Nguyên lý cực hạn và phương trình Diophant

Cao Trần Tứ Hải
Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận

Trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế thông thường các bài toán về phương trình Diophant là những bài toán khó vì tính không mẫu mực và các bài giải rất tinh tế. Bài viết này giới thiệu một phương pháp như vậy, phương pháp cực hạn, để giải một số phương trình nghiệm nguyên.

Nội dung cơ bản của nguyên lý này như sau. Trong tập hợp hữu hạn các số thực bao giờ cũng tồn tại một số thực lớn nhất và một số thực nhỏ nhất. Đối với tập vô hạn, thì nguyên lý này áp dụng cho tập con của tập số tự nhiên: Một tập hợp con khác rỗng bất kỳ của tập hợp số tự nhiên luôn có phần tử nhỏ nhất. Thông thường, trong giải các bài toán sơ cấp, nguyên lý này được sử dụng cùng với phương pháp phản chứng.

Để hiểu rõ vận dụng nguyên lý cực hạn vào giải phương trình Diophant, ta bắt đầu bằng bài toán đơn giản sau đây.

Bài toán 1.

Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + 5^2 - 2xyz = 0 \tag{1}$$

(Korean Mathemntical Olympiad)

Giải.

Ta chứng minh (1) có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Giả sử (1) có nghiệm nguyên khác không, gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm sao cho $|x_0|$ nhỏ nhất.

Nếu x_0, y_0, z_0 cùng lẻ thì $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0z_0$ (vô lý) lẻ nên tập $\{x_0, y_0, z_0\}$ có ít nhất một số chẵn (giả sử z_0 chẵn) khi đó $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \pmod 4$ nên x_0, y_0 cũng chẵn. Do đó $\left(\frac{x_0}{2}; \frac{y_0}{2}; \frac{z_0}{2}\right)$ là nghiệm của (1) (mâu thuẫn với cách chọn (x_0, y_0, z_0)).

Sau đây là một số bài toán vận dụng nguyên lý cực hạn tinh vi hơn.

Bài toán 2.

Cho x, y, z là các số nguyên dương sao cho

$$xy - z^2 = 1 \text{ (2)}. \tag{2}$$

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên không âm a, b, c, d sao cho

$$x = a^2 + b^2, \quad y = c^2 + d^2, \quad z = ac + bd$$

(20^{th} IMO Shortlist)

Giải.

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử tồn tại bộ ba số nguyên dương (x_0, y_0, z_0) sao cho không tồn tại a, b, c, d thỏa mãn $x_0 = a^2 + b^2$, $y_0 = c^2 + d^2$, $z_0 = ac + bd$.

Chú ý rằng, nếu $x_0 = 1$ thì $x_0 = 0^2 + 1^2$, $y_0 = 1^2 + k^2$, $z_0 = 0.1 + 1.k$.

Nên ta có thể giả sử thêm $2 \leq x_0 \leq y_0$ và z_0 nhỏ nhất.

Sau đây chúng ta xây dựng bộ ba số nguyên dương khác với (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn (2).

Đặt $z = x + u$ phương trình (2) trở thành

$$xy - (x^2 + 2xu + u^2) = 1 \Leftrightarrow x(y - x - 2u) - u^2 = 1$$

Vì $u = z - x$ nên $y - x - 2u = x + y - 2z$. Do đó

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, x_0 + y_0 - 2z_0, z_0 - x_0)$$

là bộ ba cần xây dựng . Ta thấy $x_1, y_1, z_1 \geq 1$, thật vậy

$$z_0^2 = x_0y_0 - 1 < x_0y_0 \leq \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)^2 \Rightarrow z_0 < \frac{x_0 + y_0}{2} \Rightarrow y_1 \geq 1$$

$$z_0^2 = x_0y_0 - 1 \geq x_0^2 - 1 \Rightarrow z_0 \geq x_0 - 1$$

Nếu $z_0 = x_0 - 1$ thì từ (2) suy ra $x_0(y_0 - x_0 + 2) = 2$. Điều này mâu thuẫn với $y_0 \geq x_0 \geq 2$.

Nếu $z_0 = x_0$ thì thì từ (2) suy ra $x_0(y_0 - x_0) = 1$. Điều này mâu thuẫn với $x_0 \geq 2$.

Vì vậy $z_0 = z_0 - x_0 \geq 1$.

Như vậy ta đã xây dựng (x_1, y_1, z_1) là nghiệm nguyên dương của phương trình (2) thỏa $z_1 < z_0$. Do đó tồn tại các số nguyên không âm m, n, p, q sao cho

$$\begin{cases} x_1 = m^2 + n^2 \\ y_1 = p^2 + q^2 \\ z_1 = mp + nq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = m^2 + n^2 \\ x_0 + y_0 - 2z_0 = p^2 + q^2 \\ z_0 - x_0 = mp + nq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = m^2 + n^2 \\ y_0 = (p + m)^2 + (q + n)^2 \\ z_0 = m(p + m) + n(q + n) \end{cases}$$

Đến đây ta thấy điều mâu thuẫn với cách chọn (x_0, y_0, z_0).

Nguyên lý cực hạn không chỉ dừng lại ở việc chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên dương như các bài toán trên mà còn có thể sử dụng để chứng minh phương trình chỉ có nghiệm nguyên dương thỏa mãn công thức nào đó.

Chẳng hạn, chúng ta biết phương trình Pell loại I,

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{3}$$

với D là số tự nhiên không chính phương, có vô số nghiệm nguyên dương (u_n, v_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = a, v_1 = b \\ u_{n+1} = au_n + Dbv_n \\ v_{n+1} = bu_n + av_n \end{cases} \tag{4}$$

Trong đó (a, b) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất. Kết quả này được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp quy nạp toán học và hệ thức Wandetman nổi tiếng

$$(a - Db^2).(u_n^2 - Dv_n^2) = (au_n + Dbv_n)^2 - D(bu_n + av_n)^2.$$

Hơn nữa ta có

$$u_n + v_n\sqrt{b} = (a + b\sqrt{D})^n, \forall n \in N^*.$$

Giờ ta chứng minh

$$\{(\mathrm{u_n, v_n}) : \forall n \in N^*\}$$

là tất cả các nghiệm của phương trình (3).

Bài toán 3.

Chứng minh rằng mọi nghiệm phương trình (3) đều có dạng (u_n, v_n) với $n \in N^*$.

Giải. Giả sử (u, v) là nghiệm nguyên dương sao cho

$$(u, v) \neq (\mathrm{u_n, v_n}), \forall n \in N^*$$

với $(\mathrm{u_n, v_n})$ được xác định trong (4).

Khi đó tồn tại $m \in N^*$ sao cho $u_m + v_m\sqrt{D} < u + v\sqrt{D} < u_{m+1} + v_{m+1}\sqrt{D}$

$$\Leftrightarrow 1 < \left(u + v\sqrt{D}\right)(u_m - v_m\sqrt{D}) < a + b\sqrt{D}$$

$$\Leftrightarrow 1 < (uu_m - Dvv_m) + (u_m v - uv_m)\sqrt{D} < a + b\sqrt{D}$$

Đồng thời

$$(uu_m - Dvv_m)^2 - D(u_m v - uv_m)^2 = \left(u^2 - Dv^2\right)\left({u_m}^2 - D{v_m}^2\right) = 1$$

Nên

$$(uu_m - Dvv_m, u_m v - uv_m)$$

là nghiệm nguyên dương của (3) (mâu thuẫn với cách chọn (u, v)).

Bài toán 4.

Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước của $b^2 + 2$ và b là ước của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

$$v_1 = v_2 = 1 \text{ và } v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

(VMO 2012)

Giải.

Do a, b lẻ nên $(a, b) = 1$. Ta thấy $a^2 + b^2 + 2$ chia hết cho a và b nên tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$a^2 + b^2 + 2 = kab \tag{5}$$

Giả sử (a_0, b_0) là nghiệm nguyên dương của (4) với $a_0 + b_0$ nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_0 \geq b_0$.

Phương trình $a^2 - kb_0a + b_0^2 + 2 = 0$ có nghiệm a_0 nên theo định lý Viete, nó có một nghiệm nữa là

$$a_1 = kb_0 - a_0 = \frac{{b_0}^2 + 2}{a_0}.$$

Rõ ràng a_1 nguyên dương và (a_1, b_0) là nghiệm của (5).

Do đó

$$a_0 + b_0 \le a_1 + b_0 \Leftrightarrow a_0 \le kb_0 - a_0 \Leftrightarrow \frac{a_0}{b_0} \le \frac{k}{2}.$$

Mà

$${a_0}^2 + {b_0}^2 + 2 = ka_0b_0 \Leftrightarrow \frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{a_0} + \frac{2}{a_0b_0} = k \tag{6}$$

Sau đây ta sử dụng phương pháp phương trình Markov quen thuộc để chứng minh $k = 4$.

Từ (6) suy ra $k \le \frac{k}{2} + 1 + 2$ (vì $a_0 \ge b_0 \ge 1, \frac{a_0}{b_0} \le \frac{k}{2}$) nên $k \le 6$.

Hơn nữa, do ${a_0}^2 + {b_0}^2 \ge 2a_0b_0$ nên $k > 2$.

Nếu $k \ne 4$ thì $(a_0, b_0) \ne (1, 1)$ nên $a_0b_0 \ge 2$.

Từ (6)

$$\Rightarrow k \le \frac{k}{2} + 1 + 1 \Rightarrow k \le 4.$$

Nếu $k = 3$ thì ${a_0}^2 + {b_0}^2 + 2 = 3a_0b_0$ chia hết cho 3.

Nên có đúng một số trong hai số a_0, b_0 chia hết cho 3.

Dễ thấy $a_0 \ne 1$ và $b_0 \ne 1$ nên $a_0b_0 \ge 6$.

Từ (6) suy ra $k \le \frac{k}{2} + 1 + \frac{2}{6} \Leftrightarrow k \le \frac{8}{3}$ mà k nguyên dương nên $k \le 2$ (mâu thuẫn với $k > 2$). Như vậy các số tự nhiên lẻ a,b phải thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + 2 = 4ab \tag{7}$$

Tiếp theo ta mô tả tất cả các nghiệm của (7) thông qua cặp số hạng liên tiếp của dãy (v_n) bằng phương pháp sau đây được gọi là phương pháp gien.

$$(7) \Leftrightarrow b^2 - 8ab + 16a^2 + a^2 + 2 = 16a^2 - 4ab$$

$$\Leftrightarrow (4a - b)^2 + a^2 + 2 = 4(4a - b)a.$$

Do đó nếu (a, b) là nghiệm của (7) thì $(4a - b, a)$ cũng là nghiệm.

Từ đó, do $(v_2, v_1) = (1, 1)$ là nghiệm của (7) nên $(4v_2 - v_1, v_2) = (v_3, v_2)$ cũng là nghiệm. Bằng quy nạp toán học suy ra (v_{n+1}, v_n) và (v_n, v_{n+1}) là nghiệm của (7).

Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên lẻ (a, b) sao cho $\{a, b\} \ne \{v_{n+1}, v_n\}, \forall n \epsilon N^*$.

Ta chọn sao cho $a + b$ nhỏ nhất.

Nếu $a = b$ suy ra $a = b = 1$ nên $(a, b) = (v_2, v_1)$ (mâu thuẫn với cách chọn a, b).

Nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b > 1$.

Ta lại có $(7) \Leftrightarrow (4b - a)^2 + b^2 + 2 = 4(4b - a)b$.

nên $(4b - a, b)$ là nghiệm nguyên dương của (7).

Mà $a > b$ nên $ab - b^2 = b(a-b) \geq 3$

$$\Rightarrow 4b - a = \frac{b^2+2}{a} \leq \frac{ab-1}{a} < a \Rightarrow (4b-a) + b < a + b.$$

Do cách chọn (a, b) nên $\{4b - a, b\} = \{v_{n+1}, v_n\}$ với n nào đó.

Hơn nữa

$$a^2 - 4ab + 3b^2 = 2b^2 - 2 \geq 0$$
$$\Rightarrow (a-3b)(a+b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a - 3b \geq 0 \Rightarrow 4b - a \leq b.$$

Suy ra

$$\begin{cases} 4b - a = v_n \\ b = v_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow, \begin{cases} a = 4v_{n+1} - v_n = v_{n+2} \\ b = v_{n+1} \end{cases} \quad \text{(mâu thuẫn)}$$

Vậy điều giả sử trên sai, nghĩa là tồn tại số tự nhiên n sao cho $\{a, b\} = \{v_{n+1}, v_n\}$.

Để thấy được rõ hơn sự kết hợp nhuần nhuyễn phương pháp cực hạn và phương pháp phương trình Markov (còn gọi là phương pháp nhảy Viete), phương pháp gien trong giải phương trình Diophant, ta xét bài toán sau.

Bài toán 5.

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = xyz. \tag{8}$$

Giải.

Trước hết ta dùng phương pháp bước nhảy Viete để tìm z. Nếu $x = y$ thì

$$x(xz - 2x - 2) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{y} = 1 \\ \mathrm{z} = 5 \end{cases}$$

Gọi (x_1, y_1, z_1) là nghiệm thỏa $z_1 \neq 5$, khi đó $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{y}_1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\mathrm{x}_1\mathrm{y}_1$ và $\mathrm{x}_1 + \mathrm{y}_1$ nhỏ nhất.

Ta có phương trình

$$f(x) = x^2 - (y_1z_1 - 1)\,x + {y_1}^2 + y_1 + 1 = 0$$

có nghiệm x_1 nên nó có một nghiệm nữa là

$$x_2 = y_1z_1 - x_1 - 1 = \frac{{y_1}^2 + y_1 + 1}{x_1}$$

. nguyên dương.

Mà $x_1 > y_1 + 1$ nên

$$ {x_1}^2 > {y_1}^2 + y_1 + 1 = x_1\,(y_1z_1 - x_1 - 1) = x_1x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$$

Vì vậy $(x_1, y_2, z_2), (x_2, y_1, z_1)$ là nghiệm nguyên dương thỏa $x_2 + y_2 < x_1 + y_1$.
(mâu thuẫn với cách chọn (x_1, y_1, z_1))
Đến đây bài toán trở thành tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = 5xy. \tag{9}$$

Rõ ràng x, y cùng lẻ. Đặt $u = \dfrac{3x-1}{2}$, $v = \dfrac{3y-1}{2}$ phương trình (9) trở thành

$$u^2 - 5uv + v^2 = -3 \Leftrightarrow v^2 - 5v(5v-u) + (5v-u)^2 = -3.$$

Lập luận tương tự như bài toán 4, phương trình này có nghiệm thỏa $\{u, v\} = \{v_{n+1}, v_n\}$ với (v_n) xác định bởi

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = 1 \\ v_{n+1} = 5v_n - v_{n-1}, n > 1 \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta được $2v_n + 1 \ldots 3, \forall n$. Vậy phương trình (8) có nghiệm

$$(x, y, z) = (\frac{2u+1}{3}, \frac{2v+1}{3}, 5)$$

với $\{u, v\} = \{v_{n+1}, v_n\}$ và (v_n) được xác định như trên.

Đến đây ta thấy các bài toán trên có nghiệm liên quan đến dãy số. Sau đây ta thử sáng tạo ra các bài toán về phương trình Diophant bằng cách xét dãy số sau:

$$u_1 = \alpha, u_2 = \beta, u_{n+2} = au_{n+1} - u_n + b, \forall n \geq 1.$$

Ta có $\dfrac{u_{n+2} + u_n - b}{u_{n+1}} = a$. Suy ra

$$\frac{u_{n+2} + u_n - b}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1} - b}{u_n}$$

$$\Leftrightarrow (u_{n+2} + u_n - b)\, u_n = (u_{n+1} + u_{n-1} - b)u_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2}u_n + {u_n}^2 - bu_n = {u_{n+1}}^2 + u_{n-1}u_{n+1} - bu_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow {u_n}^2 - u_{n+1}u_{n-1} - bu_n = {u_{n+1}}^2 - u_{n+2}u_n - bu_n$$

$$\Leftrightarrow {u_n}^2 - (au_n - u_{n-1} + b)\, u_{n-1} - bu_n = {u_{n+1}}^2 - (au_{n+1} - u_n + b)\, u_n - bu_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow {u_n}^2 + {u_{n-1}}^2 - au_nu_{n-1} - b\,(u_n + u_{n-1}) = {u_{n+1}}^2 + {u_n}^2 - au_{n+1}u_n - b(u_{n+1} + u_n)$$

Do đó

$${u_{n+1}}^2 + {u_n}^2 - au_{n+1}u_n - b\,(u_{n+1} + u_n) = {u_2}^2 + {u_1}^2 - au_2u_1 - b(u_2 + u_1)$$

hay

$${u_{n+1}}^2 + {u_n}^2 - au_{n+1}u_n - b\,(u_{n+1} + u_n) = \alpha^2 + \beta^2 - a\alpha\beta - b\,(\alpha + \beta).$$

Thay u_{n+1}, u_n bằng x, y và chọn các tham số a, b, α, β bằng các số cụ thể ta được phương trình Diophant giải được bằng phương pháp cực hạn. Chẳng hạn, khi $a = 4, b = 0, \alpha=\beta=1$ ta được phương trình (7) ở bài toán 4. Khi $a = 5, b = -1, \alpha=\beta=1$ ta được phương trình (9) trong cách giải bài toán 5.

Sau đây là một số phương trình Diophant như vậy.

Giải các phương trình sau trên tập số tự nhiên :

1. $\dfrac{x^2 + y^2}{xy - 1} = 5$
2. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5(xy + 1)$
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$
4. $(x + y - 5)^2 = 9xy$

Bài tập rèn luyện

1. Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ được xác định như sau:

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, x_0 = 1, x_1 = 4;$$

$$y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n, y_0 = 1, y_1 = 2.$$

a) Chứng minh rằng $x_n^2 - 5y_n^2 = -4$ với mọi số tự nhiên n.

b) Giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa $a^2 - 5b^2 = -4$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho $x_k = a$ và $y_k = b$.

(VMO 1999)

2. Tìm giá trị lớn nhất của $m^2 + n^2$ biết rằng m, n là số nguyên nằm giữa 1 và 1981 đồng thời thỏa mãn $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

(22^{nd} IMO)

3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình $x + y + u + \varphi = \sqrt[n]{xyuv}$ có nghiệm nguyên dương x, y, u, v.

(VMO 2002 Bảng A)

4. Giải phương trình sau trong tập các số nguyên dương:

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz.$$

5. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) sao cho $(m + n - 5)^2 = 9mn$.

(42^{nd} USA Team Selection Test)

Tài liệu tham khảo

[1] HÀ HUY KHOÁI, Số học, Nhà xuất bản Giáo dục. [2] TRẦN NAM DŨNG, Nguyên lý cực hạn, tài liệu từ Internet. [3] TITU ANDREESCU, DORIN ANDRICA, An introduction to Diophantinc equations.