Phương pháp nhóm Abel trong chứng minh BĐT

Trong bất đẳng thức nhiều khi ta gặp những bài toán với giả hết sức "khó chịu".Ta dường như gặp phải bế tắc khi không có hướng giải.Chẳng hạn như bài T6/374.Đó là một bài điển hình cho phương pháp nhóm Abel để chứng minh BĐT.Ta đi vào nội dung phương pháp:

I. Khai triển Abel

Cho 2n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$.

Đặt $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ .Khi đó: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i\left(b_i - b_{i+1}\right) + S_n b_n$ .Việc chứng minh nó hoàn toàn là biến đổi đẳng thức.Ứng dụng quan trọng nhất là trong trường hợp n = 3.Với n =3 ta có:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1\left(b_1 - b_2\right) + \left(a_1 + a_2\right)\left(b_2 - b_3\right) + \left(a_1 + a_2 + a_3\right)b_3$$

II. Bài tập vận dụng

Bài toán 1 : Cho a,b,c thỏa mãn:

$$\begin{cases} 0 < a \le b \le c \le 3 \\ bc \le 6 \\ abc \le 6 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $a + b + c \le 6$.

Lời giải:

Từ giải thiết suy ra: $\frac{3}{c} \ge 1$; $\frac{3}{c} + \frac{2}{b} \ge 2\sqrt{\frac{6}{ab}} \ge 2$

và $\frac{3}{c} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$

Do đó ta có 6 =3+2+1= $\frac{3}{c}c + \frac{2}{b}b + \frac{1}{a}a$

$$= \frac{3}{c}\left(c - b\right) + \left(\frac{3}{c} + \frac{2}{b}\right)\left(b - a\right) + \left(\frac{3}{c} + \frac{2}{b} + \frac{1}{a}\right)a \ge \left(c - b\right) + 2\left(b - a\right) + 3a = a + b + c.$$

Vậy $a + b + c \le 6$. Dấu bằng xảy ra khi a=1, b=2, c=3

Nhận xét:

-Việc dự đoán dấu bằng hết sức quan trọng.Ở bài toán trên ta dự doán dấu bằng: a=1 , b=2 , c=3

This document was created using SOLID CONVERTER PDF — To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

-Nên tách các đại lượng ở vế lớn hơn sau đó sử dụng phép nhóm Abel rồi mới sử dụng đến giải thiết bài toán, theo dõi cách giải trên bạn sẽ thấy rõ cách làm.

Bài toán 2: Cho a,b,c thỏa mãn:

$\begin{cases} a \geq 3 \\ ab \geq 6 \\ abc \geq 6 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $a+b+c \geq 6$.

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{a}{3} \geq 1 \quad ; \quad \frac{a}{3}+\frac{b}{2} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{6}} \geq 2 \quad \text{và} \quad \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{6}} \geq 3$$

Do đó ta có $a+b+c = \frac{a}{3}.3+\frac{b}{2}.2+\frac{c}{1}.1$

$$= \frac{a}{3}(3-2)+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)(2-1)+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{1}\right).1 \geq 3-2+2.(2-1)+3=6$$

Vậy $a+b+c \geq 6$.Dấu bằng xảy ra khi a=3, b=2, c=1.

Nhận xét:

-Ứng dụng của phép nhóm Abel rất rõ ràng.Điều quan trọng là các bạn cần vận dụng một cách linh hoạt.

-Ta đưa ra bài toán tổng quát cho bài toán 2,cách chứng minh hoàn toàn tương tự.

Bài toán tổng quát : Cho a,b,c thỏa mãn:

$\begin{cases} a \geq \alpha \\ ab \geq \beta \\ abc \geq \gamma \end{cases}$ Chứng minh rằng: $a+b+c \geq \alpha+\beta+\gamma$.

Bài toán 3: Cho: $n \in Z^+$ và $x_1, x_2, ..., x_n \in R^+$ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.Chứng minh rằng

$$\left|\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+...+\frac{x_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Lời giải:

Đặt $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ Thế thì $S_n = 0$

Ta có $|S_k| = |x_1+x_2+...+x_k| = |x_{k+1}+x_{k+2}+...+x_n|$

$$\Rightarrow 2|S_k| = |x_1+x_2+...+x_k| + |x_{k+1}+x_{k+2}+...+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_n| = 1$$

hay $|S_k| \leq \frac{1}{2}$.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

Do đó $\left|\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+...+\frac{x_n}{n}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\times\frac{1}{k}\right| =\left|\sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+S_n\times\frac{1}{n}\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}\left|S_k\right|\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\le\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.Ta có đpcm.

Nhận xét:

-Ta thấy rằng phép nhóm Abel còn được ứng dụng tổng quát cho n số như bài toán trên.

-Để củng cố các bạn nên thử giải các bài toán sau:

Bài tập1 : Cho a,b,c thỏa mãn:

$\begin{cases} 0<a\le b\le c\le 3 \\ 2b+c\le 2 \\ 3a+2b+c\le 3 \end{cases}$ Tìm GTLN P $=a^2+b^2+c^2$

Bài tập 2: Cho a,b,c thỏa mãn $0<a\le b\le c$ và

$\begin{cases} a+\frac{b}{4}+\frac{c}{9}\le 3 \\ \frac{b}{4}+\frac{c}{9}\le 2 \\ \frac{c}{9}\le 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{c}$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com