19 Phương pháp chứng minh Bất đẳng thức

PHẦN 1
CÁC KIẾN THỨC CẦN LƯU Ý

1/Định nghĩa $\begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$

2/Tính chất

+ A>B $\Leftrightarrow B < A$
+ A>B và B >C $\Leftrightarrow A > C$
+ A>B $\Rightarrow$ A+C >B + C
+ A>B và C > D $\Rightarrow$ A+C > B + D
+ A>B và C > 0 $\Rightarrow$ A.C > B.C
+ A>B và C < 0 $\Rightarrow$ A.C < B.C
+ 0 < A < B và 0 < C <D $\Rightarrow$ 0 < A.C < B.D
+ A > B > 0 $\Rightarrow$ $A^n > B^n \quad \forall n$
+ A > B $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n lẻ
+ $|A| > |B|$ $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n chẵn
+ m > n > 0 và A > 1 $\Rightarrow$ $A^m > A^n$
+ m > n > 0 và 0 <A < 1 $\Rightarrow$ $A^m < A^n$
+A < B và A.B > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$

3/Một số hằng bất đẳng thức

+ $A^2 \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)
+ $A^n \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)
+ $|A| \geq 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi A = 0)
+ -$|A|$ < A = $|A|$
+ $|A + B| \geq |A| + |B|$ (dấu = xảy ra khi A.B > 0)
+ $|A - B| \leq |A| - |B|$ (dấu = xảy ra khi A.B < 0)

PHẦN II
CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp 1 *: Dùng định nghĩa*

Kiến thức : Để chứng minh A > B. Ta lập hiệu A –B > 0

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với$\forall$ M

Ví dụ 1 $\forall$ x, y, z chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Giải:

a) Ta xét hiệu : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với$\forall$x ; y Dấu bằng xảy ra khi x=y

$(x-z)^2 \geq 0$ với$\forall$x ; z Dấu bằng xảy ra khi x=z

$(y-z)^2 \geq 0$ với$\forall$ z; y Dấu bằng xảy ra khi z=y

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi x = y =z

b)Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$

$= (x - y + z)^2 \geq 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Dấu bằng xảy ra khi x+y=z

c) Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$. Dấu(=)xảy ra khi x=y=z=1

***Ví dụ 2*:** chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) Hãy tổng quát bài toán

Giải:

a) Ta xét hiệu $\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$= \frac{2(a^2+b^2)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi a=b

b)Ta xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0.$$ Vậy

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b =c

c)Tổng quát $\frac{a_1^2+a_2^2+....+a_n^2}{n}\geq\left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^2$

Tóm lại các bước để chứng minh $A\geq B$ theo định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu H = A - B

Bước 2:Biến đổi $H=(C+D)^2$ hoặc $H=(C+D)^2+\ldots+(E+F)^2$

Bước 3:Kết luận $A \geq B$

Ví dụ 1: Chứng minh $\forall m,n,p,q$ ta đều có : $m^2+n^2+p^2+q^2+1\geq m(n+p+q+1)$

Giải:

$$\Leftrightarrow\left(\frac{m^2}{4}-mn+n^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-mp+p^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-mq+q^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-m+1\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{m}{2}-n\right)^2+\left(\frac{m}{2}-p\right)^2+\left(\frac{m}{2}-q\right)^2+\left(\frac{m}{2}-1\right)^2\geq 0$$ (luôn đúng)

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\frac{m}{2}-n=0\\ \frac{m}{2}-p=0\\ \frac{m}{2}-q=0\\ \frac{m}{2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=\frac{m}{2}\\ p=\frac{m}{2}\\ q=\frac{m}{2}\\ m=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=p=q=1\end{cases}$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta luôn có : $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$

Giải: Ta có : $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$, $\forall a,b,c>0$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-a^2bc-b^2ac-c^2ab\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^4+2b^4+2c^4-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+2a^2b^2+\left(b^2-c^2\right)^2+2b^2c^2+\left(c^2-a^2\right)^2+2a^2c^2$$
$$-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2+(a^2b^2+b^2c^2-2b^2ac)+(b^2c^2+c^2a^2-2c^2ab)$$
$$+(a^2b^2+c^2a^2-2a^2ab)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2+(ab-bc)^2+(bc-ac)^2+(ab-ac)^2\geq 0$$

Đúng với mọi a, b, c.

Phương pháp 2 *: Dùng phép biến đổi tương đương*

Kiến thức:

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Nếu $A < B \Leftrightarrow C < D$, với $C < D$ là một bất đẳng thức hiển nhiên, hoặc đã biết là đúng thì có bất đẳng thức $A < B$.

Chú ý các hằng đẳng thức sau:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Ví dụ 1: Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \ge ab$

b) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$

Giải:

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \ge ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \ge 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 \ge 0$

(BĐT này luôn đúng). Vậy $a^2 + \frac{b^2}{4} \ge ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a=b)

b) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) > 2(ab + a + b)$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \ge 0$ Bất đẳng thức cuối đúng.

Vậy $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$. Dấu bằng xảy ra khi a=b=1

c)

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e) \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \ge 4a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2c)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức đúng vậy ta có điều phải chứng minh

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \ge (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$

Giải:

$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \ge (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$

$\Leftrightarrow a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} \ge a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2 - b^2) + a^2b^8(b^2 - a^2) \ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6) \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4) \ge 0$

Bất đẳng thứccuối đúng vậy ta có điều phải chứng minh

Ví dụ 3: cho x.y =1 và $x \rangle y$ Chứng minh $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \ge 2\sqrt{2}$

Giải: $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \ge 2\sqrt{2}$ vì :$x \rangle y$ nên $x - y \rangle 0$ $\Rightarrow x^2+y^2 \ge 2\sqrt{2}(x-y)$

$\Rightarrow x^2+y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 2 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 2xy \ge 0$ vì x.y=1 nên 2.x.y=2

$\Rightarrow (x-y-\sqrt{2})^2 \geq 0$ Điều này luôn luôn đúng . Vậy ta có điều phải chứng minh

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

a/ $P(x,y)=9x^2y^2+y^2-6xy-2y+1\geq 0 \quad \forall x,y\in R$

b/ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leq |a|+|b|+|c|$ (gợi ý :bình phương 2 vế)

c/ Cho ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases} x.y.z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<x+y+z \end{cases}$$

Chứng minh rằng :có đúng một trong ba số x,y,z lớn hơn 1

Giải: Xét (x-1)(y-1)(z-1)=xyz+(xy+yz+zx)+x+y+z-1

$=(xyz-1)+(x+y+z)-xyz(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=x+y+z - (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) > 0$ (vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<$ x+y+z theo gt)

$\Rightarrow$ 2 trong 3 số x-1 , y-1 , z-1 âm hoặc cả ba sỗ-1 , y-1, z-1 là dương.

Nếu trường hợp sau xảy ra thì x, y, z >1 $\Rightarrow$x.y.z>1 Mâu thuẫn gt x.y.z=1 bắt buộc phải xảy ra trường hợp trên tức là có đúng 1 trong ba số x ,y ,z là số lớn hơn 1

***Ví dụ 5**:* Chứng minh rằng : $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{a+c}<2$

Giải:

Ta có : $a+b<a+b+c\Rightarrow \dfrac{1}{a+b}>\dfrac{1}{a+b+c}\Rightarrow \dfrac{a}{a+b}>\dfrac{a}{a+b+c}$ (1)

Tương tự ta có : $\dfrac{b}{b+c}>\dfrac{b}{a+b+c}$ (2), $\dfrac{c}{a+c}>\dfrac{c}{a+b+c}$ (3)

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3), ta được :

$\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{a+c}>1$ (*)

Ta có : $a<a+b\Rightarrow \dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c}$ (4)

Tương tự : $\dfrac{b}{b+c}<\dfrac{a+b}{a+b+c}$ (5), $\dfrac{c}{c+a}<\dfrac{c+b}{a+b+c}$ (6)

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (4), (5), (6), ta được :

$\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{a+c}<2$ (**)

Từ (*) và (**) , ta được : $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{a+c}<2$ (đpcm)

Phương pháp 3**:* ***Dùng bất đẳng thức phụ

Kiến thức:

a) $x^2+y^2\geq 2xy$

b) $x^2+y^2\geq |\,xy\,|$ dấu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$

d) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$

Ví dụ 1 Cho a, b ,c là các số không âm chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Giải: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \geq 4xy$

Tacó $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

Phương pháp 4: Bất đẳng thức Cô sy

Kiến thức:

a/ Với hai số không âm : $a,b \geq 0$, ta có: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi a=b

b/ Bất đẳng thức mở rộng cho n số không âm :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 .. a_n}$$

$$\Leftrightarrow a_1 a_2 .. a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

<u>Chú ý</u> : ta dùng bất đẳng thức Côsi khi đề cho biến số không âm.

Ví dụ 1 : Giải phương trình : $\dfrac{2^x}{4^x+1}+\dfrac{4^x}{2^x+1}+\dfrac{2^x}{2^x+4^x}=\dfrac{3}{2}$

Giải : Nếu đặt t $=2^x$ thì pt trở thành pt bậc 6 theo t nên ta đặt

$$\begin{cases} a = 2^x \\ b = 4^x \end{cases}, a,b > 0$$

Khi đó phương trình có dạng : $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{3}{2}$

Vế trái của phương trình:

$$=\left(\frac{a}{b+1}+1\right)+\left(\frac{b}{a+1}+1\right)+\left(\frac{1}{a+b}+1\right)-3=\left(\frac{a+b+1}{b+1}\right)+\left(\frac{a+b+1}{a+1}\right)+\left(\frac{a+b+1}{a+b}\right)-3$$

$$=(a+b+1)\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+b}\right)-3=\frac{1}{2}\left[(b+1)+(a+1)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$\geq \frac{1}{2}3\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(a+b)}.\frac{3}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(a+b)}}-3=\frac{3}{2}$$

Vậy phương trình tương đương với :

$a+1=b+1=a+b \Leftrightarrow a=b=1 \Leftrightarrow 2^x=4^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Ví dụ 2 : Cho x, y , z > 0 và x + y + z = 1. Tìm GTLN của P

$=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}$

Giải : P = 3- ($\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$) = 3 – Q**.** Theo BDT Côsi , nếu a, b, c > 0 thì

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{9}{a+b+c}$$

Suy ra Q = $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\geq \frac{9}{4}$ $\Rightarrow$ -Q$\leq -\frac{9}{4}$ nên P = 3 – Q $\leq$ 3-$\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

Vậy max P = $\frac{3}{4}$ .khi x = y = z = $\frac{1}{3}$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c >0 . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\leq \frac{a+b+c}{2abc}$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$a^2++bc\geq 2a\sqrt{bc}\Rightarrow \frac{2}{a^2++bc}\leq \frac{1}{a\sqrt{bc}}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right)$$

Tương tự :

$$\frac{2}{b^2++ac}\leq \frac{1}{b\sqrt{ac}}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ab}\right)\Rightarrow \frac{2}{c^2++ab}\leq \frac{1}{c\sqrt{ab}}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2++ac}+\frac{2}{c^2++ab}\leq \frac{a+b+c}{2abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Ví dụ 4 **:** CMR trong tam giác ABC : $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$ (*)

Giải : Theo bất đẳng thức Côsi :

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}(1)$$

Cũng theo bất đẳng thức Côsi :

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\leq \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b)=c \quad (2)$$

Viết tiếp hai BDT tương tự (2) rồi nhân với nhau sẽ được

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leq abc$$

$$\rightarrow \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\geq 1 \ (3)$$

Từ (1),(3) suy ra (*). Dấu "=" xảy ra khi a = b = c hay ABC là đều .

Ví dụ 5:

Cho $\begin{cases}0<a\leq b\leq c\\ 0<x,y,z\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$(+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\leq \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2$$

Giải: Đặt $f(x) = x^2 - (a+c)x + ac = 0$ có 2 nghiệm a,c

Mà: $a \le b \le c \Rightarrow f(b) \le 0 \Leftrightarrow b^2 - (a+c)b + ac \le 0$

$$\Leftrightarrow b + \frac{ac}{b} \le a + c \Leftrightarrow yb + ac\frac{y}{b} \le (a+c)y$$

$$\Rightarrow \left(xa + ac\frac{x}{a}\right) + (yb + ac\frac{y}{b}) + (zc + ac\frac{z}{c}) \le (a+c)x + (a+c)y + (a+c)z$$

$$\Rightarrow xa + yb + zc + ac\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \le (a+c)(x+y+z)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\Rightarrow 2\sqrt{(xa + yb + zc)ac\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)} \le (a+c)(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 4(xa + yb + zc)ac\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \le (a+c)^2(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow (xa + yb + zc)ac\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \le \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2 (đpcm)$$

Phương pháp 5 — Bất đẳng thức Bunhiacopski

Kiến thức:

Cho 2n số thực ($n \ge 2$): $a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

Hay $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}$ (Quy ước : nếu mẫu = 0 thì tử = 0)

Chứng minh:

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \\ b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \end{cases}$

- Nếu a = 0 hay b = 0: Bất đẳng thức luôn đúng.
- Nếu a,b > 0:

Đặt: $\alpha_i = \frac{a_i}{a}, \beta_i = \frac{b_i}{b} (i = 1,2,...n)$, Thế thì: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_n^2$

Mặt khác: $|\alpha_i\beta_i| \le \frac{1}{2}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$

Suy ra: $|\alpha_1\beta_1| + |\alpha_2\beta_2| + ... + |\alpha_n\beta_n| \le \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2) + \frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_n^2) \le 1$

$$\Rightarrow |a_1b_1| + |a_2b_2| + ... + |a_nb_n| \le a.b$$

Lại có: $|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \le |a_1b_1| + |a_2b_2| + ... + |a_nb_n|$

Suy ra: $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

Dấu"=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \left(\forall i = 1,2,...,n\right) \\ \alpha_1\beta_1....\alpha_n\beta_n \ cùng \quad dáu \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

Ví dụ 1 :

Chứng minh rằng: $\forall x \in R$, ta có: $\sin^8 x + \cos^8 x \ge \frac{1}{8}$

Giải: Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$1 = \left(\sin^2 x.1 + \cos^2 x.1\right) \le \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\left(1^2 + 1^2\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \sin^4 x + \cos^4 x \Rightarrow \frac{1}{4} \le \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski một lần nữa:

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \left(\sin^4 x.1 + \cos^4 x.1\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \left(\sin^8 x + \cos^8 x\right)\left(1^2 + 1^2\right) \Leftrightarrow \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) \ge \frac{1}{8}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các góc A,B,C nhọn. Tìm GTLN của:

$P = \sqrt{1 + \tan A.\tan B} + \sqrt{1 + \tan B.\tan C} + \sqrt{1 + \tan C.\tan A}$

Giải:

*** Bất đẳng thức Bunhiacopski mở rộng**

Cho m bộ số, mỗi bộ số gồm n số không âm: $(a_i, b_i, ..., c_i)(i = 1,2,....,m)$

Thế thì:

$$(a_1a_2...a_m + b_1b_2..b_m + ... + c_1c_2...c_m)^2 \le (a_1^m + b_1^m + ... + c_1^m)(a_2^m + b_2^m + ... + c_2^m)(a_m^m + b_m^m + ... + c_m^m)$$

Dấu"=" xảy ra $\Leftrightarrow \exists$ bô số (a,b,….,c) sao cho: với mỗi i = 1,2,…,m thì $\exists\, t_i$ sao cho: $a = t_i a_i, b = t_i b_i, ..., c = t_i c_i$, Hay $a_1 : b_1 : ... : c_1 = a_2 : b_2 : ... : c_2 = a_n : b_n : ...c_n$

Ví dụ 1: Cho $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 3 \\ n \in Z, n \ge 2 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\left|\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1}\right| < \sqrt{2}$

Giải:

$\forall k \in N^*$ ta có: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \left(\frac{1}{3/2} - \frac{1}{5/2}\right) + \left(\frac{1}{5/2} - \frac{1}{7/2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3/2} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \frac{2}{3}$

Do đó theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$\left|\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+....+\frac{a_n}{n+1}\right| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}} < \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{2} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2: Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski: Tacó ac+bd$\le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$ mà

$$(a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2 \le (a^2+b^2)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Cách 1: Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có $(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \ge (1.a+1.b+1.c)^2$

$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$ Điều phải chứng minh Dấu bằng xảy ra khi a=b=c

Phương pháp 6: Bất đẳng thức Trê- bư-sép

Kiến thức:

a)Nếu $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ..... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ..... \le b_n \end{cases}$ thì

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+....+b_n}{n} \le \frac{a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n}{n}.$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a_1=a_2=....=a_n \\ b_1=b_2=....=b_n \end{array}\right.$

b)Nếu $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ..... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ..... \ge b_n \end{cases}$ thì

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+....+b_n}{n} \ge \frac{a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n}{n}$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a_1=a_2=....=a_n \\ b_1=b_2=....=b_n \end{array}\right.$

Ví dụ 1: Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn bán kính R = 1 và $\frac{\sin A.\sin 2a+\sin B.\sin 2B+\sin C.\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C} = \frac{2S}{3}$.

S là diện tích tan giác. chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.

Giải: Không giảm tính tổng quát ta giả sư $0 < A \le B \le C < \frac{\pi}{2}$.Suy ra:

$$\begin{cases} \sin A \le \sin B \le \sin C \\ \sin 2a \le \sin 2B \le \sin 2C \end{cases}$$

Áp dụng BĐT trebusep ta được:

$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\geq$
$\geq 3(\sin A.\sin 2A+\sin B.\sin 2B+\sin C.\sin 2C)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A.\sin 2A+\sin B.\sin 2B+\sin C.\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}\leq \frac{1}{3}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin A=\sin B=\sin C\\ \sin 2A=\sin 2B=\sin 2C\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC\ d\hat{e}u$

Mặt khác:

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B).\cos(A-B)+\sin 2C$
$=2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$
$=2\sin C.2\sin A.\sin B=4\sin A\sin B\sin C$
$=(2R\sin A)(2R\sin B).\sin C=a.b.\sin C=2S \qquad (2)$

Thay (2) vào (1) ta có

$$\frac{\sin A.\sin 2a+\sin B.\sin 2B+\sin C.\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}\leq \frac{2S}{3}.$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \Delta$ ABC đều.

Ví dụ 2(HS tự giải):

a/ Cho a,b,c>0 và a+b+c=1 CMR: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$

b/ Cho x,y,z>0 và x+y+z=1 CMR:x+2y+z $\geq 4(1-x)(1-y)(1-z)$

c/ Cho a>0 , b>0, c>0

CMR: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3}{2}$

d)Cho x ≥ 0,y ≥ 0 thỏa mãn $2\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$;CMR: x+y $\geq \frac{1}{5}$

Ví dụ 3: Cho a>b>c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\geq \frac{1}{2}$

Giải:

Do a,b,c đối xứng ,giả sử a $\geq$ b $\geq$ c $\Rightarrow \begin{cases} a^2\geq b^2\geq c^2\\ \frac{a}{b+c}\geq \frac{b}{a+c}\geq \frac{c}{a+b}\end{cases}$

Áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b}\geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\geq \frac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c= $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 4: Cho a,b,c,d>0 và abcd =1 .Chứng minh rằng :

$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\geq 10$

Giải: Ta có $a^2+b^2\geq 2ab$
$c^2+d^2\geq 2cd$

Do abcd =1 nên cd $=\frac{1}{ab}$ (dùng $x+\frac{1}{x}\geq\frac{1}{2}$)

Ta có $a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+cd)=2(ab+\frac{1}{ab})\geq 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$ = (ab+cd)+(ac+bd)+(bc+ad)

$=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right)\geq 2+2+2$

Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\geq 10$

Phương pháp7 Bất đẳng thức Bernouli

Kiến thức:

<u>a)Dạng nguyên thủy:</u> Cho a$\geq$-1, $1\leq n\in$Z thì $(1+a)^n\geq 1+na$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ n=1 \end{array}\right.$

<u>b) Dạng mở rộng</u>:

- Cho a > -1, $\alpha\geq 1$ thì $(1+a)^\alpha\geq 1+na$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = 0.
- cho $a\geq -1, 0<\alpha<1$ thì $(1+a)^\alpha\leq 1+na$. Dấu bằng xảy ra khi va chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ \alpha=1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 1 *:* Chứng minh rằng $a^b+b^a>1, \forall a,b>0$.

Giải

- Nếu $a\geq 1$ hay $b\geq 1$ thì BĐT luôn đúng
- Nếu 0 < a,b < 1

Áp dụng BĐT Bernouli:

$\left(\frac{1}{a}\right)^b=\left(1+\frac{1-a}{a}\right)^b<1+\frac{b(1-a)}{a}<\frac{a+b}{a}\Rightarrow a^b>\frac{a}{a+b}$.

Chứng minh tương tự: $b^a>\frac{b}{a+b}$. Suy ra $a^b+b^a>1$ (đpcm).

Ví dụ 2: Cho a,b,c > 0.Chứng minh rằng

$\frac{a^5+b^5+c^5}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5$. (1)

Giải

$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5\geq 3$

Áp dụng BĐT Bernouli:

$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5=\left(1+\frac{b+c-2a}{a+b+c}\right)^5\geq 1+\frac{5(b+c-2a)}{a+b+c}$ (2)

Chứng minh tương tự ta được:

$$\left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 \geq 1+\frac{5(c+a-2b)}{a+b+c} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 1+\frac{5(a+b-2c)}{a+b+c} \qquad (4)$$

Cộng (2) (3) (4) vế theo vế ta có

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 3 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Chú ý: ta có bài toán tổng quát sau đây:

“Cho $a_1, a_2, \ldots a_n > 0; r \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^r.$$

Dấu ‘=’ $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.(chứng minh tương tự bài trên).

Ví dụ 3: Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(2^x+2^y+2^z\right)\left(2^{-x}+2^{-y}+2^{-z}\right) \leq \frac{81}{8}.$$

Giải

Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z \quad (1 \leq a, b, c \leq 2)$.

$1 \leq a \leq 2 \Rightarrow (a-1)(a-2) \leq 0$

$$\Rightarrow a^2-3a+2 \leq 0 \Rightarrow a+\frac{2}{a} \leq 3 \quad (1)$$

Chứng minh tương tự:

$$b+\frac{2}{b} \leq 3 \qquad (2)$$

$$c+\frac{2}{c} \leq 3 \qquad (3)$$

Cộng (1) (2) (3) vế theo vế ta được

$$9 \geq (a+b+c)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \overset{côsi}{\geq} 2\sqrt{(a+b+c)2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{81}{8} \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \Rightarrow (đpcm)$$

Chú ý: Bài toán tổng quát dạng này

“ Cho n số $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b], c > 1$

Ta luôn có:

$$\left(c^{x_1}+c^{x_2}+\ldots+c^{x_n}\right)\left(c^{-x_1}+c^{-x_2}+\ldots+c^{-x_n}\right) \leq \frac{\left[n\left(c^a+c^b\right)\right]^2}{4c^{a+b}}$$

Phương pháp 8: *Sử dụng tính chất bắc cầu*

Kiến thức: A>B và B>C thì A>C

Ví dụ 1: Cho a, b, c ,d >0 thỏa mãn a> c+d , b>c+d

Chứng minh rằng ab >ad+bc

Giải:

Tacó $\begin{cases} a > c + d \\ b > c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c > d > 0 \\ b - d > c > 0 \end{cases} \Rightarrow$ (a-c)(b-d) > cd

$\Leftrightarrow$ ab-ad-bc+cd >cd $\Leftrightarrow$ ab> ad+bc (điều phải chứng minh)

Ví dụ 2: Cho a,b,c>0 thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$

Giải: Ta có :$(a+b- c)^2= a^2+b^2+c^2+2(ab -ac - bc) \rangle 0$

$\Rightarrow$ ac+bc-ab $\langle \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow$ ac+bc-ab $\leq \frac{5}{6} \langle 1$ Chia hai vế cho abc > 0 ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \langle \frac{1}{abc}$

Ví dụ 3: Cho 0 < a,b,c,d <1 Chứng minh rằng (1-a).(1-b) (1-c).(1-d) > 1-a-b-c-d **Giải:** Ta có (1-a).(1-b) = 1-a-b+ab

Do a>0 , b>0 nên ab>0 $\Rightarrow$ (1-a).(1-b) > 1-a-b (1)

Do c <1 nên 1- c >0 ta có $\Rightarrow$(1-a).(1-b) (1-c) > 1-a-b-c

$\Rightarrow$ (1-a).(1-b) (1-c).(1-d) > (1-a-b-c) (1-d) =1-a-b-c-d+ad+bd+cd

$\Rightarrow$ (1-a).(1-b) (1-c).(1-d) > 1-a-b-c-d (Điều phải chứng minh)

Ví dụ 4: Cho 0 <a,b,c <1 . Chứng minh rằng***:*** $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 < 3 + a^2b + b^2c + c^2a$

Giải:

Do a < 1 $\Rightarrow a^2 < 1$ và

Ta có $(1 - a^2).(1 - b) < 0 \Rightarrow$ 1-b-$a^2 + a^2$b > 0$\Rightarrow$ 1+$a^2 b^2 > a^2$ + b

mà 0< a,b <1 $\Rightarrow a^2 > a^3$, $b^2 > b^3$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 1+$a^2 b^2 > a^3 + b^3$. Vậy $a^3 + b^3 < 1 + a^2 b^2$

Tương tự $b^3 + c^3 \leq 1 + b^2c$; $c^3 + a^3 \leq 1 + c^2a$

Cộng các bất đẳng thức ta có : $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \leq 3 + a^2b + b^2c + c^2a$

Ví dụ 5 Chứng minh rằng : Nếu $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1998$ thì $|$ac+bd$|$ =1998

Giải:

Ta có $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd =$

$= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2) =(c^2+d^2).(a^2+ b^2) = 1998^2$

rõ ràng $(ac+bd)^2 \leq (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = 1998^2 \Rightarrow |ac + bd| \leq 1998$

Ví dụ 6 (HS tự giải) :

a/ Cho các số thực : $a_1; a_2;a_3 \ldots;a_{2003}$ thỏa mãn : $a_1+ a_2+a_3 + \ldots+a_{2003} =1$

c hứng minh rằng : $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2003}^2 \geq \frac{1}{2003}$

b/ Cho a;b;c ≥ 0 thỏa mãn :a+b+c=1

Chứng minh rằng: $(\frac{1}{a} - 1).(\frac{1}{b} - 1).(\frac{1}{c} - 1) \geq 8$

Phương pháp 9: *Dùng tính chất của tỷ số*

Kiến thức

1) Cho a, b ,c là các số dương thì

a – Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$

b – Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

2) Nếu b,d >0 thì từ

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

`

Ví dụ 1: Cho a,b,c,d > 0 .Chứng minh rằng

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

Giải: Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có

$$\frac{a}{a+b+c}<1\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Mặt khác : $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có \

$$\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d} \quad (4)$$

$$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{b+c}{a+b+c+d} \quad (5)$$

$$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d} \quad (6)$$

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$ điều phải chứng minh

Ví dụ 2 :Cho:$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và b,d > 0 .Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

Giải: Từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{ab}{b^2}<\frac{cd}{d^2} \Rightarrow\frac{ab}{b^2}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{cd}{d^2}=\frac{c}{d}$

Vậy $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$ điều phải chứng minh

Ví dụ 3 : Cho a;b;c;dlà các số nguyên dương thỏa mãn : a+b = c+d =1000 tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$

Giải: Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d}$ Từ : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d}$

$\Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{a+b}{c+d} \le \frac{b}{d}$

$\frac{a}{c} \le 1$ vì a+b = c+d

a/ Nếu :b ≤ 998 thì $\frac{b}{d} \le 998 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \le 999$

b/Nếu: b=998 thì a=1 $\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{1}{c} + \frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi d= 1; c=999

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ =999+ $\frac{1}{999}$ khi a=d=1; c=b=999

Phương pháp 10: Phương pháp làm trội

Kiến thức:

Dùng các tính bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

(*) Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn : S = $u_1 + u_2 + ... + u_n$

Ta cố gắng biến đổi số hạng tổng quát u $_k$ về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau:

$$u_k = a_k - a_{k+1}$$

Khi đó :S = $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$

(*) Phương pháp chung về tính tích hữu hạn: P = $u_1 u_2 ... u_n$

Biến đổi các số hạng u_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau: $u_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}$

Khi đó P = $\frac{a_1}{a_2} . \frac{a_2}{a_3} ..... \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$

Ví dụ 1: Với mọi số tự nhiên n >1 chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}$$

Giải: Ta có $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ với k = 1,2,3,…,n-1

Do đó: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$ Với n là số nguyên

Giải: Ta có $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

Khi cho k chạy từ 1 đến n ta có

$1 > 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

....

$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2 \qquad \forall n \in Z$

Giải: Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Cho k chạy từ 2 đến n ta có

$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

....

$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2} < 1$

Vậy $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2$

Phương pháp 11: Dùng bất đẳng thức trong tam giác

Kiến thức: Nếu a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác thì : a;b;c> 0

Và |b-c| < a < b+c ; |a-c| < b < a+c ; |a-b| < c < b+a

Ví dụ 1: Cho a;b;c là số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

1/ $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$

2/ abc>(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)

Giải

1/Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có

$$\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < a+c \\ 0 < c < a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b+c) \\ b^2 < b(a+c) \\ c^2 < c(a+b) \end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có: $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$

2/ Ta có a > | b-c | $\Rightarrow a^2 > a^2-(b-c)^2 > 0$

b > | a-c | $\Rightarrow b^2 > b^2-(c-a)^2 > 0$

c > | a-b | $\Rightarrow c^2 > c^2-(a-b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được

$\Rightarrow a^2b^2c^2 > \left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$

$\Rightarrow abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$

Ví dụ2 (HS tự giải)

1/ Cho a,b,c là chiều dài ba cạnh của tam giác

Chứng minh rằng $ab+bc+ca<a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

2/Cho a,b,c là chiều dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc<2$

Phương pháp 12: Sử dụng hình học và tọa độ

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng : $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$, $\forall a\ge b\ge 0$ và $b\ge c$

Giải

Trong mặt phẳng Oxy, chọn $\vec{u}=(\sqrt{c},\sqrt{b-c})$; $\vec{v}=(\sqrt{a-c},\sqrt{c})$

Thì $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{b}$, $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{a}$; $\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}$

Hơn nữa: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos(\vec{u},\vec{v})\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ $\Rightarrow\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$ $\Rightarrow$(ĐPCM)

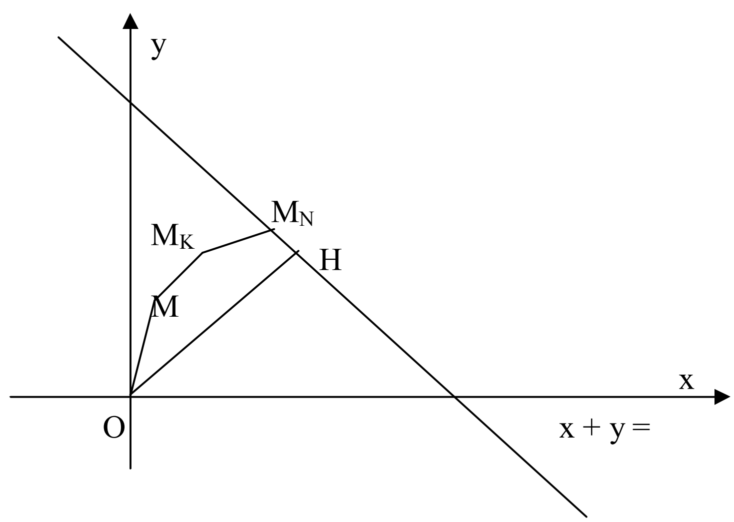
Ví dụ 2:

Cho 2n số: $x_i;y_i$, $i=1,2,...,n$ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i=1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Giải:

Vẽ hình



Trong mặt phẳng tọa độ, xét:

$M_1(x_1,y_1)$: $M_2(x_1+x_2,y_1+y_2)$;…; $M_n(x_1+\ldots+x_n,y_1+\ldots+y_n)$

Giả thiết suy ra $M_n\in$ đường thẳng x + y = 1. Lúc đó:

$OM_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $M_1M_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$, $M_2M_3=\sqrt{x_3^2+y_3^2}$,…, $M_{n-1}M_n=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$

Và $OM_1+M_1M_2+M_2M_3+\ldots+M_{n-1}M_n\ge OM_n\ge OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ (ĐPCM)

Phương pháp 13: Đổi biến số

Ví dụ1: Cho a,b,c > 0 Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ (1)

Giải: Đặt x=b+c ; y=c+a ;z= a+b ta có a=$\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c $=\frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow$ $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\geq 3$ $\Leftrightarrow(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\geq 6$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì ($\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$; $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2$; $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 2$ nên ta có điều phải chứng minh

Ví dụ2:

Cho a,b,c > 0 và a+b+c <1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9 \qquad (1)$$

Giải: Đặt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab. Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$ Với x+y+z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $x+y+z\geq 3.\sqrt[3]{xyz}$, và: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$\Rightarrow$ $(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$. Mà x+y+z < 1. Vậy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$ (đpcm)

Ví dụ3: Cho $x\geq 0$, $y\geq 0$ thỏa mãn $2\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$ CMR $x+y\geq\frac{1}{5}$

Gợi ý: Đặt $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$ $\Rightarrow$2u-v =1 và S = x+y =u^2+v^2 $\Rightarrow$ v = 2u-1 thay vào tính S min

Bài tập tự giải

1) Cho a > 0 , b > 0 , c > 0 CMR: $\frac{25a}{b+c}+\frac{16b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>8$

2)Tổng quát m, n, p, q, a, b >0

CMR

$$\frac{ma}{b+c}+\frac{nb}{c+a}+\frac{pc}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}\right)^2-(m+n+p)$$

Phương pháp 14: Dùng tam thức bậc hai

Kiến thứ: Cho f(x) = ax^2 + bx + c

Định lí 1:

f(x) > $0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

$f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$f(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

__Định lí 2__:

Phương trình f(x) = 0 có 2 nghiệm $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$

Phương trình f(x) = 0 có 2 nghiệm :

$$x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$$

Phương trình f(x) = 0 có 2 nghiệm :

$$\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$$

Phương trình f(x) = 0 có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} \alpha < x_1 < \beta < x_2 \\ x_1 < \alpha < x_2 < \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta) < 0.$

Ví dụ 1:Chứng minh rằng $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0$ (1)

Giải: Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - 2x(2y-1) + 5y^2 - 6y + 3 > 0$

$\Delta' = (2y-1)^2 - 5y^2 + 6y - 3 = 4y^2 - 4y + 1 - 5y^2 + 6y - 3 = -(y-1)^2 - 1 < 0$

Vậy $f(x, y) > 0$ với mọi x, y

Ví dụ2: Chứng minh rằng***:*** $f(x, y) = x^2y^4 + 2(x^2+2).y^2 + 4xy + x^2 > 4xy^3$

Giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$x^2y^4 + 2(x^2+2).y^2 + 4xy + x^2 - 4xy^3 > 0 \Leftrightarrow (y^2+1)^2.x^2 + 4y(1-y)^2x + 4y^2 > 0$

Ta có $\Delta' = 4y^2(1-y^2)^2 - 4y^2(y^2+1)^2 = -16y^2 < 0$

Vì a = $(y^2+1)^2 > 0$ vậy $f(x, y) > 0$ (đpcm)

Phương pháp 15: Dùng quy nạp toán học

Kiến thức:

Để chứng minh bất đẳng thức đúng với $n > n_0$ ta thực hiện các bước sau :

1 – Kiểm tra bất đẳng thức đúng với $n = n_0$

2 - Giả sử BĐT đúng với n =k (thay n =k vào BĐT cần chứng minh được gọi là giả thiết quy nạp)

3- Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k +1 (thay n = k+1vào BĐT cần chứng minh rồi biến đổi để dùng giả thiết quy nạp)

4 – kết luận BĐT đúng với mọi $n > n_0$

Ví dụ1: Chứng minh rằng *:* $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ $\forall n \in N; n>1$

(1)

Giải: Với n =2 ta có $1+\frac{1}{4}<2-\frac{1}{2}$ (đúng)**.** Vậy BĐT (1) đúng với n =2

Giả sử BĐT (1) đúng với n =k ta phải chứng minh BĐT (1) đúng với n = k+1

Thật vậy khi n =k+1 thì (1) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

Theo giả thiết quy nạp

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+....+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k}$$

$\Leftrightarrow \frac{k+1+1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k} \Leftrightarrow k(k+2)<(k+1)^2 \Leftrightarrow k^2+2k<k^2+2k+1$ Điều này đúng .Vậy bất đẳng thức (1)được chứng minh

Ví dụ2: Cho $n \in N$ và a+b> 0. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$ (1)

Giải: Ta thấy BĐT (1) đúng với n=1

Giả sử BĐT (1) đúng với n=k ta phải chứng minh BĐT đúng với n=k+1

Thật vậy với n = k+1 ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k}.\frac{a+b}{2} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \qquad (2)$$

$\Leftrightarrow$ Vế trái (2) $\le \frac{a^k+b^k}{2}.\frac{a+b}{2}=\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{4}\le\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{4}\ge 0 \Leftrightarrow \left(a^k-b^k\right).(a-b)\ge 0 \qquad (3)$$

Ta chứng minh (3)

(+) Giả sử a ≥ b và giả thiết cho a ≥ -b $\Leftrightarrow$ a ≥ $|b|$

$$\Leftrightarrow a^k \ge |b|^k \ge b^k \quad \Rightarrow \left(a^k-b^k\right).(a-b)\ge 0$$

(+) Giả sử a < b và theo giả thiết - a<b $\Leftrightarrow$ $|a|^k<b^k \Leftrightarrow a^k<b^k$ $\Leftrightarrow \left(a^k-b^k\right).(a-b)\ge 0$

Vậy BĐT (3)luôn đúng ta có (đpcm)

Ví dụ 3: Cho $a \geq -1$,$1 \leq n \in \mathrm{N}$. Chứng minh rằng : $(1+a)^n \geq 1+n.a$

Giải

n=1: bất đẳng thức luôn đúng

n=k ($k \in \mathrm{N}$): giả sử bất đẳng thức đúng, tức là: $(1+a)^k \geq 1+k.a$

n= k+1 . Ta cần chứng minh: $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1).a$

Ta có: $(1+a)^{k+1} = (1+a).(1+a)^k \geq (1+a).(1+k.a) \geq 1+(k+1)a+k.a^2 \geq 1+(k+1)a$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với n= k+1

V ậy theo nguyên lý quy nạp: $(1+a)^n \geq 1+n.a, \forall n \in \mathrm{N}$

Ví dụ 4: Cho $1 \leq n \in \mathrm{N}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ thoả mãn $a_1+a_2+\ldots+a_n \leq \dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng: $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geq \dfrac{1}{2}$

Giải n=1: $a_1 \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1-a_1 \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Bài toán đúng

n=k ($k \in \mathrm{N}$): giả sử bất đẳng thức đúng, tức là: $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k) \geq \dfrac{1}{2}$

n= k+1 . Ta cần chứng minh: $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{k+1}) \geq \dfrac{1}{2}$

Ta có: $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{k+1}) = (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{k-1})[1-(a_k+a_{k+1})+a_k a_{k+1}]$

$\geq (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{k-1})[1-(a_k+a_{k+1})] \geq \dfrac{1}{2}$ (Vì $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+(a_k+a_{k+1}) \leq \dfrac{1}{2}$)

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với n= k+1

Vậy theo nguyên lý quy nạp: $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geq \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 5: Cho $1 \leq n \in \mathrm{N}$, $a_i, b_i \in R, i=1,2,...,n$. Chứng minh rằng:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

Giải n=1: Bất đẳng thức luôn đúng

n=k ($k \in \mathrm{N}$):giả sử bất đẳng thức đúng, tức là:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2)$$

n= k+1 . Ta cần chứng minh:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{k+1}b_{k+1})^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k+1}^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{k+1}^2) \ (1)$$

Thật vậy:

$$VP(1) = (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2)+(a_1^2+\ldots+a_k^2).b^2+$$
$$+a^2(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2)+a_{k+1}^2.b_{k+1}^2$$
$$\geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k)+2a_1b_1a_{k+1}b_{k+1}+2a_2b_2a_{k+1}b_{k+1}+$$
$$+\ldots+2a_kb_ka_{k+1}b_{k+1}+a_{k+1}^2b_{k+1}^2$$
$$\geq (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k)^2+2\ (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k)\ a_{k+1}b_{k+1}+a_{k+1}^2.b_{k+1}^2$$

$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{k+1}b_{k+1})^2$

Vậy (1) được chứng minh

Ví dụ 6: Cho $1 \leq n \in \mathrm{N}$, $a_i, b_i \in R$, $i = 1,2,...,n$. Chứng minh rằng:

$$(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n})^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}$$

Giải:

n=1: Bất đẳng thức luôn đúng

n=k ($k \in \mathrm{N}$):giả sử bất đẳng thức đúng, tức là:

$$(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k})^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2}{k}$$

n= k+1 . Ta cần chứng minh: $(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}{k+1})^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{k+1}^2}{k+1}$ (1)

Đặt: $a = \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1}}{k}$

$$VP(1) = \frac{1}{k+1}(a_1^2 + k^2a^2 + 2ka_1a)$$

$$\geq \frac{1}{(k+1)^2}\left[a_1^2 + k^2\frac{a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{k+1}^2}{k} + k.a_1^2 + k\frac{a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{k+1}^2}{k}\right]$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{k+1}^2}{k+1}$$

Vậy (1) được chứng minh

***Ví dụ** 7:* Chứng minh rằng: $n^n > (n+1)^{n-1}, \forall n \in \mathrm{Z}, n \geq 2$

Giải: n=2 $\Rightarrow \begin{cases} n^n = 4 \\ (n+1)^{n-1} = 3 \end{cases} \Rightarrow n^n > (n+1)^{n-1}$

n=k≥ 2: giả sử bất đẳng thức đúng, tức là: $k^k > (k+1)^{k-1}$

n= k+1:Ta c ó: $k^k(k+1)^{k+1} \geq (k+1)^{k-1}(k+1)^{k+1} = (k+1)^{2k-2}(k+1)^2 = [(k+1)^2]^{k-1}(k+1)^2$

$> (k^2 + 2k)^{k-1}(k^2 + 2k)$ (vì $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2k$)

$\geq k^k(k+2)^k \quad \Rightarrow (k+1)^{k+1} > (k+2)^k$ $\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với n= k+1

Vậy $n^n > (n+1)^{n-1}, \forall n \in \mathrm{Z}, n \geq 2$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng: $|\sin nx| \leq n|\sin x|, \forall n \in \mathrm{N}^*, \forall x \in R$

Giải: n=1: Bất đẳng thức luôn đúng

n=k :giả sử bất đẳng thức đúng, tức là: $|\sin kx| \leq k|\sin x|$

n= k+1 . Ta cần chứng minh: $|\sin(k+1)x| \leq (k+1)|\sin x|$

Ta có: $\begin{cases} |a+b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in R \\ |\sin x|, |\cos x| \leq 1, \forall x \in R \end{cases}$

Nên: $|\sin(k+1)x| = |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x|$

$\leq |\sin kx|.|\cos x| + |\cos kx|.|\sin x| \leq |\sin kx|.+.|\sin x| \leq k|\sin x|.+.|\sin x| = (k+1)|\sin x|$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với n= k+1. Vậy: $|\sin nx| \le n|\sin x|, \forall n \in N^*, \forall x \in R$ +

Phương pháp 16: Chứng minh phản chứng

Kiến thức:

1) Giả sử phải chứng minh bất đẳng thức nào đó đúng , ta hãy giả sử bất đẳng thức đó sai và kết hợp với các giả thiết để suy ra điều vô lý , điều vô lý có thể là điều trái với giả thiết , có thể là điều trái ngược nhau .Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng

2) Giả sử ta phải chứng minh luận đề *"$p \Rightarrow q$"*

Muốn chứng minh $p \Rightarrow q$ (với p: giả thiết đúng, q: kết luận đúng) phép chứng minh được thực hiên như sau:

Giả sử không có q (hoặc q sai) suy ra điều vô lý hoặc p sai. Vậy phải có q (hay q đúng)

Như vậy để phủ định luận đề ta ghép tất cả giả thiết của luận đề với phủ định kết luận của nó .

Ta thường dùng 5 hình thức chứng minh phản chứng sau :

A - Dùng mệnh đề phản đảo : "P $\Rightarrow$ Q"

B – Phủ định rồi suy trái giả thiết

C – Phủ định rồi suy trái với điều đúng

D – Phủ định rồi suy ra 2 điều trái ngược nhau

E – Phủ định rồi suy ra kết luận :

Ví dụ 1: Cho ba số a,b,c thỏa mãn a +b+c > 0 , ab+bc+ac > 0 , abc > 0

Chứng minh rằng a > 0 , b > 0 , c > 0

Giải:

Giả sử a $\le$ 0 thì từ abc > 0 $\Rightarrow$ a$\neq$ 0 do đó a < 0. Mà abc > 0 và a < 0 $\Rightarrow$ cb < 0

Từ ab+bc+ca > 0 $\Rightarrow$ a(b+c) > -bc > 0

Vì a < 0 mà a(b +c) > 0 $\Rightarrow$ b + c < 0

a < 0 và b +c < 0 $\Rightarrow$ a + b +c < 0 trái giả thiết a+b+c > 0

Vậy a > 0 tương tự ta có b > 0 , c > 0

Ví dụ 2:Cho 4 số a , b , c ,d thỏa mãn điều kiện

ac $\ge$ 2.(b+d) .Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:

$$a^2 < 4b \quad , \quad c^2 < 4d$$

Giải:

Giả sử 2 bất đẳng thức : $a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$ đều đúng khi đó cộng các vế ta được

$$a^2 + c^2 < 4(b+d) \qquad (1)$$

Theo giả thiết ta có 4(b+d) $\le$ 2ac (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $a^2 + c^2 < 2ac$ hay $(a-c)^2 < 0$ (vô lý)

Vậy trong 2 bất đẳng thức $a^2 < 4b$ và $c^2 < 4d$ có ít nhất một các bất đẳng thức sai

Ví dụ 3:Cho x,y,z > 0 và xyz = 1. Chứng minh rằng

Nếu x+y+z > $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ thì có một trong ba số này lớn hơn 1

Giải : Ta có (x-1).(y-1).(z-1) =xyz – xy- yz + x + y+ z –1

=x + y + z – ($\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$) vì xyz = theo giả thiết x+y +z > $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

nên (x-1).(y-1).(z-1) > 0

Trong ba số x-1 , y-1 , z-1 chỉ có một số dương

Thật vậy nếu cả ba số dương thì x,y,z > 1 $\Rightarrow$ xyz > 1 (trái giả thiết)

Còn nếu 2 trong 3 số đó dương thì (x-1).(y-1).(z-1) < 0 (vô lý)

Vậy có một và chỉ một trong ba số x , y,z lớn hơn 1

Ví dụ 4: Cho $a,b,c>0$ và a.b.c=1. Chứng minh rằng: $a+b+c\geq 3$ (Bất đẳng thức Cauchy 3 số)

Giải: Giả sử ngược l ại:

$a+b+c<3 \quad \Rightarrow (a+b+c)ab<3ab \quad \Leftrightarrow a^2b+b^2a+cab<3ab \quad \Leftrightarrow a^2b+(a^2-3a)b+1<0$

Xét : $f(b)=a^2b+(a^2-3a)b+1$

Có $\Delta=(a^2-3a)^2-4a = a^4-6a^3+9a^2-4a=a(a^3-6a^2+9a-4) = =a(a-1)^2(a-4)\leq 0$

(Vì $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c<3 \end{cases} \Rightarrow 0<a<3$) $\Rightarrow f(b)\geq 0 \Rightarrow$ vô lý. Vậy: $a+b+c\geq 3$

Ví dụ 5:

Chứng minh rằng không tồn tại các số a, b, c đồng thời thỏa mãn (1),(2),(3):

$|a|<|b-c|$ (1)

$|b|<|c-a|$ (2)

$|c|<|a-b|$ (3)

Giải: Giả sử tồn tại các số a, b, c đồng thời thỏa mãn (1),(2),(3), lúc đó:

$|a|<|b-c| \Rightarrow (b-c)^2>a^2 \quad \Rightarrow -(a+b-c)(a-b+c)>0$ (1')

$|b|<|c-a| \Rightarrow (c-a)^2>b^2 \quad \Rightarrow -(-a+b+c)(a+b-c)>0$ (2')

$|c|<|a-b| \Rightarrow (a-b)^2>c^2 \quad \Rightarrow -(a+b-c)(-a+b+c)>0$ (3')

Nhân (1'), (2') và (3') vế với vế ta được:

$\Rightarrow -[(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)]^2>0$

$\Rightarrow$ Vô lý. Vậy bài toán được chứng minh

Phương pháp 17 : Sử dụng biến đổi lượng giác

1. Nếu $|x|\leq R$ thì đặt x = R$\cos\alpha$, $\alpha\in[0,\pi]$; hoặc x = R$\sin\alpha$, $\alpha\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2. Nếu $|x|\geq R$ thì đặt x = $\frac{R}{\cos\alpha}$ $\alpha\in[0,c)\cup\left[\pi,3\frac{\pi}{2}\right)$

3.Nếu $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, $(\sqrt{>0})$ thì đặt $\begin{cases} x=a+R\cos\alpha \\ y=b+R\sin\alpha \end{cases}$, $(\alpha=2\pi)$

4. Nếu $\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2=R^2\ \ a,b>0$ thì đặt $\begin{cases}x=\alpha+aR\cos\alpha\\ y=\beta+bR\sin\alpha\end{cases},\quad (\alpha=2\pi)$

5. Nếu trong bài toán xuất hiện biểu thức : $(ax)^2+b^2,\ \ (a,b>0)$

Thì đặt: $x=\frac{b}{a}tg\alpha,\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 1*:* Cmr : $\left|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}+\sqrt{3}\left(ab-\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}\right)\right|\le 2,\forall a,b\in[-1,1]$

Giải : $|a|\le 1,\ |b|\le 1$

Đặt : $\begin{cases}a=\cos\alpha\\ b=\cos\beta\end{cases}\qquad (\alpha,\beta\in[0,\pi])$

Khi đó :

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}+\sqrt{3}\left(ab-\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}\right)$$

$$=\cos\alpha.\sin\beta+\cos\beta.\sin\alpha+\sqrt{3}\left(\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta\right)$$

$$=\sin(\alpha+\beta)+\sqrt{3}.\cos(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha+\beta-\frac{\pi}{6})\in[-2,2]\Rightarrow(dpcm)$$

Ví dụ 2 : Cho $a,b\ge 1$.Chứng minh rằng : $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a1}\le ab$

Giải :

Đặt : $\begin{cases}a=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ b=\dfrac{1}{\cos^2\beta}\end{cases}\quad \left(\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$

$$\Rightarrow a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\sqrt{tg^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\beta}\sqrt{tg^2\alpha}=\frac{tg\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{tg\alpha}{\cos^2\beta}=\frac{(tg\beta.\cos^2\beta+tg\alpha.\cos^2\alpha)}{\cos^2\beta.\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\sin 2\beta+\sin 2\alpha)}{\cos^2\beta.\cos^2\alpha}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos in(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta.\cos^2\alpha}\le\frac{1}{\cos^2\beta.\cos^2\alpha}=ab$$

Ví dụ 3: Cho $ab\ne 0$.Chứng minh rằng : $-2\sqrt{2}-2\le\frac{a^2-(a-4b)^2}{a^2+4b^2}\le 2\sqrt{2}-2$

Giải

:Đặt: $a=2btg\alpha,\quad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{22}\right)$

$$\Rightarrow\frac{a^2-(a-4b)^2}{a^2+4b^2}=\frac{tg^2\alpha-(tg\alpha-2)^2}{1+tg^2\alpha}=4(tg\alpha-1).\cos^2\alpha$$

$$=2\sin 2\alpha-2(1+\cos 2\alpha)=2(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)-2$$

$$=2\sqrt{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})-2\in\left[-2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}-2\right]$$

Phương pháp 18: ***Sử dụng khai triển nhị thức Newton****.*

Kiến thức:

Công thức nhị thức Newton

$\left(a+b\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}a^{n-k}b^{k},\forall n\in N^{*},\forall a,b\in R$.

Trong đó hệ số $C_{n}^{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}\quad(0\le k\le n)$.

Một số tính chất đặt biệt của khai triển nhị thức Newton:

+ Trong khai triển $(a + b)^n$ có n + 1 số hạng.

+ Số mũ của a giảm dần từ n đến 0, trong khi đó số mũ của b tăng từ 0 đến n. Trong mỗi số hạng của khai trtiển nhị thức Newton có tổng số mũ của a và b bằng n.

+Các hệ số cách đều hai đầu thì bằng nhau

$C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}$.

+ Số hạng thứ k + 1 là $C_{n}^{k}a^{n-k}.b^{k}\qquad(0\le k\le n)$

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng $\left(1+a\right)^{n}\ge 1+na,\forall a\ge 0,\forall n\in N^{*}$ (bất đẳng thức bernoulli)

Giải

Ta có: $\left(1+a\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}a^{k}\ge C_{n}^{0}+C_{n}^{1}a=1+na$ (đpcm)

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a^{n}+b^{n}}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{n},\forall a,b\ge 0,\forall n\in N^{*}$

b) $\dfrac{a^{n}+b^{n}+c^{n}}{3}\ge\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n},\forall a,b,c\ge 0,\forall n\in N^{*}$

Giải

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$\left(a+b\right)^{n}=C_{n}^{0}a^{n}+C_{n}^{1}a^{n-1}b+....+C_{n}^{n-1}a.b^{n-1}+C_{n}^{n}b^{n}$

$\left(a+b\right)^{n}=C_{n}^{0}b^{n}+C_{n}^{1}b^{n-1}a+....+C_{n}^{n-1}b.a^{n-1}+C_{n}^{n}a^{n}$

$\Rightarrow 2\left(a+b\right)^{n}=C_{n}^{0}(a^{n}+b^{n})+C_{n}^{1}(a^{n-1}b+b^{n-1}a)+....+C_{n}^{n-1}(a.b^{n-1}+b.a^{n-1})+C_{n}^{n}(b^{n}+a^{n})$

$\forall a,b\ge 0,\forall i=1,2,...,n-1:$

$\left(a^{n-i}-b^{n-i}\right)\left(a^{i}-b^{i}\right)\ge 0\Rightarrow a^{n}+b^{n}\ge a^{n-i}b^{i}-a^{i}b^{n-i}$

$\Rightarrow 2\left(a+b\right)^{n}\le C_{n}^{0}(a^{n}+b^{n})+C_{n}^{1}(a^{n}+b^{n})+....+C_{n}^{n-1}(a^{n}+b^{n})+C_{n}^{n}(b^{n}+a^{n})$

$=(a^{n}+b^{n})(C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+....+C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n})=2^{n}(a^{n}+b^{n})$

$\Rightarrow\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{n}\le\dfrac{a^{n}+b^{n}}{n}$

b) Đặt $d=\dfrac{a+b+c}{3}\ge 0$

Theo câu (a) ta có:

$$\frac{a^n+b^n+c^n+d^n}{4} \ge \frac{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n+2\left(\frac{c+d}{2}\right)^n}{4}$$

$$=\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^n+\left(\frac{c+d}{2}\right)^n}{2} \ge \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n \ge d^n$$

$$\Rightarrow a^n+b^n+c^n+d^n \ge 4d^n \Rightarrow a^n+b^n+c^n \ge 3d^n$$

$$\Rightarrow \frac{a^n+b^n+c^n}{3} \ge d^n = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

Phương pháp 19: ***Sử dụng tích phân***

Hàm số: $f, g : [a,b] \to R$ liên tục, lúc đó:

* Nếu $f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

* Nếu $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

* Nếu $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$ và $\exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) > g(x_0)$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

* Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$ thì $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ (m, M là hằng số)

Ví dụ 1: Cho A, B, C là ba góc của tam giác.

Chưng minh rằng: $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$

Giải:

Đặt $f(x)=tg\frac{x}{2}, x \in (0,\pi)$

$f'(x)=\frac{1}{2}(1+tg^2\frac{x}{2})$

$f''(x)=\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}(1+tg^2\frac{x}{2}) > 0, x \in (0,\pi)$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho:

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \geq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \geq 3tg\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \geq 3tg\frac{\pi}{6}$$

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Ví dụ 2: Chứng minh: $\frac{\pi}{10} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-2\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{6}$

Giải

Trên đoạn $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ta có:

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\cos^2 x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -2\cos^2 x \leq 0$$

$$\Rightarrow 3 \leq 5-2\cos^2 x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{5-2\cos^2 x} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-2\cos^2 x} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \Rightarrow \frac{\pi}{10} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-2\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{6}(đpcm)$$

PHẦN III : CÁC BÀI TẬP NÂNG CAO

***Dùng định nghĩa**

1) Cho abc = 1 và $a^3 > 36$. . Chứng minh rằng $\frac{a^2}{3}+b^2+c^2 > ab+bc+ac$

Giải: Ta xét hiệu: $\frac{a^2}{3}+b^2+c^2- ab- bc - ac = \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}+ b^2+c^2- ab- bc - ac$

$= \left(\frac{a^2}{4}+ b^2+c^2- ab- ac+ 2bc\right)+\frac{a^2}{12}-3bc = \left(\frac{a}{2}-b- c\right)^2+\frac{a^3-36abc}{12a}$

$= \left(\frac{a}{2}-b- c\right)^2+\frac{a^3-36abc}{12a} > 0$ (vì abc=1 và $a^3 > 36$ nên a >0)

Vậy : $\frac{a^2}{3}+b^2+c^2 > ab+bc+ac$ Điều phải chứng minh

2) Chứng minh rằng

a) $x^4+y^4+z^2+1 \geq 2x.(xy^2-x+z+1)$

b) với mọi số thực a , b, c ta có

$a^2+5b^2-4ab+2a-6b+3 > 0$

c) $a^2+2b^2-2ab+2a-4b+2 \geq 0$

Giải:

a) Xét hiệu: $x^4+y^4+z^2+1-2x^2y^2+2x^2-2xz-2x$ = $\left(x^2-y^2\right)^2+(x-z)^2+(x-1)^2 = H$

$H \geq 0$ ta có điều phải chứng minh

b) Vế trái có thể viết H = $(a-2b+1)^2+(b-1)^2+1 \Rightarrow$ H > 0 ta có đpcm

c) vế trái có thể viết H = $(a-b+1)^2+(b-1)^2 \Rightarrow$ H $\geq$ 0 ta có điều phải chứng minh

*** Dùng biến đổi tương đương**

1) Cho x > y và xy =1 .Chứng minh rằng

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{(x-y)^2} \geq 8$$

Giải: Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với $(x-y)^4+4(x-y)^2+4 \geq 8.(x-y)^2$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)^4-4(x-y)^2+4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[(x-y)^2-2\right]^2 \geq 0$$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh

2) Cho xy $\geq$ 1 .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Giải:

Ta có $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{\left(1+x^2\right).(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{\left(1+x^2\right).(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$$

$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{\left(1+x^2\right).\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$ BĐT cuối này đúng do xy > 1 .Vậy ta có đpcm

*** Dùng bất đẳng thức phụ**

1) Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1 Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

Giải: áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có $(1.a+1.b+1.c)^2 \leq (1+1+1).\left(a^2+b^2+c^2\right) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3.\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

2) Cho a,b,c là các số dương . Chứng minh rằng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (1)

Giải: (1) $\Leftrightarrow$ $1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1 \geq 9$ $\Leftrightarrow$ $3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 9$

áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ Với x,y > 0. Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng

Vậy $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ (đpcm)

*** Dùng phương pháp bắc cầu**

1) Cho 0 < a, b,c <1 .Chứng minh rằng : $2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$

Giải: Do a <1 $\Rightarrow$ $a^2<1$ và b <1

Nên $(1-a^2).(1-b^2)>0\Rightarrow 1+a^2b-a^2-b>0$

Hay $1+a^2b>a^2+b$ (1)

Mặt khác 0 <a,b <1 $\Rightarrow$ $a^2>a^3$; $b>b^3\Rightarrow 1+a^2>a^3+b^3$

Vậy $a^3+b^3<1+a^2b$

Tương tự ta có

$$b^3+c^3<1+b^2c;a^3+c^3<1+c^2a$$

$\Rightarrow$ $2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$ (đpcm)

2) So sánh 31^{11} và 17^{14}

Giải: Ta thấy $31^{11}<32^{11}=\left(2^5\right)^{11}=2^{55}<2^{56}$

Mặt khác $2^{56}=2^{4.14}=\left(2^4\right)^{14}=16^{14}<17^{14}$ Vậy $31^{11}<17^{14}$ (đpcm)

*** Dùng tính chất tỉ số**

1) Cho a ,b ,c ,d > 0 .Cminh rằng: $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$

Giải: Vì a ,b ,c ,d > 0 nên ta có

$$\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

$$\frac{b++c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3 \quad \text{(đpcm)}$$

2) Cho a ,b,c là số đo ba cạnh tam giác

Chứng minh rằng : $1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

Giải: Vì a ,b ,c là số đo ba cạnh của tam giác nên ta có a,b,c > 0

Và a < b +c ; b <a+c ; c < a+b

Từ (1) $\Rightarrow \frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}=\frac{2a}{a+b+c}$

Mặt khác $\frac{a}{b+c}>\frac{a}{a+b+c}$

Vậy ta có $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}$ Tương tự ta có $\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$

$$\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có :

$$1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2 \qquad \text{(đpcm)}$$

*** Phương pháp làm trội :**

1) Chứng minh BĐT sau :

a) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}<\frac{1}{2}$

b) $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<2$

Giải:

a) Ta có : $\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<\frac{1}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

b) Ta có: $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....+\frac{1}{(n-1).n}$

$$<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<2-\frac{1}{n}<2 \qquad \text{(đpcm)}$$

PHẦN IV : ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

1/ Dùng bất đẳng thức để tìm cưc trị

Kiến thức:

- Nếu f(x) $\geq$ A thì f(x) có giá trị nhỏ nhất là A
- Nếu f(x) $\leq$ B thì f(x) có giá trị lớn nhất là B

Ví dụ 1 :Tìm giá trị nhỏ nhất của :T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4|

Giải: Ta có |x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| $\geq$ |x-1+4-x| = 3 (1)

Và $|x-2|+|x-3|=|x-2|+|3-x|\geq|x-2+3-x|=1$ (2)

Vậy T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4| $\geq$ 1+3 = 4

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1\leq x\leq 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2\leq x\leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2\leq x\leq 3$

Ví dụ 2 :

Tìm giá trị lớn nhất của S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x) với x,y,z > 0 và x+y+z =1

Giải: Vì x,y,z > 0 ,áp dụng BĐT Côsi ta có

x+ y + z $\geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{27}$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có

$\left(x+y\right).\left(y+z\right).\left(z+x\right)\geq 3\sqrt[3]{\left(x+y\right).\left(y+z\right).\left(x+z\right)}\ \Rightarrow 2\geq 3\sqrt[3]{\left(x+y\right).\left(y+z\right).\left(z+x\right)}$

Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Vậy S ≤ $\frac{8}{27}.\frac{1}{27}=\frac{8}{729}$. Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Ví dụ 3: Cho xy+yz+zx = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4+y^4+z^4$

Giải: Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $\left(xy+yz+zx\right)^2\leq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\Rightarrow 1\leq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2,y^2,z^2) và (1,1,1)

Ta có $(x^2+y^2+z^2)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4)\Rightarrow(x^2+y^2+z^2)^2\leq 3(x^4+y^4+z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1\leq 3(x^4+y^4+z^4)\ \Rightarrow x^4+y^4+z^4\leq\frac{1}{3}$

Vậy $x^4+y^4+z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi x=y=z=$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 4 **:** Trong tam giác vuông có cùng cạnh huyền , tam giác vuông nào có diện tích lớn nhất

Giải: Gọi cạnh huyền của tam giác là 2a

Đường cao thuộc cạnh huyền là h

Hình chiếu các cạnh góc vuông lên cạnh huyền là x,y

Ta có S $=\frac{1}{2}.\left(x+y\right).h=a.h=a.\sqrt{h^2}=a.\sqrt{xy}$

Vì a không đổi mà x+y = 2a. Vậy S lớn nhất khi x.y lớn nhất $\Leftrightarrow x=y$

Vậy trong các tam giác có cùng cạnh huyền thì tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất

2/ Dùng Bất đẳng thức để giải phương trình và hệ phương trình

Ví dụ 1**:**Giải phương trình: $4\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

Giải : Ta có $3x^2+6x+19=3.(x^2+2x+1)+16\ \ =3.(x+1)^2+16\geq 16$

$5x^2+10x+14=5.\left(x+1\right)^2+9\geq 9$

Vậy $4.\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14}\geq 2+3=5$

Dấu (=) xảy ra khi x+1 = 0 $\Rightarrow$ x = -1

Vậy $4\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ khi x = -1

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = -1

Ví dụ 2**:** Giải phương trình $x+\sqrt{2-x^2}=4y^2+4y+3$

Giải : áp dụng BĐT BunhiaCốpski ta có :

$x+\sqrt{2-x^2}\leq\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)}\leq\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$ Dấu (=) xảy ra khi x = 1

Mặt khác $4y^2+4y+3=\left(2y+1\right)^2+2\geq 2$ Dấu (=) xảy ra khi y = -$\frac{1}{2}$

Vậy $x+\sqrt{2-x^2}=4y^2+4y+3=2$ khi x =1 và y =-$\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ví dụ 3:Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$

Giải: áp dụng BĐT Côsi ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 = \frac{x^4 + y^4}{2} + \frac{y^4 + z^4}{2} + \frac{z^4 + x^4}{2} \ge x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

$$\ge \frac{x^2y^2 + y^2z^2}{2} + \frac{z^2y^2 + z^2z^2}{2} + \frac{x^2z^2 + y^2x^2}{2}$$

$$\ge y^2xz + z^2xy + x^2yz \ge xyz.(x + y + z)$$

Vì x+y+z = 1) Nên $x^4 + y^4 + z^4 \ge xyz$ Dấu (=) xảy ra khi x = y = z = $\frac{1}{3}$

Vậy $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$ có nghiệm x = y = z = $\frac{1}{3}$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2 & (1) \\ xy = 2 + x^2 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow 8 - y^2 \ge 0$ hay $|y| \le \sqrt{8}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow x^2 + 2 = |x|.|y| \le 2\sqrt{2}|x|$

$$\Rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}|x| + \sqrt{2^2} \le 0 \Rightarrow (|x| - \sqrt{2})^2 \le 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Nếu x = $\sqrt{2}$ thì y = $2\sqrt{2}$

Nếu x = -$\sqrt{2}$ thì y = -$2\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$

3/ Dùng BĐT để giải phương trình nghiệm nguyên

Ví dụ 1: Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le xy + 3y + 2z - 3$

Giải: Vì x,y,z là các số nguyên nên $x^2 + y^2 + z^2 \le xy + 3y + 2z - 3$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 3 \le 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) + \left(\frac{3y^2}{4} - 3y + 3\right) + \left(z^2 - 2z + 1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + \left(z - 1\right)^2 \le 0 \qquad (*)$$

Mà $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + \left(z - 1\right)^2 \ge 0 \qquad \forall x, y \in R$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + \left(z - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{y}{2} - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Giải: Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$

Ta có $2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z} \Rightarrow 2z \leq 3$

Mà z nguyên dương vậy z = 1. Thay z = 1 vào phương trình ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

Theo giả sử $x \geq y$ nên 1 = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow y \leq 2$ mà y nguyên dương

Nên y = 1 hoặc y = 2

Với y = 1 không thích hợp

Với y = 2 ta có x = 2

Vậy (2 ,2,1) là một nghiệm của phương trình

Hoán vị các số trên ta được các nghiệm của phương trình là (2,2,1);(2,1,2); (1,2,2)

Ví dụ 3: Tìm các cặp số nguyên thoả mãn phương trình $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y$ **(*)**

Giải:

(*) Với x < 0 , y < 0 thì phương trình không có nghĩa

(*) Với x > 0 , y > 0

Ta có $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x} = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = y^2 - x > 0$

Đặt $\sqrt{x} = k$ (k nguyên dương vì x nguyên dương)

Ta có $k.(k+1) = y^2$

Nhưng $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2 \Rightarrow k < y < k+1$

Mà giữa k và k+1 là hai số nguyên dương liên tiếp không tồn tại một số nguyên dương nào cả

Nên không có cặp số nguyên dương nào thoả mãn phương trình .

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Bài tập đề nghị :

Bài 1:Chứng minh rằng với mọi a,b,c > 0 : $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

HD : Chuyển vế quy đồng mẫu đưa về tổng bình phương các đẳng thức.

Bài 2:Chứng minh bất đẳng thức : $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+..+\frac{1}{n(n+1)}<1 \quad (n\in N^*)$

HD: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Bài 3: Cho a, b. c > 0 và a + b + c ≤ 1. Cmr : $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64$

HD : Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $\left(1+\frac{1}{a}\right),\left(1+\frac{1}{b}\right),\left(1+\frac{1}{c}\right)$

Bài 4 : Cho $a\geq c\geq 0, b\geq c\geq 0$. Cmr : $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$

HD : Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $\sqrt{\frac{c}{b}\frac{a-c}{a}},\sqrt{\frac{c}{a}\frac{b-c}{b}}$, rồi cộng hai vế theo vế.

Bài 5: Cho a, b >1. Tìm GTNN của S = $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$

HD : Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $\frac{a^2}{b-1},\frac{b^2}{a-1}$ và xét trường hợp dấu "=" xảy ra .

Bài 9 : Tìm GTLN và GTNN của y = $\frac{3+8x^2+12x^4}{(1+2x^2)^2}$

HD: Đặt x= $\frac{1}{\sqrt{2}}tg\alpha, \quad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 10: Cho $36x^2+16y^2=9$. Cmr : $\frac{15}{4}\leq y-2x+5\leq\frac{25}{4}$

HD: Đặt : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\alpha \\ y=\frac{3}{4}\sin\alpha \end{cases}$

Bài 11: Cmr : $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\geq\frac{x}{2}(1+2\sqrt{1-x^2}),\ \forall x\in[-1,1]$

HD : Đặt x = $\sin 2\alpha,\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

Bài 12: Cho $a,b\geq 0, c\leq 1$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\leq 1+a^2b+b^2c+c^2a$

Bài 13: Cho ΔABC có a, b, c là độ dài các cạnh. Chứng minh rằng:
$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$

Bài 14: Cho $n\in Z, 1\leq n, a,b\geq 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

Bài 15: $n\in Z, 2\leq n$. Chứng minh rằng: $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

Bài 16: Có tồn tại $x \in R$ sao cho: $\frac{1}{3} \le \frac{tg3x}{tgx} \le 3$?

Bài 17: Cho ΔABC có diện tích bằng 4 (đơn vị diện tích). Trên các cạnh BC, CA, AB lấy lần lượt các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng: Trong tất cả các tam giác AB'C', A'BC', A'B'C có ít nhất 1 diện tích nhỏ hơn hay bằng 1(đơn vị diện tích)