Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

Trường THPT Chuyên KHTN

VẺ ĐẸP PHẦN NGUYÊN TỪ NHỮNG TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Nhóm học sinh lớp 10A1 Toán
Chu Tuấn Anh
Ngô Việt Hải
Phạm Huy Hoàng
Trần Đăng Phúc
Nguyễn Phan Tài Vương

Giáo viên hướng dẫn
Thầy *Hoàng Ngọc Minh*

Hà Nội – Tháng 4 năm 2011

Lời giới thiệu

Trong các kì thi tuyển chọn học sinh giỏi toàn quốc, quốc tế, các bài toán số học thường đóng vai trò quan trọng. Nhiều năm vừa qua, những bài toán số học thường là về các bài toán phần nguyên (như kì thi chọn đội tuyển toán Việt Nam năm 2011). Vì vậy nhóm học sinh lớp 10A1 Toán chúng em viết chuyên đề này để nêu ra các ý kiến, kinh nghiệm và một số kết quả về phần nguyên. Trong chuyên đề chúng em có chia làm các mục sau:

1. Một số ứng dụng của định lý Legendre.
2. Một số bài toán về tổng phần nguyên.
3. Một số bài toán ứng dụng.

Tuy chuyên đề đã được chỉnh sửa bởi những thành viên trong nhóm cũng như bởi thầy giáo hướng dẫn song khó tránh khỏi sai sót. Chúng em xin chân thành cảm ơn những đóng góp từ các thầy cô giáo và các bạn học sinh. Mọi ý kiến đóng góp gửi về địa chỉ `anhemkhtn01@gmail.com`.

Nhóm 1 lớp 10A1 Toán

Mục lục

1 Một vài kiến thức cơ bản về phần nguyên

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. *Cho x là một số thực. Ta kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x là $\lfloor x \rfloor$, và đọc là "phần nguyên của số thực x".*

Định nghĩa 1.1.2. *Kí hiệu $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ là* phần lẻ *của số thực x.*

1.2 Tính chất cơ bản

Nhờ định nghĩa 1.1.1 ta rút ra được những tính chất cơ bản sau:

1. $\lfloor x \rfloor \leq x$ và từ đó ta cũng có được hai bất đẳng thức sau:

   (a)
   $$\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor \leqslant \left\lfloor \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor \tag{1}$$

   (b)
   $$\prod_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor \leqslant \left\lfloor \prod_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor$$

2. $$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor \tag{2}$$

   Áp dụng đẳng thức (2) ta có kết quả tổng quát sau:

   Định lý 1.2.1 (Đồng nhất thức Hermite)**.**
   $$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + ... + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

3. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $a + b \in \mathbb{Z}$ nhưng $ab \notin \mathbb{Z}$. Khi đó ta có đẳng thức sau:
   $$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor = a + b - 1. \tag{3}$$

4. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $a - b \in \mathbb{Z}$ nhưng $a, b \notin \mathbb{Z}$. Khi đó ta có đẳng thức sau:
   $$\lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor = a - b. \tag{4}$$

5. Giả sử $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Lúc đó $\left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor$ là số tất cả các số nguyên dương là bội của n nhưng không vượt quá α.

2 Một số ứng dụng của phần nguyên

2.1 Định lý Legendre

2.1.1 Một số tính chất cơ bản của định lý

Gọi $e_p(n)$ là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của n. Khi đó ta có các tính chát sau:

1. $e_p(n)$ là hàm số cộng tính:

$$e_p\left(n_1 n_2\right) = e_p\left(n_2\right) + e_p\left(n_2\right) \tag{5}$$

2. Gọi $\tau_p\left(n\right)$ là số các cặp số tự nhiên có thứ tự (α, m) sao cho $p^\alpha m = n$. Khi đó

$$e_p\left(n\right) = \tau_p\left(n\right) \tag{6}$$

Hai tính chất trên gần như hiển nhiên và có thể chứng minh trực tiếp từ định nghĩa. Áp dụng hai tính chất này ta sẽ chứng minh được một số kết quả đẹp sau đây:

Định lý 2.1.1 (Định lý Legendre)**.** *Số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $n!$ là:*

$$e_p\left(n!\right) = \sum_{\alpha>0} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \tag{7}$$

Lời giải. Ta sẽ sử dụng hai tính chất (6) và (7) để chứng minh định lý này. Ta có

$$\begin{aligned} e_p\left(n!\right) &= \sum_{k\leqslant n} e_p(k) = \sum_{k\leqslant n} \tau_p\left(k\right) = \sum_{k\leqslant n} \sum_{\substack{(\alpha,m)\\ p^\alpha m = k}} 1 \\ &= \sum_{\substack{(\alpha,m)\\ p^\alpha m \leqslant n}} 1 = \sum_{\alpha>0} \sum_{m\leqslant \frac{n}{p^\alpha}} 1 \\ &= \sum_{\alpha>0} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \end{aligned}$$

□

Chứng minh sử dụng hai hệ thứ (6) và (7) cho ta cách nhìn mới về phép chứng minh định lý Euclide về số nguyên tố:

Định lý 2.1.2 (Định lý Euclide)**.** *Tồn tại vô hạn số nguyên tố.*

Trước hết ta có một số nhận xét sau:
Nhận xét. Sử dụng kí hiệu $e_p\left(n\right)$ ta có:

$$n! = \prod_{p|n!} p^{e_p(n!)} = \prod_{p\leqslant n} p^{e_p(n!)} \tag{8}$$

Nhận xét. Sử dụng định lý Legendre và tính chất của phần nguyên ta có bất đẳng thức sau:

$$e_p\left(n!\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor < n.\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{n}{p^\alpha} = \frac{n}{p-1} \tag{9}$$

Ta sẽ áp dụng vào chứng minh định lý Euclide:

Lời giải. Giả sử có hữu hạn số nguyên tố p. Thay (8) vào (9) ta có được bất đẳng thức sau:

$$n! \leqslant \prod_{p \leqslant n} p^{\frac{n}{p-1}}$$

hoặc là

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \prod_{p \leqslant n} p^{\frac{1}{p-1}} \tag{10}$$

Nhưng theo một kết quả quen thuộc ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ mà chỉ có hữu hạn số nguyên tố p nên khi ta cho $n \to +\infty$ ở cả hai vế của bất đẳng thức (10) ta có vế trái tiến đến $+\infty$ còn vế phải tiến đến một hằng số. Điều đó dẫn đến mâu thuẫn. □

Bất đẳng thức (9) có rất nhiều ứng dụng và ta sẽ xem xét các bài toán liên quan đến bất đẳng thức này trong phần tiếp theo.

2.1.2 Ứng dụng của định lý Legendre trong các bài toán

Ứng dụng trong chia hết của định lý Legendre

Bài toán 2.1.1. *Giả sử m, n là hai số tự nhiên sao cho m không có ước nguyên tố nào bé hơn hoặc bằng n. Chứng minh rằng:*

$$M = \prod_{i=1}^{n-1} \left(m^i - 1\right) \vdots n!$$

Lời giải. Xét p là một số nguyên tố bất kì, $p \leq n$. Theo giả thiết ta có $\gcd(m, p) = 1$ nên theo định lý Fermat nhỏ thì $m^{k(p-1)} - 1 \vdots p$ với mọi số nguyên dương k. Vì số các bội số của $p - 1$ không vượt quá $n - 1$ là $\left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$ nên $e_p(M) \geqslant \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$.
Theo bất đẳng thức (9), số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $n!$ là:

$$e_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{n}{p-1}$$

Ta sẽ chứng minh $e_p(n!) < e_p(M)$.
Giả sử $n-1 = t(p-1)+s, t = \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor, 0 \leq s < p-1$.
Khi đó
$$n = t(p-1)+s+1 \Rightarrow \frac{n}{p-1} = t + \frac{s+1}{p-1} \leq t+1 = \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor + 1$$
Từ đó ta nhận được: $e_p(n!) < e_p(M)$ với mọi p nguyên tố, hay $M \vdots n!$. □

Bài toán 2.1.2. *Tìm $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:* $2^{n-1} | n!$.

Chứng minh. Ta chia bài toán thành các trường hợp sau:

1. Nếu $n = 2m+1$ ta có: $(2m+1)! \vdots 2^{2m}$. Khi đó:
$$\begin{aligned} e_2((2m+1)!) &= e_2((2m)!) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2m}{2^k} \right\rfloor \\ &< \frac{2m}{2-1} \\ \text{(Theo bất đẳng thức (9))} &= n-1 \end{aligned}$$
Như vậy với $n = 2m+1$ thì điều kiện đã cho không thỏa mãn.

2. Nếu $n = 2^t(2m+1)$, với $m, t \in \mathbb{N}^*$, ta có:
$$\begin{aligned} e_2(n!) &= e_2\left(2^t(2m+1)!\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2^t(2m+1)}{2^k} \right\rfloor < (2m+1).\sum_{i=0}^{t-1} 2^i + 2m \\ &= (2m+1)(2^t-1)+2m \\ &= n-1 \end{aligned}$$
Vậy khi $n = 2^t(2m+1)$ thì bài toán không thỏa mãn.

3. Nếu $n = 2^t$, ta có:
$$e_2(n!) = e_2\left(2^t\right) = 2^{t-1} + 2^{t-2} + ... + 2 + 1 = 2^t - 1 = n-1$$
Vậy khi $n = 2^t$ thì bài toán được thỏa mãn.
Kết luận. Khi $n = 2^t$ thì $2^{n-1} | n!$. □

Với cách làm tương tự ta có được đáp số cho bài toán sau:

$$\textit{Tìm } n \in \mathbb{N} \textit{ thỏa mãn: } 3^{n-1} | n!$$

Tuy nhiên khi thay tất cả các trường hợp $n = 3m+1, n = 3m+2, n = 3^t, n = 3^t(3m+1), n = 3^t(3m+2)$ thì tất cả các giá trị trên đều không thỏa mãn bài toán.
Từ hai trường hợp cụ thể ở trên ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 2.1.3. *Cho p là một số nguyên tố. Tìm $n \in \mathbb{N}$ sao cho: $n! \vdots p^{n-1}$*

Gợi ý. Làm tương tự hai bài toán trên, ta có:

1. Nếu $p = 2$, theo bài toán trên ta có $n = 2^t$ với t là nguyên dương.
2. Nếu p nguyên tố, $p \geq 3$, ta thấy không có n nào thỏa mãn điều kiện bài toán

□

Từ bài toán trên, nhận thấy số mũ $n-1$ của p chưa đủ "tốt" để bài toán thỏa mãn. Do đó ta có một bài toán mới như sau:

Bài toán 2.1.4. *Cho n là một số tự nhiên và p nguyên tố. Tìm k nguyên dương lớn nhất thỏa mãn: $n! \vdots p^k$*

Gợi ý. Để k lớn nhất thì n phải có dạng p^t (với t nguyên dương).
Do đó:

$$e_p(n!) \geqslant k \Rightarrow k \leqslant \sum_{i=0}^{t-1} p^i = \frac{p^t - 1}{p - 1}$$

Vậy giá trị lớn nhất của k là $\dfrac{p^t - 1}{p - 1}$ □

Ta có thể tổng quát hóa bài toán theo hướng sau:

Bài toán 2.1.5. *Cho p nguyên tố, $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương ($n \geq 1$). Tìm k nguyên dương lớn nhất thỏa mãn:*

$$a_1!a_2!...a_n! \vdots p^k$$

Đáp số. Giá trị lớn nhất của k là

$$k\max = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{i_j} p^{i_j - l}$$

trong đó i_j là số thỏa mãn: $a_j = p^{i_j}, \forall j = \overline{1, n}$ □

Bài toán 2.1.6. *Chứng minh rằng*

$$A = \frac{(3n)!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!} \in \mathbb{N}$$

với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Lời giải. Sử dụng định lý Legendre, tư tưởng chứng minh của bài toán sẽ là chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi p nguyên tố:

$$e_p\left((3n)!\right) \geqslant e_p\left(n!\right) + e_p\left((n+1)!\right) + e_p\left((n+2)!\right) \tag{11}$$

Thật vậy, áp dụng đẳng thức (2) ta có, với mọi số nguyên tố $p \geq 3$ thì:

$$\left\lfloor \frac{3n}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p} + \frac{2}{3} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{p} \right\rfloor$$

Vậy bất đẳng thức (11) đúng với mọi p nguyên tố lẻ. Với $p = 2$ dễ dàng thấy (11) đúng. Do đó với mọi $i \in \mathbb{N}$ ta có:

$$\left\lfloor \frac{3n}{p^i} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{p^i} \right\rfloor$$

Như vậy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{3n}{p^i} \right\rfloor \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2}{p^i} \right\rfloor$$

Do đó bất đẳng thức (11) được chứng minh, cho ta thấy được số mũ của p bất kì trong phân tích tiêu chuẩn của $(3n)!$ lớn hơn trong phân tích tiêu chuẩn của $n!\,(n+1)!\,(n+2)!$ nên $A \in \mathbb{N}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$. □

Nhận xét. Với phương pháp tương tự ta có được bài toán sau:

Bài toán 2.1.7. *Với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$ thì*

$$B = \frac{12.\,(5n)!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!\,(n+3)!\,(n+4)!} \in \mathbb{N}$$

Tổng quát hơn nữa ta sẽ có bài toán mở thú vị như sau:

Bài toán mở 2.1.8. *Tìm k, m tốt nhất sao cho $k + m \min$ thỏa mãn: với $p, n \in \mathbb{N}^*$, p là số nguyên tố thì:*

$$\frac{k.\,(n)!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!...\,(n+p-1)!} \in \mathbb{N}$$

Trong [5], có bài toán sau:

Bài toán 2.1.9 (IMO 1972)**.** *Cho $m, n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng:* $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!.n!.(m+n)!} \in \mathbb{N}$

Các bạn có thể tham khảo lời giải trong [5]. Nhân đây chúng tôi có bài toán mở khá thú vị, và chưa có lời giải:

Bài toán mở 2.1.10. *Tìm các số* <u>*thực dương*</u> m, n *thỏa mãn:*

$$\frac{(2\lfloor m \rfloor)!.(2\lfloor n \rfloor)!}{(\lfloor m \rfloor)!.(\lfloor n \rfloor)!.(\lfloor m+n \rfloor)!} \in \mathbb{N}$$

Bài toán 2.1.11 (Ứng dụng của nguyên lý so sánh số mũ với phương trình nghiệm nguyên)**.** *Giải phương trình nghiệm nguyên dương:* $(a-b)^{ab} = a^b.b^a$

Lời giải. Nếu gọi p là ước nguyên tố của a thì từ phương trình đã cho ta thấy $p|b$.

- Nếu a, b lẻ hoặc a, b khác tính chẵn lẻ: ta thấy hai vế của phương trình khác tính chẵn lẻ nên phương trình vô nghiệm
- Nếu a, b chẵn: Đặt $a = 2^\alpha.u, b = 2^\beta.v$ với u, v lẻ, $\alpha, \beta > 1$.
  1. Nếu $\alpha = \beta \Rightarrow$ số mũ của 2 trong $(a-b)^{ab}$ sẽ $\geq \alpha ab$.

     $$\Rightarrow \alpha b + \beta a = \alpha(a+b) \geq \alpha ab \geq \alpha(a+b)$$

     Từ đó ta có được $a = b = 2$ nhưng khi đó vế phải của phương trình bằng 4 còn vế trái bằng 0, mâu thuẫn.
  2. $\alpha \neq \beta$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\alpha > \beta \geq 1$. Khi đó $\alpha \geq 2$.

     $$\Rightarrow \alpha b + \beta a = \beta ab \Rightarrow (\beta a - \alpha)(b-1) = \alpha \Rightarrow \alpha \geq \beta a - \alpha \geq a - \alpha$$
     $$\Rightarrow 2\alpha \geq a = 2^\alpha.u \geq 2^\alpha \Rightarrow \alpha \geq 2^{\alpha-1} \Rightarrow \alpha \leq 2$$

     Từ đó ta có: $2 \leq \alpha \leq 2$ nên $\alpha = 2 \Rightarrow u = \beta = 1 \Rightarrow a = 4, b = 2$.

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $(a, b) \in \{(4,2); (2,4)\}$. □

Bài toán 2.1.12 (Ứng dụng của định lý Legendre kết hợp với hệ đếm cơ số)**.** *Giả sử* $m! = 2^l(2k+1); m, k, p \in \mathbb{N}$. *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn* $m \in \mathbb{N}*$ *sao cho:*

$$m - l = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 2011^{2011}$$

Lời giải. Giả sử trong hệ đếm cơ số 2, m có biểu diễn dưới dạng:

$$m = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}|_2 = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i$$

Theo định lý Legendre ta có:

$$l = e_2(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{2^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{m}{2^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sum_{i=0}^{n} a_i 2^{i-k} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor a_i \sum_{k=1}^{n} 2^{i-k} \right\rfloor \quad (12)$$

Mặt khác, do $\left\lfloor a_i \sum_{k=i+1}^{n} 2^{i-k} \right\rfloor = 0$ nên ta có:

$$l = \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor a_i \sum_{k=1}^{n} 2^{i-k} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor a_i.2^i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor a_i.2^i \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \right\rfloor = m - \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Vì vậy: $m - l = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Khi đó bài toán trở thành:

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ số $(a_i)_{i=0}^n$ *sao cho:* $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 2011^{2011}$,

mà điều đó hiển nhiên.

Do đó bài toán được chứng minh. □

2.2 Một số bài toán về tính tổng phần nguyên

2.2.1 Tính tổng phần nguyên dựa trên những tính chất cơ bản

Một ví dụ đơn giản của việc ứng dụng đồng nhất thức Hermite:

Bài toán 2.2.1. *Tính tổng* $\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor$

Lời giải. Ta có:

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{0\leqslant i<j} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor \right) = \sum_{j=1}^{n} \lfloor x \rfloor = n \lfloor x \rfloor \text{(Theo đồng nhất thức Hermite)}$$

□

Ta có một ứng dụng nổi tiếng của đẳng thức (2):

Bài toán 2.2.2 (IMO 1968)**.** *Với* $x \in \mathbb{R}$*, chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Lời giải. Áp dụng tính chất (2) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

□

Nhận xét. Tương tự ta có được đẳng thức mới sau:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{x+3^k}{3^{k+1}}\right\rfloor+\sum_{k=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{x+2.3^k}{3^{k+1}}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$$

Tổng quát hơn nữa ta cũng có:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{n+j.m^i}{m^{i+1}}\right\rfloor=\lfloor n\rfloor \tag{13}$$

Chứng minh. Tương tự với bài toán trên, áp dụng (3) ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{n+j.m^i}{m^{i+1}}\right\rfloor&=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{n}{m^{i+1}}+\frac{j}{m}\right\rfloor\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{n}{m^i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{m^i}\right\rfloor\right)\\&=\lfloor n\rfloor\end{aligned}$$

□

với mọi $n\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}, m\geq 2$.
Từ đây, kết hợp tính chất (2) và hai công thức tổ hợp:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}C_n^{2k}=2^{n-1} \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}C_n^{3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right) \tag{15}$$

Từ hai đẳng thức này ta có được những bài toán hay sau:

Bài toán 2.2.3. *Chứng minh rằng:*

1. *Biết rằng* $m,t,y,j,i,k,x\in\mathbb{N}^*; m,t,y\geq 2$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{(p-1)\,n+jm^i}{m^{i+1}}\right\rfloor+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{t-1}\left\lfloor\frac{n+kt^i}{t^{i+1}}\right\rfloor\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{x=1}^{y-1}\left\lfloor\frac{pn+xy^i}{y^{i+1}}\right\rfloor$$

2. *Biết rằng* $m,n\in\mathbb{N}^*, m\geq 2$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{C_n^{2k}+jm^i}{m^{i+1}}\right\rfloor=2^{n-1} \tag{16}$$

Lời giải. Sử dụng hai đẳng thức tổ hợp (14), (14) và (13) ta có:

1. Sử dụng đẳng thức (13), bất đẳng thức thứ nhất tương với:

$$\lfloor (p-1)\,n \rfloor + \lfloor n \rfloor \leqslant \lfloor pn \rfloor$$

   Mà bất đẳng thức trên chính là hệ quả của bất đẳng thức (1) nên ta có điều cần chứng minh.

2. Sử dụng đẳng thức (13) ta có (16) tương đương với:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = 2^{n-1}$$

   Đây chính là đẳng thức (14).

□

Bài toán 2.2.4. *Tìm $n \in \mathbb{N}$,n chia 6 dư 3 thỏa mãn*

$$\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{C_n^{3k} + jm^i}{m^{i+1}} \right\rfloor$$

là số chính phương.

Lời giải. Chú ý rằng

$$\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{C_n^{3k} + jm^i}{z} m^{i+1} \right\rfloor = x^2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} C_n^{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right) = A$$

Cho $n = 6k+3$ ta có: $A = 2\displaystyle\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 2^t$.

Dễ thấy $A \vdots 2$ nhưng $A \not\vdots 4$ nên A không là số chính phương. □

Nhận xét. Từ đẳng thức (13) ta có thể tạo ra nhiều bài toán hay.
Ta xét tiếp các ứng dụng khi áp dụng hai đẳng thức (2),(3).

Bài toán 2.2.5. *Chứng minh rằng $\left\lfloor \left(2+\sqrt{2}\right)^n \right\rfloor$ là một số lẻ với $n \in \mathbb{N}$, n lẻ.*

Lời giải. Chú ý rằng $\left(2-\sqrt{2}\right)^n + \left(2+\sqrt{2}\right)^n$ là một số nguyên, ta có

$$\left\lfloor \left(2-\sqrt{2}\right)^n \right\rfloor + \left\lfloor \left(2+\sqrt{2}\right)^n \right\rfloor = \left(2-\sqrt{2}\right)^n + \left(2+\sqrt{2}\right)^n - 1 = 2\mathrm{A} - 1$$

Áp dụng đẳng thức (3) ta có:

$$\left\{\left(2-\sqrt{2}\right)^n\right\}+\left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^n\right\}=2\text{A}-(2\text{A}-1)=1 \tag{17}$$

$\square$

Đẳng thức (17) cho ta bài toán sau:

Bài toán 2.2.6. *Cho hai dãy số:*

$$x_n=\left\lfloor\frac{n}{\left\{\left(2-\sqrt{2}\right)^{2k+1}\right\}}\right\rfloor, y_n=\left\lfloor\frac{n}{\left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^{2k+1}\right\}}\right\rfloor$$

Chứng minh rằng với mọi $k\in\mathbb{N}$ thì hai dãy x_n, y_n là phân hoạch của tập các số nguyên dương.

Lời giải. Đặt $\alpha=\dfrac{1}{\left\{\left(2-\sqrt{2}\right)^{2k+1}\right\}}, \beta=\dfrac{1}{\left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^{2k+1}\right\}}$. Khi đó theo bài toán 2.2.5 ta có $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$.

Chú ý dùng đẳng thức (3) ta có: $\left\lfloor\frac{n}{\alpha}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{\beta}\right\rfloor=n-1$ với mọi giá trị của n nguyên dương. Từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.2.2 Tính tổng phần nguyên dựa vào tính chia hết

Tính chất (4) tuy đơn giản nhưng cho ta hệ quả đẹp mắt sau: $\forall f(x)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(k)+f(p-k) \,\vdots\, p \\ f(k) \,\not\vdots\, p \end{cases}$$

với mọi k nguyên dương thỏa mãn $1\le k\le p-1$ và p nguyên tố. Khi đó:

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{f(x)}{p}\right\rfloor=\sum_{x=1}^{p-1}\frac{f(x)}{p}-\frac{p-1}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{g(x)}{p}-\left\lfloor\frac{g(x)}{p}\right\rfloor\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{f(x)}{p}-\left\lfloor\frac{f(x)}{p}\right\rfloor\right)$$

Bài toán 2.2.7. *Tính tổng* $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{k^n}{p}\right\rfloor$ *với n nguyên dương và p nguyên tố.*

Lời giải. Ta chia bài toán thành các ý nhỏ hơn như sau:

1. Xác định $\sum\limits_{k=1}^{p-1}\left\lfloor \frac{k^3}{p}\right\rfloor$.

   Lời giải. Áp dụng (3) ta có $\left\lfloor \frac{k^3}{p}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{(p-k)^3}{p}\right\rfloor=\frac{k^3}{p}+\frac{(p-k)^3}{p}-1$ với mọi $k\in\mathbb{N}$ và $1\le k\le p-1$.
   Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor \frac{k^3}{p}\right\rfloor&=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{k^3}{p}-\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k^3}{p}-\left\lfloor \frac{k^3}{p}\right\rfloor\right)\\&=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{k^3}{p}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k^3}{p}+\frac{(p-k)^3}{p}-\left\lfloor \frac{k^3}{p}\right\rfloor-\left\lfloor \frac{(p-k)^3}{p}\right\rfloor\right)\\&=\frac{(p-2)(p-1)(p+1)}{4}\end{aligned}$$

   □

2. Tính $f(p)=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\left\lfloor \frac{i^2}{p}\right\rfloor$ với p là số nguyên tố dạng $4k+1$.

   Lời giải. Chú ý rằng theo bài toán trên thì $f(p)=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\left\lfloor \frac{i^3}{p}\right\rfloor$ sau khi tính có đáp án là một đa thức bậc 3 đối với p nên ta dự đoán đáp án bài toán này là một đa thức bậc hai với p.
   Chú ý rằng $f(5)=4, f(13)=44, f(17)=80, f(29)=252$. Ta sẽ chứng minh $f(p)=\frac{(p-1)(p-2)}{3}=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{i^2}{p}-\frac{p-1}{2}$.
   Xét hệ thặng dư modulo p:

$$1^2,2^2,...,\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \tag{18}$$

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2,...,(p-1)^2 \tag{19}$$

   Nhận thấy rằng với mỗi i thuộc (18) luôn tồn tại duy nhất j trong (19) thỏa mãn $i^2+j^2\vdots p$.
   Thật vậy, vì $p=4k+1$ nên tồn tại x sao cho $x^2+1\equiv 0 \mod p$ và với i thì $\exists i_1$ thỏa

mãn $ii_1 \equiv 1 \mod p$ với $i_1 \in \{1, 2, ..., p-1\}$.
Ta có:

$$\begin{aligned} i^2 + j^2 \equiv 0\,(\bmod p) &\Leftrightarrow (i_1 j)^2 + 1 \equiv 0\,(\bmod p) \\ &\Leftrightarrow (i_1 j)^2 \equiv x^2\,(\bmod p) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i_1 j' \equiv x\,(\bmod p) \\ i_1 j'' \equiv -x\,(\bmod p) \end{array}\right. \Rightarrow j' + j'' \equiv 0\,(\bmod p) \end{aligned}$$

Như vậy một trong hai số j' hoặc j'' là số j duy nhất thỏa mãn. Áp dụng (3) tương tự như bài tập trên ta có:

$$\begin{aligned} f(p) &= \sum_{i=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ji^2}{p} \right\rfloor \right) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{i^2}{p} - \frac{p-1}{2} \\ &= \frac{(p-1)(p-2)}{3} \end{aligned}$$

□

Bài toán 2.2.8. *Chứng minh rằng với p là số nguyên tố lẻ thì:*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} \equiv \frac{p+1}{2} (\bmod p)$$

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^p}{p^2}$. Ta có $(x^p + (p-x)^p) \vdots p^2$ với mọi p lẻ, x nguyên dương nhỏ hơn p. Áp dụng nhận xét trên ta có:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^p}{p^2} \right\rfloor = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p}{p} - \frac{p-1}{2} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} - \frac{(p-1)^2}{2p}$$

Suy ra:

$$p \sum_{=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^p}{p^2} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} - \frac{(p-1)^2}{2}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này cho ta một kết quả đáng chú ý: *Với $k = 1, 2, ..., p-1$ gọi r_k là số dư khi chia k^p cho p^2. Khi đó:*

$$\sum_{k=1}^{p-1} r_k = \sum_{k=1}^{p-1} k^p - p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^p}{p^2} \right\rfloor = \frac{p^2(p-1)}{2}$$

Bài toán 2.2.9. *Tính $f(p) = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{3mi^2}{p} \right\rfloor - m \left\lfloor \frac{3i^2}{p} \right\rfloor \right)$ với p nguyên tố có dạng $3k+1$ và m nguyên dương thỏa mãn $p \not| m$*

Chứng minh. Vì p nguyên tố chia 3 dư 1 nên tồn tại z sao cho $z^2 + 3 \equiv 0 \,(\text{mod} p)$.
Đặt $g(x) = zx \Rightarrow g^2(x) + 3x^2 \vdots p$.
Áp dụng (3) ta có:

$$\begin{cases} \left\lfloor \frac{g^2(x)}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3x^2}{p} \right\rfloor = \frac{g^2(x)}{p} + \frac{3x^2}{p} - 1 \\ \left\lfloor \frac{mg^2(x)}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m3x^2}{p} \right\rfloor = \frac{mg^2(x)}{p} + \frac{3mx^2}{p} - 1 \end{cases}$$

Từ hai đẳng thức trên ta có:

$$\left\lfloor \frac{mg^2(x)}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m3x^2}{p} \right\rfloor - m \left\lfloor \frac{g^2(x)}{p} \right\rfloor + m \left\lfloor \frac{3x^2}{p} \right\rfloor = m - 1 \tag{20}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{p-1} \left\lfloor m. \left\{ \frac{g^2(x)}{p} \right\} \right\rfloor &= \sum_{x=1}^{p-1} \left\lfloor m. \left(1 - \left\{ \frac{3x^2}{p} \right\} \right) \right\rfloor \\ &= m(p-1) - \sum_{x=1}^{p-1} \left\lfloor m. \left\{ \frac{3i^2}{p} \right\} \right\rfloor \\ &= m(p-1) - \sum_{x=1}^{p-1} \left\lfloor m. \left\{ \frac{i^2}{p} \right\} \right\rfloor \text{(theo giả thiết)} \\ &= \sum_{x=1}^{p-1} \left\lfloor m. \left(1 - \left\{ \frac{i^2}{p} \right\} \right) \right\rfloor \\ &= \sum_{x=1}^{p-1} \left\lfloor m. \left\{ \frac{3i^2}{p} \right\} \right\rfloor \end{aligned}$$

(vì với mỗi i tồn tại duy nhất j sao cho $i^2 + 3j^2 \vdots p$ và $j \geq \frac{p+1}{2}$)

Từ đó,
$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\left\lfloor m.\left\{\frac{g^2(x)}{p}\right\}\right\rfloor - m\left\lfloor\frac{g^2(x)}{p}\right\rfloor\right) = \sum_{x=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{m.3x^2}{p}\right\rfloor - m\left\lfloor\frac{3x^2}{p}\right\rfloor \tag{21}$$
Từ (20) và (21), dễ dàng suy ra:
$$f(p) = \frac{(m-1)(p-1)}{2}$$
□

Nhận xét. Theo kết quả của Gauss (xem thêm chi tiết trong [3]) ta có:
$$\sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{mi}{p}\right\rfloor = \frac{(m-1)(p-1)}{2}$$

Bài toán 2.2.10 (Tổng quát của bài toán 2.2.9)**.** *Chứng minh rằng với p nguyên tố chia 4 dư 1, với hai hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn:*$\begin{cases}(f(x),p)=1\\(g(x),p)=1\end{cases}$ *với mọi x.*
Khi đó:
$$\sum_{i=1}^{p-1}\left(\left\lfloor\frac{g(x)f(x)i^2}{p}\right\rfloor - g(x)\left\lfloor\frac{f(x)i^2}{p}\right\rfloor\right) = \frac{(f(x)-1)(p-1)}{2}$$

Chứng minh. Giải tương tự các bài toán trên ta có:
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\left\lfloor\frac{g(x)f(x).i^2}{p}\right\rfloor - g(x).\left\lfloor\frac{f(x).i^2}{p}\right\rfloor\right) &= \sum_{i=1}^{p-1}\left(\left\lfloor\frac{g(x)f(x)i^2}{p}\right\rfloor\right) - g(x)\sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{f(x)i^2}{p}\right\rfloor\\ &= \sum_{i=1}^{p-1}\frac{g(x)f(x)i^2}{p} - \frac{p-1}{2} - g(x)\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{f(x)i^2}{p} - \frac{p-1}{2}\right)\\ &= \frac{(g(x)-1)(p-1)}{2}\end{aligned}$$
□

Bài toán trên cho ta nhiều kết quả đẹp sau:

1. Cho $f(x)\equiv 1, g(x)\equiv 2 \forall x$ ta có:
$$\sum_{i=1}^{p-1}\left(\left\lfloor\frac{2i^2}{p}\right\rfloor - g(x)\left\lfloor\frac{i^2}{p}\right\rfloor\right) = \frac{p-1}{2} = \sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{i^2}{p} - \left\lfloor\frac{i^2}{p}\right\rfloor\right)$$
Từ đó suy ra:
$$\sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{i^2}{p}+\frac{1}{2}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{i^2}{p}(\text{áp dụng (2)})$$
với p nguyên tố chia 4 dư 1.

2. Cho $f(x) \equiv 1, g(x) \equiv 3 \forall x$ ta có:

$$2\sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{2i^2}{p}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{3i^2}{p}\right\rfloor + \sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{i^2}{p}\right\rfloor$$

với p nguyên tố chia 4 dư 1.

Áp dụng đẳng thức (13) và tính chất (4) ta tiếp tục được các hệ thức đẹp sau (cùng với điều kiện p nguyên tố chia 4 dư 1):

3.
$$\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{\frac{i^2}{p}+2^j}{2^{j+1}}\right\rfloor = \frac{(p-1)(p-2)}{3}$$

4.
$$\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{2i^2+p+2^{j+1}p}{2^{j+2}p}\right\rfloor = \frac{(p-1)(2p-1)}{6}$$

5.
$$\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{\frac{k^3}{p}+m^ij}{m^{i+1}}\right\rfloor = \frac{(p-1)(p-2)(p+1)}{4}$$

6.
$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left\lfloor\frac{i^2}{p}\right\rfloor = \frac{(p-1)(p-5)}{24}\\ \displaystyle\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\left\lfloor\frac{i^2}{p}\right\rfloor = \frac{(p-1)(7p-1)}{24}\end{cases} \text{(Gợi ý: Sử dụng (4))}$$

Chứng minh cho đẳng thức số 4. Ta có biến đổi sau:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{2i^2+p+2^{j+1}.p}{2^{j+2}.p}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{\frac{i^2}{p}+\frac{1}{2}+2^j}{2^{j+1}}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{i^2}{p}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

Theo hệ quả 1 bài 2.2.10 ta có:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{i^2}{p} = \sum_{i=1}^{p-1}\left(\left\lfloor\frac{2i^2}{p}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{i^2}{p}\right\rfloor\right) = \sum_{i=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{i^2}{p}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

Từ hai điều trên suy ra:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{2i^2+p+2^{j+1}.p}{2^{j+2}.p}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{i^2}{p} = \frac{(p-1)(2p-6)}{6}$$

□

Các bài toán còn lại chứng minh tương tự.

3 Tài liệu tham khảo

[1] Titu Andreescu, Zuming Feng, *104 number theory problems*. Birkhäuser, 2006.

[2] Kenneth H.Rosen, *Elementary Number Theory and its application*. Addision Wesley, Massachusets, 5th edition 2005.

[3] PEN Team, *Problems in Elementary Number Theory*. pen@problem-solving.be, 2009.

[4] Website www.mathlinks.ro

[5] Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Pentrović, *The IMO Compedium, A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009*. Spinger-Verlag, 2nd Edition, 2010.

[6] Authur Engel, *Problem Solving Strategies*. Springer, 1999.

[7] Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Number Theory: Structures, Examples, and Problems*. Birkhäuser, 2009.