $abcd - 1$ chia hết cho $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$
Giải: Không mất tính tổng quát ta giả sử $1 < a < b < c < d$ Đặt $x = abcd - 1, y = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$. Giả sử x chia hết cho y và $\frac{x}{y} = k$ thì $k > 1$ Nếu một trong các số a, b, c, d chẵn thì x lẻ nên y lẻ và suy ra a, b, c, d đều là số chẵn Nên a, b, c, d cùng tính chẵn , lẻ Ta nhận thấy hàm số $f(t) = \frac{t}{t-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. do đó, nếu $a \geq 5$ thì:

$$k = \frac{x}{y} = \frac{abcd - 1}{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} < \frac{a}{a-1} . \frac{b}{b-1} . \frac{c}{c-1} . \frac{d}{d-1} < \frac{5}{4} . \frac{6}{5} . \frac{7}{6} . \frac{8}{7} = 2$$

Nên $x = y$(vô lí) Vậy a chỉ có thể nhận một trong hai giá trị là $a = 4$ hoặc $a = 3$ Khi $a = 4$, từ trên ta suy ra: $b \geq 6, c \geq 8, d \geq 10$ nên

$$k = \frac{x}{y} < \frac{4}{3} . \frac{6}{5} . \frac{8}{7} . \frac{10}{9} < 3$$

Suy ra $k = 2$(Vô lí vì khi đó x là số lẻ) Khi $a = 3$, từ trên ta suy ra: $b \geq 5, c \geq 7, d \geq 9$ nên

$$k = \frac{x}{y} < \frac{3}{2} . \frac{5}{4} . \frac{7}{6} . \frac{9}{7} < 3$$

Suy ra $k = 2$. Ta lại có, $x \equiv -1 (\text{mod } 3)$ nên các số $b-1, c-1, d-1$ đều không chia hết cho 3 Do đó , nếu $b \neq 5$ thì $b \geq 9, c \geq 11, d \geq 15$ nên

$$k = \frac{x}{y} < \frac{3}{2} . \frac{9}{8} . \frac{11}{10} . \frac{15}{14} < 2 \text{ (vô lí)}$$

Vậy $b = 5$. Từ đó ta được phương trình

$$15cd - 1 = 16(c-1)(d-1) \Leftrightarrow (c-16)(d-16) = 239 \Rightarrow c = 17, d = 255$$

Khi $a = 2$, khi đó vì a, b, c, d chẵn nên k là số lẻ Suy ra:

$$k = \frac{x}{y} < \frac{2}{1}.\frac{4}{3}.\frac{6}{5}.\frac{8}{7} < 4$$

Suy ra $k = 3$. Ta lại có, $abcd - 1 = 3y$ nên các số b, c, d đều không chia hết cho 3 Do đó , nếu $b \neq 4$ thì $b \geq 8, c \geq 10, d \geq 14$ nên $k = \frac{x}{y} < \frac{2}{1}.\frac{8}{7}.\frac{10}{9}.\frac{14}{13} < 3$ (vô lí vì k lẻ và$k \neq 1$).Vậy $b = 4$. Từ đó ta được phương trình $8cd - 1 = 9(c-1)(d-1) \Leftrightarrow (c-9)(d-9) = 71 \Rightarrow c = 10, d = 80$ Vậy các bộ số (a, b, c, d) cần tìm là $(3, 5, 17, 255)\,; (2, 4, 10, 80)$

Nhận xét :

Ở bài toán trên có đến 4 ẩn số, ta đã khéo léo nhận xét để đưa ra kết luận a, b, c, d cùng tính chẵn , lẻ. Cũng chính bởi sự tinh tế nhận thấy hàm số$f(t) = \frac{t}{t-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Từ đó có kết quả $a \leq 4$ làm giúp ta thu hẹp phạm vi của bài toán .

Ví dụ 16. (IMO 1998)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho $a^2b + a + b$ chia hết cho $ab^2 + b + 7$

Giải:

Với (a, b) thõa dề bài ta đặt $k = \frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7}$ thì $k \in \mathbb{Z}^+$. Ta xét hai trường hợp :

TH1 : Nếu $a < b$ thì $b \geq a + 1$ nên $ab^2 + b + 7 > ab^2 + b = b(ab+1) \geq (a+1)(ab+1)$
Từ đó suy ra : $ab^2 + b + 7 > a^2b + a + ab + 1 > a^2b + a + b > 0$ nên $k \notin \mathbb{Z}^+$

TH2 : Nếu $a \geq b$ Ta có :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)\left(ab^2 + b + 7\right) = a^2b + a + ab + \frac{7a}{b} + \frac{7}{b} + 1 > a^2b + a + b$$

nên $k < \frac{a}{b} + \frac{1}{b}$

Ta lại xét 3 khả năng sau :

Nếu $b \geq 3$thì $b - \frac{7}{b} > 0$ nên từ đó,

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\right)\left(ab^2 + b + 7\right) = a^2b + a - a\left(b - \frac{7}{b}\right) - 1 - \frac{7}{b} < a^2b + a + b$$

Suy ra : $k > \frac{a}{b} - \frac{1}{b}$

Vậy $\frac{a}{b} - \frac{1}{b} < k < \frac{a}{b} + \frac{1}{b}$ hay $a - 1 < kb < a + 1$. từ đó ta được : $a = kb$

Thay $a = kb$ vào $k = \frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7}$ ta được :

$$k^2b^3 + bk + 7k = k^2b^3 + kb + b \Leftrightarrow b = 7k \Rightarrow a = 7k^2$$

Nếu $b = 1$thì ta cần tìm a sao cho

$$a^2 + a + 1 \,\vdots\, a + 8 \Rightarrow \left[a(a+8) - (a^2 + a + 1)\right] \,\vdots\, a + 8$$

Hay $7a - 1 \vdots a + 8$. Từ đó tìm được : $(a = 11, b = 1)$ và $(a = 49, b = 1)$

Nếu $b = 2$thì ta cần tìm a sao cho

$$2a^2 + a + 2 \vdots 4a + 9 \Rightarrow \left[a(4a + 9) - 2(2a^2 + a + 2)\right] \vdots 4a + 9$$

Hay $7a - 4 \vdots 4a + 9$. Trường hợp này không có a thỏa đề bài

Vậy tất cả các cặp (a, b) thõa đề bài là : $(a = 7k^2, b = 7k)$với $k \in N$ và $(a = 11, b = 1)$; $(a = 49, b = 1)$

Nhận xét :

Ở đây ta đã dựa vào tính chất hay của tập số nguyên là nếu $a < b$ thì $b \geq a + 1$ để loại trừ đi trường hợp này, thu hẹp phạm vi cần tìm của bài toán.

Sau đó là các đánh giá hợp lí để thu được $a - 1 < kb < a + 1$. Từ đó đi đến $a = kb$và chỉ còn hai trường hợp đặt biệt là $b = 1, b = 2$.

Ví dụ 17. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thõa $17^n - 1$ chia hết cho 2^{2013}

Giải:

Giả sử tìm được n thoả mãn đề bài. Gọi d là cấp của 17 khi chia cho 2^{2013} Ta được: $17^d \equiv (\mod 2^{2013})$ Theo định lí Euler ta có : $(17, 2^{2013}) = 1$ nên $17^{\varphi(2^{2013})} \equiv 1(\text{mod } 2^{2013})$ Nên theo tính chất cấp của một phần tử suy ra: d là ước số nguyên dương của $\varphi(2^{2013}) = 2^{2012}$ Hay $d = 2^k$ với $k = \{1, 2, \ldots, 2012\}$ $17^{2^k} - 1 \vdots 2^{2013}$

Ta lại có:

$$17^{2^k} - 1 = (17 - 1)(17 + 1)\left(17^2 + 1\right) .... \left(17^{2^{k-1}} + 1\right)$$

Với $i \geq 1$ thì $17^{2^i} + 1 \equiv 2(\mod 4)$ Nên $V_2(17^{2^k} - 1) = 4 + k$ (Ở đây $V_2(m)$ là số mũ của 2 trong phân tích của m ra thừa số nguyên tố) Từ đó suy ra:$k + 4 \geq 2013 \Rightarrow k \geq 2009$.

Do tính chất của d nên suy ra giá trị cần tìm là $d = 2^{2009}$.

Bài tập

1. Cho các số nguyên dương x, y thõa mãn $x^2 + y^2 + 1$ chia hết cho $2xy + 1$. Chứng minh rằng hoặc $xy = 0$ hoặc $x = y$.

2. Cho 4 số tự nhiên thõa mãn tính chất: bình phương tổng hai số bất kì chia hết cho tích của hai số còn lại. CMR: có ít nhất 3 số trong chúng bằng nhau.

3. Cho p là số nguyên tố dạng $4k + 1$. CMR: tồn tại các số nguyên a, b sao cho $p = a^2 + b^2$.

4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, tồn tại số tự nhiên x sao cho $2012x^2 + 79x + 11 \vdots 2^n$.

5. Tìm tất cả các số nguyên dương $n \geq 3$ sao cho 2^{2013} chia hết cho $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên) năm 2008, Một số vấn đề số học chọn lọc. NXBGD

2. Hà Huy Khoái, năm 2006, Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học phổ thông số học, NXBGD.

3. Phan huy Khải, năm 2009, Các chuyên đề số học, NXBGD.