PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn ax + by = c

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (a,b) | c

Để giải phương trình ta tìm một nghiệm riêng (x_0,y_0) từ đó suy ra tất cả các nghiệm của phương trình $\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$ $(t \in Z)$

Ví dụ. Giải phương trình 12x + 37y = 2008

Giải

Từ phương trình ta suy ra $y \equiv 4 \bmod 12$, ta chọn $y_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 155$.Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = 155 + 37t \\ y = 4 - 12t \end{cases}$ $(t \in Z)$

2. Phương trình bậc nhất ba ẩn ax + by + cz = d

Để giải phương trình ta đưa về dạng ax + by = d – cz với (a,b) = 1 rồi chọn z = a tùy ý.

Ví dụ. Giải phương trình 13x + 25y – 41z = 2009

Giải.

Cho z = a $\Rightarrow$ 13x + 25y = 2009 + 41a (*)

phương trình 13x + 25y = 1 có một nghiệm là (2;–1) nên nghiệm của (*) là

$\begin{cases} x = 2(2009 + 41a) + 25b \\ y = -(2009 + 41a) - 13b \end{cases}$ $(t \in Z) \Rightarrow$ Nghiệm của phương trình ban đầu là

$$\begin{cases} x = 2(2009 + 41a) + 25b \\ y = -(2009 + 41a) - 13b \quad (t \in Z) \\ z = a \end{cases}$$

3. Phương trình ax + by + cxy = d

Ta đưa về dạng tích $x(a + cy) + \frac{b}{c}(a + cy) = d + \frac{ab}{c}$ $\Leftrightarrow$ (cx + b)(cy + a) = ab + cd

Từ đây ta có cx + b, cy + a là các ước của ab + cd

Ví dụ. Giải phương trình 2x + 5y – 3xy = 1

Giải

x(2 – 3y) – 5/3. (2 – 3y) = 1 – 10/3 $\Leftrightarrow$ (3x – 5)(3y – 2) = 7 từ đây ta có các nghiệm là

(4,1) và (2,3).

4. Một vài phương pháp thường sử dụng khi giải phương trình nghiệm nguyên

4.1. Đưa về tổng các bình phương

Ví dụ. Giải phương trình $x^2 - 6xy + 14y^2 - 10y - 16 = 0$

Giải.

phương trình $\Leftrightarrow (x - 3y)^2 + 5(y - 1)^2 = 21$

$\Rightarrow 5(y-1)^2 \le 21 \Rightarrow (y-1)^2 = 0, 1, 4$

$(y-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-3y)^2 = 21$ (loại)

$(y-1)^2 = 1 \Rightarrow (x-3y)^2 = 16$ ta có các nghiệm (4,0),(–4,0), (10,2),(2,2)

$(y-1)^2 = 4 \Rightarrow (x-3y)^2 = 1$ ta có các nghiệm (10,3),(8,3),(–2,–1),(–4,–1)

4.2. Đưa về tích số bằng 0.

Ví dụ. Giải phương trình $6x^2 - 10xy + 4y^2 + 3x - 2y - 32 = 0$

Giải.

Phương trình $\Leftrightarrow (2x-2y+1)(3x-2y) = 32$

Do $2x - 2y + 1$ là số lẻ nên $2x - 2y + 1$ bằng ± 1 từ đây ta có các nghiệm (32,32), (– 30, – 29)

4.3. Dùng các tính chất chia hết, đồng dư.

Ví dụ. Giải phương trình $3x^2 - 2008y^2 = 2009$

Giải.

Nhận xét nếu x chẵn thì $x^2 \equiv 0 \bmod 4$ còn nếu x lẻ thì $x^2 \equiv 1 \bmod 4$, tức là một số chính phương đồng dư với 0 hoặc 1 modulo 4.

Ta thấy vế trái của phương trình luôn đồng dư với 0 hoặc 3 mod 4 còn vế phải đồng dư với 1 mod 4 như vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ. Giải phương trình $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$

Giải.

$x^3 \equiv 0, 1, -1 \bmod 7 \Rightarrow x^3 + 21y^2 + 5 \equiv 5, 6, 4 \bmod 7 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ. Giải phương trình $5x^2 + 6x + 11 = y^2 + 4y$

Giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 4x^2 + (x+3)^2 + 6 = (y+2)^2$

Vế trái đồng dư 2, 3 mod 4, vế phải đồng dư 0, 1 mod 4 $\Rightarrow$ phương trìnhvô nghiệm

Ví dụ. Giải phương trình $6^x = y^2 + y - 2$

Giải.

$6^x \equiv 1 \bmod 5$

$y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2) \equiv 0,3,4 \bmod 5 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Ví dụ. Giải phương trình $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$

Giải.

Từ phương trình ta thấy x phải lẻ $\Rightarrow x = 2k + 1 \Rightarrow (2k+1)^2 = 2y^2 - 8y + 3$

$\Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 2y^2 - 8y + 3 \Rightarrow 2k^2 + 2k = y^2 - 4y + 1$

$2k^2 + 2k = 2k(k+1) \vdots 4 \Rightarrow y^2 + 1 \vdots 4$ (vô lý) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

4.4. Dùng tính chất $A^n < X^n < (A+2)^n \Rightarrow X^n = (A+1)^n$

Ví dụ . Giải phương trình $x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$

Giải

Với $x < -1$ hay $x > 0$ ta có $x^3 < y^3 < (x+1)^3 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Với $x = 0$ ta có nghiệm $(0,1)$

Với $x = -1$ ta có nghiệm $(-1, 0)$

Ví dụ. Giải phương trình $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$

Giải.

phương trình $\Leftrightarrow (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2$

Đặt $m = x^2 + 8x$ ta có $m^2 + 7m = y^2$

Nếu $m > 9$ thì $(m+3)^2 < y^2 < (m+4)^2 \Rightarrow$ vô nghiệm

Nếu $m \le 9$ thì $-9 \le x \le 1$. Bằng cách thử trực tiếp ta có các nghiệm $(-9,\pm 12),(-8,0),(-7,0),(-4,\pm 12),(-1,0),(0,0),(1,\pm 12)$

4.5. Dùng tính chất bị chặn

Ví dụ. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Giải.

Giả sử $x \le y \le z \Rightarrow 1 \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow x = 1,2,3$

* $x = 1$ (loại)

* $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le 4 \Rightarrow y = 2,3,4$

$y = 2$(loại)

$y = 3 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{6} \Rightarrow z = 6$

$y = 4 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{4} \Rightarrow z = 4$

* $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 3$

Vậy nghiệm của phương trình là (2;3;6), (2,4,4), (3,3,3) và các hoán vị của chúng.

4.6. Phương pháp xuống thang

Ví dụ. Giải phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

Giải

$2xyz$ chẵn $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2$ chẵn $\Rightarrow$ trong 3 số x^2, y^2, z^2 có 1 chẵn, 2 lẻ hoặc 3 chẵn

Giả sử x^2 chẵn, y^2 và z^2 lẻ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \mod 4$ trong khi đó $2xyz \equiv 0 \mod 4$ (vô lý)

$\Rightarrow x^2$, y^2, z^2 đều chẵn $\Rightarrow x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$

Bằng cách lý luận tương tự ta có $x = 2^k x_k$, $y = 2^k y_k$, $z = 2^k z_k$ và $x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = 2^{k+1}x_ky_kz_k$

Nếu x khác 0 thì đến một lúc nào đó x_k lẻ (vô lý)

Vậy $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

4.7. Phương pháp xây dựng nghiệm (chỉ ra một họ nghiệm nào đó của phương trình)

Ví dụ. Chứng tỏ phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ có vô số nghiệm
Họ nghiệm của phương trình là $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$

Ví dụ. Chứng tỏ phương trình $x^2 + y^2 = z^2 + 3$ có vô số nghiệm

Giải.

Thay $z = y + 1$ ta có $x^2 = 2y + 4$
Chọn $x = 2k \Rightarrow y = 2k^2 - 2$
Vậy họ nghiệm của phương trình là $(2k, 2k^2 - 2, 2k^2 - 1)$

Ví dụ. Chứng tỏ phương trình $x^2 + y^3 = z^5$ có vô số nghiệm

Giải.

$x = 2^{\frac{m}{2}}, y = 2^{\frac{m}{3}}, z = 2^{\frac{m+1}{5}}$. Chọn m sao cho $m \vdots 2$, $m \vdots 3$ và $m + 1 \vdots 5$
$\Rightarrow m = 6(5k + 4)$

5. Phương trình Pytagore $x^2 + y^2 = z^2$

Gọi $d = (x,y) \Rightarrow x = da$, $y = db$ và $(a,b) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = (z/d)^2$
Đặt $z = dc$ $(c \in Q) \Rightarrow c^2 \in N \Rightarrow c \in Z$
Nếu a, b cùng lẻ thì $a^2 + b^2 \equiv 2 \bmod 4 \Rightarrow c^2 \equiv 2 \bmod 4$ (vô lý)
Vậy a, b khác tính chẵn lẻ. Giả sử a lẻ, b chẵn $\Rightarrow$ c lẻ.

$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2}.\frac{c-a}{2}$ với $\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{c+a}{2} = m^2, \frac{c-a}{2} = n^2 \Rightarrow c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$\begin{cases} x = (m^2 - n^2)d \\ y = 2mnd \\ z = (m^2 + n^2)d \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2mnd \\ y = (m^2 - n^2)d \\ z = (m^2 + n^2)d \end{cases} \quad \text{với } (m,n) = 1$$

6. Phương trình Pell $x^2 - dy^2 = 1$ (d là số không chính phương) (1)

Trong phần này ta chỉ xét nghiệm nguyên dương.

Định nghĩa. Giả sử (x,y) và (x',y') là 2 nghiệm của (1). Ta thấy rằng nếu x < x' thì y < y' hoặc ngược lại. Như vậy trên tập các nghiệm của phương trình ta xây dựng được quan hệ thứ tự $(x,y) < (x',y') \Leftrightarrow x < x'$

Định lý 1. Phương trình (1) có vô số nghiệm

Định lý 2.

Nếu (a,b) là nghiệm nhỏ nhất củA (1) và $\left(a + b\sqrt{d}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{d}$ (*) với n là số nguyên dương thì (x_n, y_n) là nghiệm của (1).

Chứng minh.

$$(a+b\sqrt{d})^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}(b\sqrt{d}) + C_n^2a_n^{n-2}(b\sqrt{d})^2 + ... = x_n + y_n\sqrt{d}$$
$$(a-b\sqrt{d})^n = C_n^0a^n - C_n^1a^{n-1}(b\sqrt{d}) + C_n^2a_n^{n-2}(b\sqrt{d})^2 - ... = x_n - y_n\sqrt{d} \quad (**)$$

Từ (**) $\Rightarrow$ $(x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (a^2 - db^2)^n = 1 \Rightarrow x_n^2 - dy_n^2 = 1 \Rightarrow (x_n, y_n)$ là nghiệm của (1).

Ta chứng minh điều ngược lại: nếu (u, v) là một nghiệm của (1) thì $u+v\sqrt{d}$ có dạng (*)

Giả sử $u+v\sqrt{d} \neq (a+b\sqrt{d})^n$ với mọi n nguyên dương.

Ta có 1 < $a+b\sqrt{d} < u+v\sqrt{d}$

Do dãy số $a+b\sqrt{d}, \left(a+b\sqrt{d}\right)^2, \left(a+b\sqrt{d}\right)^3, ...$ không bị chặn trên nên tồn tại số nguyên dương N sao cho $(a+b\sqrt{d})^N < u+v\sqrt{d} < (a+b\sqrt{d})^{N+1}$

$$\Rightarrow 1 < \frac{u+v\sqrt{d}}{(a+b\sqrt{d})^N} < a+b\sqrt{d}$$

$\Rightarrow$ 1 < $(u+v\sqrt{d})(x_N - y_N\sqrt{d}) < a+b\sqrt{d}$ (x_N, y_N) là nghiệm của (1)

$\Rightarrow$ 1 < $ux_N - vy_Nd + (vx_N - uy_N)\sqrt{d} < a+b\sqrt{d}$

$\Rightarrow$ 1 < $U+V\sqrt{d} < a+b\sqrt{d}$ với $U = ux_N - vy_Nd$, $V = vx_N - uy_N$

$\Rightarrow$ $U^2 - dV^2 = (ux_N - vy_N)^2 - d(vx_N - uy_N)^2 = ({x_N}^2 - d{y_N}^2)(u^2 - dv^2) = 1$

$\Rightarrow$ (U,V) thỏa (1) và $\left(U+V\sqrt{d}\right)\left(U-V\sqrt{d}\right) = 1$

Từ $U+V\sqrt{d} > 1 \Rightarrow 0 < U-V\sqrt{d} < 1 \Rightarrow U > 0$ và $V > 0$

$\Rightarrow U+V\sqrt{d} < a+b\sqrt{d}$ (mâu thuẩn với (a,b) là nghiệm nhỏ nhất của (1))

Định lý đã được chứng minh.

Ta cũng có thể biểu diễn các nghiệm của (1) bởi công thức

$$x_n = \frac{\left(a+b\sqrt{d}\right)^n + \left(a-b\sqrt{d}\right)^n}{2}$$
$$y_n = \frac{\left(a+b\sqrt{d}\right)^n - \left(a-b\sqrt{d}\right)^n}{2\sqrt{d}}$$
với n là số nguyên bất kỳ

Hoặc $\begin{matrix} x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n \\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n \end{matrix}$ với $(x_o, y_o) = (1,0)$ và $(x_1, y_1) = (a.b)$

Ví dụ . Giải phương trình $x^2 - 5y^2 = 1$

Giải. Ta có nghiệm nhỏ nhất là (9,4). Nghiệm của phương trình được tính bởi công thức $x_{n+2} = 18x_{n+1} - x_n$, $y_{n+2} = 18y_{n+1} - y_n$ với $(x_o, y_o) = (1,0)$ và $(x_1, y_1) = (9,4)$

7. Phương trình $x^2 - dy^2 = n$ (n là số tự nhiên) (2)

Ta gọi phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ là phương trình liên kết với (2) có (a,b) là nhiệm nhỏ nhất

Định lý 3.

Phương trình (2) hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm

Định lý 4.

Nếu (α_i,β_i) , i = 1,2,.., m là các nghiệm của (2) thỏa mãn $\beta_i^2 \le \max\left\{nb^2, \frac{-na^2}{d}\right\}$ thì các cặp $(x_{n,i}, y_{n,i})$ sau đây sẽ vét hết các nghiệm của (2):

$$\begin{array}{ll} x_{n+1,i} = ax_{n,i} + dby_{n,i}, & x_{o,i} = \alpha_i \\ y_{n+1,i} = bx_{n,i} + ay_{n,i}, & y_{o,i} = \beta_i \end{array} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Ví dụ. Giải phương trình $x^2 - 5y^2 = -4$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình liên kết $x^2 - 5y^2 = 1$ là (9,4)

$y^2 \le -(-4)9^2/5 = 64{,}8 \Rightarrow y \le 8 \Rightarrow$ các cặp nghiệm ban đầu là (1,1), (4,2), (11,5)

Vậy nghiệm của phương trình là

$x_{n+1} = 9x_n + 20y_n$, $y_{n+1} = 4x_n + 9y_n$ với (x_0,y_0) = (1,1), (4,2) ,(11,5)

8. Phương trình $Ax^2 - By^2 = n$ (A > 1, AB không chính phương) (3)

Ta gọi phương trình $x^2 - ABy^2 = 1$ là phương trình liên kết với (3) có (a,b) là nghiệm nhỏ nhất.

Định lý 5. Phương trình (3) hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm

Định lý 6.

Nếu (α_i,β_i), i = 1,2,.., m là các nghiệm của (3) thỏa mãn $\beta_i^2 \le \max\left\{Anb^2, \frac{-na^2}{B}\right\}$ thì các cặp $(x_{n,i}, y_{n,i})$ sau đây sẽ vét hết các nghiệm của (3):

$$\begin{array}{ll} x_{n+1,i} = ax_{n,i} + Bby_{n,i}, & x_{o,i} = \alpha_i \\ y_{n+1,i} = Abx_{n,i} + ay_{n,i}, & y_{o,i} = \beta_i \end{array} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Ta có thể biểu diễn công thức trên dưới dạng truy hồi

$$\begin{array}{l} x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n \\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n \end{array} \text{ với } \begin{array}{l} x_0 = \alpha, x_1 = a\alpha + Bb\beta \\ y_0 = \beta, y_1 = a\beta + Ab\alpha \end{array}$$

Ví dụ. Giải phương trình $3x^2 - 2y^2 = 1$

Giải.

phương trình liên kết $x^2 - 6y^2 = 1$ có nghiệm nhỏ nhất là (a,b) = (5,2)

$y^2 < 3.1.2^2 = 12 \Rightarrow y \le 3$. Ta có nghiệm ban đầu là (1,1)

Vậy nghiệm của phương trình là $x_{n+2} = 10x_{n+1} - x_n$, $y_{n+2} = 10y_{n+1} - y_n$ với (x_0,y_0) = (1,1) ,(x_1,y_1) = (9,11)

BÀI TẬP

1) Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $2x + 3y = 156$

b) $3xy + x - y = 1$

c) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$

d) $x^3 - y^3 = 91$

e) $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

2) Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên .Biết rằng f(1).f(2) = 35.Chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên.

3) Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $3x^2 - 4y^2 = 13$

b) $19x^2 + 28y^2 = 2001$

c) $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$

d) $x^5 - 5x^3 + 4x = 24(5y + 1)$

e) $3x^5 - x^3 + 6x^2 - 18x = 2001$

4) Tìm 3 số nguyên dương sao cho tích của chúng gấp đôi tổng của chúng

5) Tìm 4 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

6) Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình :

a) $x^2 + xy + y^2 = 2x + y$

b) $x^2 + xy + y^2 = x + y$

c) $x^2 - 3xy + 3y^2 = 3y$

d) $x^2 - 2xy + 5y^2 = y + 1$

7) Tìm các số tự nhiên sao cho $2^x + 3^x = 35$

8) Tìm các số nguyên x,y sao cho $x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$

9) Tìm các nghiệm nguyên dương : $x! + y! = (x + y)!$

10) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $3x^2 + 4y^2 = 6x + 13$

11) Có tồn tại hay không hai số nguyên dương x , y sao cho $x^2 + y$ và $y^2 + x$ đều là số chính phương

12) Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình :

a) $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$

b) $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$

c) $x^4 - 2y^2 = 1$

d) $x^3 - 3y^3 = 9z^3$

e) $x^2 + y^2 = 3z^2$

f) $x^2 + y^2 = 6(z^2 + t^2)$

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

13) a) Giải phương trình $x^2 + y^2 = 7z^2$

b) Chứng minh rằng số 7 không viết được dưới dạng tổng các bình phương của 2 số hữu tỉ

14) Tìm các nghiệm nguyên :

a) $xy - 2y - 3 = 3x - x^2$

b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$

c) $x^2 + y^2 - x - y = 8$

d) $7(x^2 + xy + y^2) = 39(x + y)$

e) $3(x^2 - xy + y^2) = 7(x + y)$

f) $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$

g) $8y^2 - 25 = 3xy + 5z$

h) $7x^2 - 5y^2 = 3$

15) Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm nguyên $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

16) Tìm nghiệm nguyên dương :

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6xy} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} = \frac{1}{2}$

17) Tìm nghiệm nguyên $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$

18) Tìm 3 số nguyên dương x,y,z sao cho $xy + 1 \vdots z$, $xz + 1 \vdots y$, $yz + 1 \vdots x$

19) Tìm điều kiện của a để các nghiệm của phương trình đều là số nguyên :

a) $x^2 - ax + a + 2 = 0$

b) $x^2 + ax + 6a = 0$

c) $x^2 + a^2x + a - 1 = 0$

20) Tìm các số nguyên a và b sao cho a + b = 25 và các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ là số nguyên.Tìm các nghiệm đó.

21) Giải phương trình

a) $x^2 - 7y^2 = 1$

b) $x^2 - 15y^2 = 1$

c) $3x^2 - 5y^2 = 7$

22) Hãy chứng minh các tính chất của bộ ba số Pitagore :

a) Tồn tại 1 số là bội của 3

b) Tồn tại 1 số là bội của 4

c) Tồn tại 1 số là bội của 5