Phương pháp đổi biến trong chứng minh bất đẳng thức

Lê Hồ Quý
Trường THPT Duy Tân, Kon Tum

Trong thực tế giải toán bất đẳng thức, có nhiều bất đẳng thức không thể chứng minh trực tiếp được. Trong những tình huống như vậy, người ta thường sử dụng phương pháp đổi biến số. Với các biến mới, các bất đẳng thức trở nên dễ dàng hơn trong việc chứng minh.

1. Các bất đẳng thức có thể chọn được điểm rơi

Thí dụ 1. Cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 6.$$

Lời giải. Dễ thấy a, b, c bình đẳng, ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại điểm rơi $a=b=c=1$.
Vì vậy, ta đặt $a=1+x; b=1+y$. Từ giả thiết, ta suy ra $c=1-x-y$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\\
=&(1+x)^2+(1+y)^2+(1-x-y)^2+(1+x)(1+y)+(1+y)(1-x-y)+(1-x-y)(1+x)\\
=&x^2+xy+y^2+6=(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2+6 \geq 6.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=0$ và $x+\frac{1}{2}y=0 \Leftrightarrow x=y=0$ hay $a=b=c=1$.
Vậy $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 6$.

Thí dụ 2. Cho $a+b=c+d$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+ab \geq 3cd.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra tại điểm rơi $a=b=c=d$.
Do vậy, đặt $a=c+x$, với $x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết, ta suy ra $b=d-x$.
Ta có

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+ab&=(c+x)^2+(d-x)^2+(c+x)(d-x)=c^2+d^2+x^2+cd+cx-dx\\
&=\big(c^2+d^2+\frac{1}{4}x^2-2cd+cx-dx\big)+3cd+\frac{3}{4}x^2=\big(c-d+\frac{1}{2}x\big)^2+\frac{3}{4}x^2+3cd \geq 3cd.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ và $c - d + \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $c = d$ hay $a = b = c = d$.
Vậy $a^2 + b^2 + ab \geq 3cd$.

Thí dụ 3. Cho $a \leq 4$. Chứng minh rằng

$$a^2(2-a) + 32 \geq 0.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra tại điểm rơi $a = 4$.
Do vậy, đặt $a = 4 - x$. Từ giả thiết, ta suy ra $x \geq 0$.
Ta có

$$a^2(2-a) + 32 = (4-x)^2(2-4+x) = x^3 - 10x^2 + 32x = x\big[(x-5)^2 + 7\big] \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hay $a = 4$.
Vậy $a^2(2-a) + 32 \geq 0$.

Thí dụ 4 (Bất đẳng thức Nesbit). Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra tại điểm rơi $a = b = c = 1$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned}
&\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3\\
\Leftrightarrow &\Big(\frac{2a}{b+c} + 1\Big) + \Big(\frac{2b}{c+a} + 1\Big) + \Big(\frac{2c}{a+b} + 1\Big)\\
\Leftrightarrow &\frac{(a+b)+(c+a)}{b+c} + \frac{(b+c)+(a+b)}{c+a} + \frac{(c+a)+(b+c)}{a+b} \geq 6.
\end{aligned}$$

Đặt $x = a + b, y = c + a$ và $z = a + b$ thì bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6,$$

trong đó x, y, z là các số thực dương.
Hay

$$\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) + \Big(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\Big) + \Big(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\Big) \geq 6 \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* cho hai số không âm, ta có

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2 \text{ và } \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2.$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức vừa thu được, ta nhận được bất đẳng thức (1). Từ đó, ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Các bất đẳng thức cho biết điều kiện của tổng các biến nhưng không (hoặc khó) chọn được điểm rơi

Thí dụ 5. Cho $a \leq 1; a+b \geq 3$. Chứng minh rằng

$$3a^2 + b^2 + 3ab - \frac{27}{4} \geq 0.$$

Lời giải. Đặt $a = 1 - x$ và $a + b = 3 + y$. Từ giả thiết, ta suy ra $x, y \geq 0$, do đó $b = 2 + x + y$.
Từ đó, ta có

$$3a^2 + b^2 + 3ab - \frac{27}{4} = 3(1-x)^2 + (2+x+y)^2 + 3(1-x)(2+x+y) - \frac{27}{4}$$
$$= x^2 + y^2 - 5x + 7y - xy + \frac{25}{4} = \big(x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{2}y \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{5}{2}$ và $y = 0$ hay $a = -\frac{3}{2}$ và $b = \frac{9}{2}$.

Thí dụ 6. Cho $a, b, c \in [1; 3]$ và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng
a) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 14$;
b) $a^3 + b^3 + c^3 \leq 36$.
Lời giải. Đặt $a = x + 1; b = y + 1; c = z + 1$. Khi đó $x, y, z \in [0; 2]$ và $x + y + z = 3$.
Giả sử $x = \max\{\mathrm{x; y; z}\}$, suy ra $x + y + z = 3 \leq 3x \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$ nên

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + (y+z)^2 = x^2 + (3-x)^2 = 5 + 2(x-1)(x-2) \leq 5.$$

Tức là

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 5 \tag{2}$$

Tương tự, ta chứng minh được

$$x^3 + y^3 + z^3 \leq 9 \tag{3}$$

a) Ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3 \tag{4}$$

Từ (2) và (4), ta suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 14$ (đpcm).
b) Ta có:

$$a^3+b^3+c^3 = (x+1)^3+(y+1)^3+(z+1)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2+y^2+z^2)+3(x+y+z)+9 \tag{5}$$

Từ (2), (3) và (5), ta suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \leq 36$ (đpcm).

Thí dụ 7. Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $a + b \neq 0$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + \big(\frac{1+ab}{a+b}\big)^2 \geq 2.$$

Lời giải. Đặt $c = -\frac{1+ab}{a+b}$. Ta có $ab + bc + ca = -1$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \geq 2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 + c^2 \geq -2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow & (a + b + c)^2 \geq 0 \ \ \text{(Bất đẳng thức đúng)}. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

3. Các bất đẳng thức có giả thiết cho ba biến là các số thực có tích bằng 1

Trong một số bài toán bất đẳng thức, chúng ta hay gặp giả thiết cho a, b, c là các số thực có tích bằng 1. Khi đó, ta có thể thay các biến số a, b, c bằng các biến số mới x, y, z khác 0 sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{y}$. Ngoài ra, nếu a, b, c là các số dương thì ta cũng có thể giả thiết thêm rằng x, y, z cũng là các số thực dương.

Thí dụ 8 (IMO 2000). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\big(a - 1 + \frac{1}{b}\big)\big(b - 1 + \frac{1}{c}\big)\big(c - 1 + \frac{1}{a}\big) \leq 1.$$

Lời giải. Vì a, b, c là các số thực dương có $abc = 1$ nên ta có thể đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$. Khi đó, bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} & \big(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\big)\big(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\big)\big(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\big) \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x - y + z}{y} . \frac{y - z + x}{z} . \frac{z - x + y}{x} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y)}{xyz} \leq 1 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz. \tag{6}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Ta có

$$x - y + z > 0 \ \text{ và } \ y - z + x > 0.$$

Do đó, nếu $z - x + y \leq 0$ thì bất đẳng thức (6) đúng, vì

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq 0 < xyz.$$

Bây giờ, ta xét trường hợp $z - x + y > 0$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* cho hai số dương, ta có

$$\sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leq \frac{(x - y + z)(y - z + x)}{2} = x.$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\sqrt{(y-z+x)(z-x+y)} \leq y$$
$$\sqrt{(z-x+y)(x-y+z)} \leq z.$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên, ta nhận được (6). Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Vì a, b, c là các số thực dương có $abc = 1$ nên ta có thể đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z},$ và $c = \frac{z}{y}$, với x, y, z là các số thực dương. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}+1\right)} + \frac{1}{\frac{y}{z}\left(\frac{z}{x}+1\right)} + \frac{1}{\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}+1\right)} \geq \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{yz}{x(y+z)} + \frac{zx}{y(z+x)} + \frac{xy}{z(x+y)} \geq \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{yz}{xy+zx} + \frac{zx}{yz+xy} + \frac{xy}{zx+yz} \geq \frac{3}{2}$$

Hay

$$\frac{u}{v+w} + \frac{v}{w+u} + \frac{w}{u+v} \geq \frac{3}{2},$$

với $u = yz, v = zx, w = xy$ là các số thực dương.
Đây chính là bất đẳng thức Nesbit cho ba số dương. Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý. Đối với một số bài toán chúng ta lại gặp các biểu thức $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$, trong đó a, b, c là các số thực khác 0. Khi đó, ta đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ để đưa bài toán về các biến mới thỏa mãn điều kiện $xyz = \frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a} = 1$.

Thí dụ 10. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b}{a+2b} + \frac{c}{b+2c} + \frac{a}{c+2a} \leq 1.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{a}{b}+2} + \frac{1}{\frac{b}{c}+2} + \frac{1}{\frac{c}{a}+2} \leq 1 \tag{7}$$

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ thì x, y, z là các số thực dương có tích $xyz = 1$.
Khi đó, bất đẳng thức (7) được viết lại dưới dạng

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \leq 1.$$

hay

$$\begin{aligned}
&(x+2)(y+2)+(y+2)(z+2)+(z+2)(x+2) \leq (x+2)(y+2)(z+2)\\
\Leftrightarrow&(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+12 \leq xyz+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+8\\
\Leftrightarrow&4 \leq xyz+xy+yz+zx \Leftrightarrow 3 \leq xy+yz+zx \ \ (\text{vì } \ xyz=1)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* cho ba số dương, ta có

$$xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3.$$

Từ đó, suy ra bất đẳng thức (7) đúng và ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{b}{c}.\frac{a}{c+a} + \frac{c}{a}.\frac{b}{a+b} + \frac{a}{b}.\frac{c}{b+c} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

hay

$$\frac{b}{c}.\frac{1}{\frac{c}{a}+1} + \frac{c}{a}.\frac{1}{\frac{a}{b}+1} + \frac{a}{b}.\frac{1}{\frac{b}{c}+1} \geq \frac{1}{\frac{c}{a}+1} + \frac{1}{\frac{a}{b}+1} + \frac{1}{\frac{b}{c}+1} \tag{8}$$

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ thì x, y, z là các số thực dương có tích $xyz = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
(8) \Leftrightarrow&\frac{y}{z+1} + \frac{z}{x+1} + \frac{x}{y+1} \geq \frac{1}{z+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\\
\Leftrightarrow&y(x+1)(y+1)+z(y+1)(z+1)+x(z+1)(x+1) \geq\\
&\geq (x+1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x+1)\\
\Leftrightarrow&(xy^2+yz^2+zx^2)+(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)+(x+y+z) \geq\\
&\geq (xy+yz+zx)+2(x+y+z)+3\\
\Leftrightarrow&(xy^2+yz^2+zx^2)+(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)+3\\
\Leftrightarrow&(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x+y+z-3)+(xy^2+yz^2+zx^2-3) \geq 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM* cho ba số dương, ta có

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \ \text{ và } \ xy^2+yz^2+zx^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^3} = 3.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (9) đúng. Do đó, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

4. Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức chứa ba biến a, b, c không âm có vai trò như nhau

Ta có thể sử dụng phép đổi biến: $x = a + b + c;\ \ y = ab + bc + ca;\ \ z = abc$
Các đẳng thức thường sử dụng

$$xy - z = (a+b)(b+c)(c+a) \tag{10}$$
$$x^2 + y = (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) \tag{11}$$
$$x^2 - 2y = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x^3 - 3xy + 3z = a^3 + b^3 + c^3$$

Các bất đẳng thức thường sử dụng

$$x^2 \geq 3y \tag{12}$$
$$x^3 \geq 27z$$
$$y^2 \geq 3xz$$
$$xy \geq 9z$$
$$x^3 - 4xy + 9z \geq 0 \tag{13}$$

Thí dụ 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{6} + \frac{3}{a+b+c}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{a+b+c}{6} + \frac{3}{a+b+c} \tag{14}$$

Đặt $x = a + b + c,\ \ y = ab + bc + ca,\ \ z = abc$. Từ (10) và (11) ta có (14) trở thành

$$\frac{x^2 + y}{xy - z} \geq \frac{x}{6} + \frac{3}{x} \Leftrightarrow (x^2 + 3)6x - (x^2 + 18)(3x - z) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - 36x + x^2 z + 18z \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^3 - 12x + 9z) + x^2 z - 9z \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 3(x^3 - 12x + 9z) + z(x^2 - 9) \geq 0.$$

Do $y = 3$ nên từ (12) suy ra $x^2 \geq 9$, kết hợp với (13) ta có bất đẳng thức trên đúng, suy ra bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 13. Cho a, b, c là các số thực thuộc khoảng (0;1) thỏa mãn điều kiện $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 5abc \geq 1.$$

Lời giải. Ta có $abc = (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc$.
Do vậy, nếu đặt $x = a + b + c,\ \ y = ab + bc + ca,\ \ z = abc$ thì ta có $2z = 1 - x + y$.
Theo (13) thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x^3 - 3xy + 3z + 5z \geq 1 \Leftrightarrow x^3 - 3xy + 8z \geq 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 \geq y(3x - 4)$$

Để ý rằng $1 - x + y = 2z \geq 0$ và $x^2 \geq 3y$ nên $x - 1 < y < \frac{x^2}{3}$.
Xét ba trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $x \leq 1$ thì $x^3 - 4x + 3 = (1 - x)(3 - x - x^2) \geq 0 > y(3x - 4)$.
Trường hợp 2. Nếu $1 < x < \frac{4}{3}$ thì $3x - 4 < 0$ và $0 < x - 1 < y$, do đó

$$(x^3 - 4x + 3) - y(3x - 4) > (x^3 - 4x + 3) - (x - 1)(3x - 4) = (x - 1)^3 > 0.$$

Trường hợp 3. Nếu $x \geq \frac{4}{3}$ thì

$$(x^3 - 4x + 3) - y(3x - 4) > (x^3 - 4x + 3) - \frac{x^2}{3}(3x - 4) = \frac{(2x - 3)^2}{2} \geq 0.$$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $x^3 - 4x + 3 \geq y(3x - 4)$, suy ra bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

5. Một số cách đổi biến khác trong chứng minh bất đẳng thức

Thí dụ 14 (IMO 2011). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}, y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}, z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$. Rõ ràng $x, y, z \in (0; 1)$, ta cần chứng minh $x + y + z \geq 1$. Để ý rằng

$$\frac{a^2}{8bc} = \frac{x^2}{1 - x^2}, \quad \frac{b^2}{8ac} = \frac{y^2}{1 - y^2}, \quad \frac{c^2}{8ab} = \frac{z^2}{1 - z^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{512} = \Big(\frac{x^2}{1 - x^2}\Big)\Big(\frac{y^2}{1 - y^2}\Big)\Big(\frac{z^2}{1 - z^2}\Big).$$

Như vậy, ta cần phải chứng minh $x + y + z \geq 1$, trong đó $0 < x, y, z < 1$ và $(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) = 512(xyz)^2$.
Giả sử $x + y + z < 1$. Khi đó, theo bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) > \left[(x + y + z)^2 - x^2\right]\left[(x + y + z)^2 - y^2\right]\left[(x + y + z)^2 - z^2\right] =$$
$$=(x + x + y + z)(y + z)(x + y + y + z)(z + x)(x + y + z + z)(x + y) \geq$$
$$\geq 4(x^2yz)^{\frac{1}{4}}.2(yz)^{\frac{1}{2}}.4(y^2zx)^{\frac{1}{4}}.2(zx)^{\frac{1}{2}}.4(z^2xy)^{\frac{1}{4}}.2(xy)^{\frac{1}{2}} = 512(xyz)^2 \quad \text{(Mâu thuẫn !)}$$

Vậy $x + y + z \geq 1$.

Thí dụ 15 (IMO 1995). Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, ta có $xyz = 1$. Lúc đó, bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Từ bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ta có

$$[(y+z) + (z+x) + (x+y)]\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2$$

Vậy theo bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Thí dụ 16 (Korea 1998). Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a + b + c = abc$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Ta thấy $a+b+c = abc$ tương đương với $1 = xy+yz+zx$. Bất đẳng thức đã cho trở thành bất đẳng thức

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}$$

hay

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}} \leq \frac{3}{2}$$

hay

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức *AM-GM*, ta có

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \frac{x\sqrt{(x+y)(x+z)}}{(x+y)(x+z)} \leq \frac{1}{2}.\frac{x[(x+y)+(x+z)]}{(x+y)(x+z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z} + \frac{x}{x+y}\right)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x}\right)$$
$$\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y}\right).$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên, ta có kết quả phải chứng minh.

Thí dụ 17 (APMO 1996). Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Đặt $x = a+b-c, y = b+c-a, z = c+a-b$. Khi đó, ta có $a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{x+y}{2}, c = \frac{y+z}{2}$. Trước hết, ta chú ý rằng $2(x+y) \ge x+y+2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$, đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Áp dụng bất đẳng thức này, ta có các bất đẳng thức sau
$$\begin{aligned}
\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} &= \sqrt{x}+\sqrt{y} \le \sqrt{2}.\sqrt{x+y} = 2\sqrt{b}\\
\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} &= \sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{2}.\sqrt{y+z} = 2\sqrt{c}\\
\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c} &= \sqrt{z}+\sqrt{x} \le \sqrt{2}.\sqrt{z+x} = 2\sqrt{a}
\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta có bất đẳng thức phải chúng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c$.

Tài liệu

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Pree, 1967.

[2] Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gosmez Ortega, Rogelio valdez Delgado, *Inequalities, A Mathematical Olympial Approach*, Birkhäuser, 2009.

[3] Ivan Matié, *Classical Inequalities*, Olympial Training Materials, 2007.

[4] Cezar Lupu, Tudorel Lupu, *Problem 11245*, American mathematical Monthly, Vol.113, 2006.

[5] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.

[6] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2005.

[7] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Hà Nội, 2007.

[8] Ngô Thế Phiệt, *Một số phương pháp mới trong chứng minh bất đẳng thức*, NXB Giáo Dục, 2007.

[9] Trần Tuấn Anh, *Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức*, NXB Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh, 2006.

[10] http://www.math.vn