TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
CHUYÊN LÊ KHIẾT
=====@@@=====

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ BẤT ĐẲNG THỨC.

TÁC GIẢ: NGUYỄN ANH KHOA
LỚP : 10 TOÁN

QUẢNG NGÃI, THÁNG 1 NĂM 2009

KĨ THUẬT CHUẨN HOÁ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN ANH KHOA

A.**<u>Lời giới thiệu</u>:**
Các bất đẳng thức thuần nhất có điều kiện và không có điều kiện là hai bài toán hoàn toàn khác nhau như ẩn sau trong đó chúng lại có mối quan hệ mật thiết với nhau. Chính sự liên quan mật thiết này đã làm nảy sinh một kĩ thuật mới chứng minh bất đẳng thức đó là "kĩ thuật chuẩn hoá". Trong bài viết này chúng ta sẽ khám phá kĩ thuật này có ý nghĩa như thế nào nhé!

B. <u>Kiến thức cơ bản</u>:

1.1 Bất đẳng thức thuần nhất:

Hàm số $f(x_1;x_2;...x_n)$ của các biến $x_1;x_2;...x_n$ được gọi là hàm thuần nhất bậc a nếu tồn tại số thực t thoả mãn: $f(tx_1;tx_2;...tx_n)=t^a.f(x_1;x_2;...x_n)$

Từ đó ta có định nghĩa bất đẳng thức thuần nhất như sau:

* Bất đẳng thức thuần nhất là bất đẳng thức có dạng: $f(x_1;x_2;...x_n)\ge 0$ trong đó $f(x_1;x_2;...x_n)$ là hàm thuần nhất bậc a .

Ví dụ: Bất đẳng thức AM-GM là bất đẳng thức thuần nhất bậc 1.

$$tx_1+tx_2+...+tx_n\ge n\sqrt[n]{tx_1.tx_2....tx_n}\Rightarrow x_1+x_2+...+x_n\ge n\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}$$

Từ đây trở đi trong bài viết này khi nói đến bất đẳng thức thuần nhất ta không cần quan tâm đến bậc a .

1.2 Một số phương pháp, kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức:

Trong phần này ta không xét hết tất cả các phương pháp, kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức từ trước tới nay mà chỉ xét một số phương pháp sẽ được áp dụng trong bài viết này.

1.2.1 Phương pháp dồn biến:

Phương pháp dồn biến tư tưởng chính là làm giảm số biến đã có thông qua các đại lượng trung bình, đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến.

Định lí dồn biến: Giả sử $f(x_1;x_2;...x_n)$ là một hàm số liên tục và đối xứng với tất cả các biến xác định trên một miền liên thong thoả mãn điều kiện sau:

$$f(x_1,x_2,....x_n)\ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{x_1+x_2}{2};x_3;....x_n\right)(1)$$

Khi đó bất đẳng thức sau sẽ thoả mãn $f(x_1;x_2;...x_n)\ge f(x;x;....x)$ trong đó $x=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.

Điều kiện (1) có thể biến đổi thành một số dạng khác như:

$$f(x_1,x_2,...x_n)\ge f(\sqrt{x_1x_2},\sqrt{x_1x_2},x_3,...x_n)$$

$$f(x_1,x_2,...x_n)\ge f\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}},\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}},x_3,...x_n\right)$$

Tuy nhiên trong bài viết này ta chỉ chú ý đến phương pháp dồn biến với các bất đẳng thức 3 biến nên ta sẽ xét đến trường hợp cụ thể như sau:

Giả sử ta cần chứng minh: $f(x_1,x_2,x_3)\ge 0$ ta có thể chứng minh: $f(x_1,x_2,x_n)\ge f(t,t,x_3)$

Trong đó giá trị của t có thể là :

+ Trung bình cộng: $t=\frac{x_1+x_2}{2}$

+ Trung bình nhân: $t=\sqrt{x_1x_2}$

+ Trung bình bình phương: $t=\sqrt{\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{2}}$

Sau đó ta chỉ cần chứng minh $f(t,t,x_3)\geq 0$ là bài toán được giải quyết. Chú ý khi chứng minh bất đẳng thức có điều kiện, ta thực hiện phép dồn biến thì phép dồn biến đó phải đảm bảo thoả mãn điều kiện của các biến; ví dụ như khi cho điều kiện là tổng thì ta chỉ dồn biến bằng trung bình cộng được mà thôi.
Phương pháp dồn biến mà dựa vào trung bình cộng; trung bình nhân; trung bình bình phương là những dạng đơn giản nhất ngoài ra ta còn có một số phép dồn biến như sau:

+ *Dồn biến toàn miền* : sử dụng khi bất đẳng thức cần chứng minh có đại lượng chênh lệch bậc của các đại lượng xấp xỉ 0 $(x-y),(y-z),(z-x)$:

$f(x,y,z)\geq f(x-z,y-z,0)$

+ *Dồn biến về biên*: sử dụng khi đẳng thức xảy ra tại các giá trị biên.

$f(x,y,z)\geq f(0,s,t)$ trong đó s,t tuỳ thuộc vào mỗi bài toán

+ *Dồn biến không xác định: (UMV)* Nếu f là một hàm liên tục đối xứng xác định trên tập U thoả điều kiện: $f(....,x_i,....,x_j,...)\geq \min\left(f\left(....,\frac{x_i+x_j}{2},....,\frac{x_i+x_j}{2},....\right);f\left(....,0,...,x_i+x_j,....\right)\right)$

Khi đó với mọi bộ $x_1,x_2,....x_n\in U$ thì $f(x_1,x_2,...x_n)\geq \min\left\{C_t\right\}_{t=0}^{n-1}$, Nghĩa là GTNN của $f(x_1,x_2,....x_n)$ sẽ đạt được khi và chỉ khi trong các số $x_1,x_2,....x_n$ có t số bằng 0, các số còn lại bằng nhau.

1.2.2 Bất đẳng thức Schur và kĩ thuật đổi biến P,Q,R:

a. Bất đẳng thức Schur:

Với mọi số thực không âm a,b,c,k ta có:

$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b)\geq 0$.

Nếu $k=1$, thì ta có: $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0\,(1)$

(1) còn được xuất hiện ở các dạng sau:

1.$(b+a-c)(b+c-a)(a+c-b)\leq abc$

2.$(a+b+c)^3+9abc\geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$

3.$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

Nếu $k=1$, thì ta có: $a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0\,(2)$

(2) còn được xuất hiện ở dạng sau:

$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$

* Chú ý: Bất đẳng thức Schur bậc 2 đúng với mọi số thực a,b,c .

b. Bất đẳng thức Schur suy rộng:(Vornicu-Schur).

Với các số thực dương a,b,c,x,y,z thoả mãn $(a,b,c);(x,y,z)$ là các bộ đơn điệu. Khi đó ta có:

$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\geq 0$

Việc chứng minh bất đẳng thức Vornicu-Schur không khác gì cách chứng minh bất đẳng thức Schur nhưng các áp dụng của nó lại đa dạng và phong phú hơn bất đẳng thức Schur.
Sau đây là một bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức Schur và công cụ chứng minh của nó là phải dùng tới phương pháp phân tích bình phương S.O.S: (bài toán sẽ được xét ở phần sau).

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+bc\sqrt{2(b^2+c^2)}+ca\sqrt{2(c^2+a^2)}$

c. Kĩ thuật đổi biến P,Q,R:

Định lí: Mọi đa thức đối xứng $F(a,b,c)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng các đa thức đối xứng Viete. Nghĩa là có thể biểu diễn qua các đại lượng $a+b+c, ab+bc+ca, abc$.

Từ đó ta có ý tưởng sau: Khi chứng minh một bất đẳng thức đối xứng ta có thể đổi biến lại như sau:

Đặt $p=a+b+c; q=ab+bc+ca; r=abc$. Khi đó bất đẳng thức Schur bậc 0,1,2 được biểu diễn lại như sau:

Với $k=0$ thì $pq-9r\geq 0$. (i)

Với $k=1$ thì $(1)\Leftrightarrow p^3-4pq+9r\geq 0$ (ii)

Với $k=2$ thì $(2)\Leftrightarrow p^4-5p^2q+4q^2+6pr\geq 0$ (iii).

Trong thực hành ta thường sử dụng một số kết quả phân tích như sau:

1.$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=pq-3r$

2.$(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r$

3.$(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)=p^2+q$

4.$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)=p^2q-2q^2-pr$

5.$a^2+b^2+c^2=p^2-2q$

6.$a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$

7.$a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr$

8.$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2pr$

9.$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=q^3-3pqr+3r^2$

10.$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=q^4-4pq^2r+2p^2r^2+4qr^2$

Điều quan trọng mà ta rút ra được đó là (i);(ii);(iii) ta suy ra:

$$r\leq \frac{pq}{9}$$

$$r\geq \max\left\{0,\frac{p(4q-p^2)}{4}\right\}$$

$$r\geq \max\left\{0,\frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}\right\}$$

Đồng thời trong việc chứng minh ta cũng thường sử dụng một số bất đẳng thức ràng buộc giữa 3 biến p,q,r :

$$p^2\geq 3q$$

$$p^3\geq 27r$$

$$q^2\geq 3pr$$

$$2p^3+9r\geq 7pq$$

$$p^2q+3pr\geq 4q^2$$

1.2.2 Look at the end point:

Đây chính là kĩ thuật xét phần tử biên, trong bài viết này ta sẽ sử dụng một số định lí sau:

Định lí 1: Nếu $f(x)$ là hàm bậc nhất theo x thì nếu $f(a)\geq 0; f(b)\geq 0$ khi đó $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in[a,b]$.

Định lí 2: Nếu $f(x)$ là hàm bậc nhất theo x thì : $\min\{f(a); f(b)\} \le f(x) \le \max\{f(a); f(b)\}$ với mọi $x \in [a,b]$.

Định lí 3: Nếu $f(x)$ là một hàm số lồi dưới trên khoảng $[a,b]$ thì $f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}$.

Định lí 4: Nếu $f(x)$ là một hàm số lõm dưới trên khoảng $[a,b]$ thì $f(x) \ge \min\{f(a), f(b)\}$.

1.2.3 Phương pháp cân bằng hệ số:

1.2.4 Kĩ thuật chọn điểm rơi đối với AM-GM:

1.2.5 Phương pháp phản chứng:

Đây là một trong những ý tưởng khá hay trong việc chứng minh bất đẳng thức cũng như sáng tạo bất đẳng thức. Phương pháp này lấy ý tưởng từ bài toán sau:

Bài toán: Cho hai hàm $F(x_1, x_2, ...x_n); G(x_1, x_2, ...x_n)$ thuần nhất bậc $a > 0$. Ta xét mệnh đề sau:

Nếu $F(x_1, x_2, ...x_n) = k$ thì $G(x_1, x_2, ...x_n) \ge m$ (*) $\quad (k, m > 0)$

+ Nếu F; G là hai hàm tăng đối với $x_1, x_2, ...x_n$. Khi đó:

(*) $\Leftrightarrow$ Nếu $G(x_1, x_2, ...x_n) = m$ thì $F(x_1, x_2, ...x_n) \le k$

+ Nếu F là hàm tăng; G là hàm giảm đối với $x_1, x_2, ...x_n$. Khi đó:

(*) $\Leftrightarrow$ Nếu $G(x_1, x_2, ...x_n) = m$ thì $F(x_1, x_2, ...x_n) \ge k$

Bạn đọc tự chứng minh bài toán này và nên ghi nhớ kết quả để sau này tiện sử dụng.

C. <u>Kĩ thuật chuẩn hoá bất đẳng thức thuần nhất đối xứng</u>:

Người ta sử dụng ý tưởng chuẩn hoá là như sau:

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức thuần nhất $f(x_1, x_2, ...x_n) \ge g(x_1, x_2, ...x_n)$ trong đó f và g là hai hàm thuần nhất cùng bậc. do tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuyển bất đẳng thức trên về việc chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, ...x_n) \ge a$ với mọi $x_1, x_2, ...x_n$ thoả mãn $g(x_1, x_2, ...x_n) = a$. Lợi ích của việc chuẩn hoá là ta có thể làm đơn giản các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh, tận dụng được một số tính chất đặc biệt của hằng số.

Bạn đọc có thể hiểu kĩ thuật chuẩn hoá thông qua bài toán sau.

Problem: (STBĐT) CMR với a,b,c không âm thì $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$ (1)

Chắc hẳn các bạn điều nhận ra rằng đây là bài toán từ sách " Sáng tạo bất đẳng thức" của anh Phạm Kim Hùng cũng trong phần anh Hùng giới thiệu kĩ thuật chuẩn hoá. Vì thế tôi sẽ không đưa ra lời giải mà chỉ quan tâm tới cách thức chuẩn hoá, vì sao lại chuẩn hoá được.

Hiển nhiên các bạn điều dễ dàng nhận ra bất đẳng thức cần chứng minh là thuần nhất.

Theo sách, anh Hùng chuẩn hoá $ab + bc + ca = 3$. Khi ta lấy $a' = \frac{a}{t}; b' = \frac{b}{t}; c' = \frac{c}{t}$ ta cần chọn t sao cho $a'b' + b'c' + c'a' = 3$ lúc đó ta tìm được $t = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$. Bât đẳng thức đúng với a', b', c' nên nó sẽ đúng với a,b,c sau khi nhân a', b', c' với t.

Như vậy việc tìm số t là xong (tất nhiên các bước trên ta chỉ làm trong nháp không cần ghi vào bài làm).Bây giờ ta coi như chưa biết số t, ta sẽ tạo điều kiện a,b,c như sau

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}:\sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^3}{27}}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{64.\left(\dfrac{ab+bc+ca}{3}\right)^3}}}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}+\frac{b}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}\right)^2\left(\frac{b}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}+\frac{c}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}\right)^2\left(\frac{c}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}+\frac{a}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}\right)^2}}\geq$$

Đặt $x=\dfrac{a}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}};y=\dfrac{b}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}};z=\dfrac{c}{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}}$ khi đó ta có điều kiện $xy+yz+xz=3$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{8}}\geq 1$$

Có lẽ tới đây các bạn đã hiểu được vì sao ta lại chuẩn hoá được như vậy. Nhưng để tăng thêm niềm tin ta thử chuẩn hoá bài toán trên theo một cách khác thử xem. Chẳng hạn chuẩn hoá $a+b+c=1$

Ta đặt $a'=\dfrac{a}{t};b'=\dfrac{b}{t};c'=\dfrac{c}{t}$ ta cần chọn t sao cho $a'+b'+c'=1$, lúc đó ta tìmđược $t=a+b+c$.

Bây giờ ta xem như chưa biết số t, ta sẽ tạo điều kiện a,b,c như sau:

(1)

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}.\frac{1}{(a+b+c)^2}}\leq \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}.\frac{1}{(a+b+c)^3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}.\left[\frac{a}{a+b+c}.\frac{b}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}.\frac{a}{a+b+c}\right]}\leq \sqrt[3]{\frac{1}{8}.\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)\left(\frac{c+a}{a+b+c}\right)}$$

Đặt $x=\dfrac{a}{a+b+c};y=\dfrac{b}{a+b+c};z=\dfrac{c}{a+b+c}$ khi đó ta có điều kiện $x+y+z=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\sqrt{\dfrac{xy+yz+xz}{3}}\leq\sqrt[3]{\dfrac{(x+y)(y+z)(x+z)}{8}}$

Để hiểu sau hơn bạn đọc có thể tự mình chuẩn hoá bài toán trên theo $abc=1$ hoặc $(a+b)(b+c)(c+a)=8$.

__Ghi chú__: bất đẳng thức trên còn có một cách chứng minh khá hay như sau:

Sử dụng hai bất đẳng thức phụ sau:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}\geq\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9}$$

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

Khi đó ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geq\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9}}\geq\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca}{9}}=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

Cách giải này được GV Hoàng Đức Nguyên-khối THT chuyên ĐHSP Hà Nội đưa ra trong chuyên mục "bạn đọc tìm tòi" trong báo Toán hoc và tuổi trẻ với tên "Ứng dụng của một đẳng thức"
Như vậy ta có thể thấy được một bất đẳng thức một khi đã thuần nhất thì có thể được chuẩn hoá bằng nhiều cách khác nhau. Chuẩn hoá là một kĩ thuật cơ bản nhưng kĩ thuật này lại đòi hỏi những kinh nghiệm và độ tinh tế nhất định. Đây cũng chính là điều độc đáo và khó khăn nhât của kĩ thuật này, vì chuẩn hoá một cách hợp lí thì ta mới có lời giải bài toán đơn giản nhất.
Bây giờ chúng ta sẽ xem thử kĩ thuật chuẩn hoá có sức mạnh như thế nào trong thế giới bất đẳng thức. Bắt đầu từ đây trở đi trong mỗi bài toán ta sẽ không giải thích rõ ràng cách chuẩn hoá nữa mà điểm này sẽ dành cho bạn đọc.

D. Kĩ thuật chuẩn hoá và ứng dụng:

Trong phần bài tập tôi sẽ cố gắng ghi rõ nguồn gốc xuất xứ của bài toán từ đâu ra. Tuy nhiên do có một số sự hạn chế nên có một số bài toán chúng tôi không ghi rõ nguồn gốc xuất xứ mong bạn đọc thông cảm.

Problem 1: (England-1999)

Cho x,y,z không âm. Chứng minh rằng:

$$2(x+y+z)^3+9xyz\ge 7(x+y+z)(xy+yz+xz)$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho là thuần nhất nên ta chuẩn hoá $x+y+z=1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $2+9abc\ge 7(ab+bc+ca)$.(1)

Do tính đối xứng của bất đẳng thức cần chứng minh nên ta hoàn toàn có thể giả sử $x=\max\{x,y,z\}$.

Ta xét $f(x)=(7y+7z-9yz)x+7yz-2$ với $x\in\left[\frac{1}{3},1\right]$.

Sử dụng *Look at the end point* (định lí 1) ta có:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7(y+z)+12yz-6}{3}=\frac{4(9yz-1)}{3}\le 0 \text{ vì } yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{2/3}{2}\right)^2=\frac{1}{9}\text{(2)}$$

$f(1)=7(y+z)-2yz-2=-2<0$ vì $x=1\Rightarrow y=z=0$.(3)

Từ (2)&(3) suy ra $f(x)\le 0\Rightarrow$ bất đẳng thức đã cho đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Ta xét tiếp một bài toán tương tự sau:

Problem 2: (Sưu tầm).

Cho x,y,z không âm. Chứng minh rằng:

$$9xyz+(x+y+z)^3\ge 4(xy+yz+xz)(x+y+z)$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chuẩn hoá $x+y+z=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $1+9xyz\ge 4(xy+yz+xz)$.

Do bất đẳng thức có tính đối xứng nên ta giả sử $x=\max\{x,y,z\}$.

Xét $f(x)=(4y+4z-9yz)x+4yz-1$ với $x\in\left[\frac{1}{3},1\right]$.

Sử dụng *Look at the end point* (định lí1) ta có:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4(y+z)+3yz-3}{3}=yz-\frac{1}{9}\le 0 \text{ vì } yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{2/3}{2}\right)^2=\frac{1}{9}.(2)$$

$$f(1)=4(y+z)-5yz-1=-1<0 \text{ vì } x=1\Rightarrow y=z=0.(3)$$

Từ (2)&(3) suy ra: $f(x)\le 0\Rightarrow$ bất đẳng thức đã cho đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Comment 1: Qua hai bài toán trên chắc hẳn bạn đọc cũng đã thấy được sự hữu ích của việc chuẩn hoá. Việc chuẩn hoá không những làm cho bài toán nhìn đơn giản hơn mà nó còn định hướng lời giải cho chúng ta một cách khá rõ ràng.

Quả thật các bài toán từ nay trở về sau trong bài viết này nếu ta không làm một công việc là chuẩn hoá thì rất khó để cho một lời giải hay, đẹp trong từng bài toán được.

Chú ý: Các bài toán trên điều có thể chứng minh một cách trực tiếp, bằng cách khai triển hai vế rút gọn sau đó sử dụng thêm BĐT Schur.

Bằng phương pháp tương tự bạn đọc tự giải hai bài toán sau:

Problem 3: (IMO-1984)

Cho x,y,z không âm. Chứng minh rằng:

$$27(x+y+z)(xy+yz+xz)\le 7(x+y+z)^3+54xyz$$

Problem 4: (Sưu tầm)

Cho x,y,z không âm. Chứng minh rằng:

$$2(x+y+z)^3\le 9(x^3+y^3+z^3)+27xyz\le 9(x+y+z)^3$$

.

Gợi ý: Chuẩn hoá $x+y+z=1$. BĐT ở VT xảy ra tại biên. BĐT ở VP xảy ra tại tâm.

Sau đây ta xét tiếp một lớp bài toán có mức độ khó khăn.

Problem 5: (Macedonia 1999)

Cho a,b,c không âm. Chứng minh rằng:

$$abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)^2\ge 4abc\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất và đồng thời với mong muốn biểu thức trong căn mất đi ta chuẩn hoá $a^2+b^2+c^2=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$abc(a+b+c)+1\ge 4\sqrt{3}.abc\Leftrightarrow a+b+c+\frac{1}{abc}\ge 4\sqrt{3}\ (1)$$

Tới đây nếu giải theo cách thông thường ta sẽ thu được hai bất đẳng thức trái dấu đó là:

$$a+b+c \le \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{abc} \ge 3\sqrt{3}$$

Vì thế ta phải tìm cách khác để giải quyết (1). Phương pháp tối ưu lúc này là sử dụng kĩ thuật chọn điểm rơi với bất đẳng thức AM-GM. Ta sẽ tìm cách tách $a+b+c$ để khi sử dụng bất đẳng thức AM-GM dấu bằng sẽ xảy ra, đưa tham số a vào ta có:

$$a\,a+a\,b+a\,c+\frac{1}{abc}+(1-a)(a+b+c)$$

Sử dụng BĐT AM-GM dấu bằng xảy ra khi $a\,a=\frac{1}{abc}$ nhưng do tính đối xứng của bài toán nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau, nghĩa là lúc đó ta có: $a=\frac{1}{a^4}=9$. Như vậy ta sẽ giải quyết (1) như sau:

$$(1) \Leftrightarrow 9a+9b+9c+\frac{1}{abc}-8(a+b+c) \ge 4\sqrt[4]{9^3.abc.\frac{1}{abc}}-8\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=12\sqrt{3}-8\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Comment 2: Bất đẳng thức AM-GM là một bất đẳng thức thuần nhất nên nó rất hữu hiệu trong việc chứng minh các bất đẳng thức thuần nhất khác. Tuy nhiên điều khó khăn nhất của nó là điều kiện xảy ra dấu bằng rất nghiêm ngặt, vì thế việc áp dụng trực tiếp một cách máy móc rất dễ dẫn đến sai lầm.

Bất đẳng thức AM-GM có khá nhiều kĩ thuật sử dụng nhưng bạn đọc nên biết 3 kĩ thuật chính:

+ Kĩ thuật cân bằng hệ số: sử dụng để giải các bất đẳng thức không đối xứng.(sẽ được giới thiệu ở phần sau)

+ Kĩ thuật chọn điểm rơi-trọng số: sử dụng để giải các bất đẳng thức đối xứng khi ta nhận thấy được dấu bằng xảy ra của bài toán.

+ Kĩ thuật AM-GM ngược dấu: sử dụng để giải các bất đẳng thức hoán vị.

Sử dụng kĩ thuật trên ta giải các bài toán sau:

Problem 6: (Crux 2946)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)+abc(a+b+c) \ge 4abc\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho là thuần nhất và cũng với mong muốn làm mất biểu thức trong căn nên ta chuẩn hoá $a^2+b^2+c^2=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$ab+bc+ca+abc(a+b+c) \ge 4\sqrt{3}.abc$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 4\sqrt{3}(1)$$

Sử dụng kĩ thuật chọn điểm rơi ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3a+3b+3c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2(a+b+c) \ge 6\sqrt[6]{3^3.abc.\frac{1}{abc}}-2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problem 7: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \geq 2abc\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+abc(a+b+c)$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất ta chuẩn hoá $a^2+b^2+c^2=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$ab+bc+ca \geq 2\sqrt{3}.abc+abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-(a+b+c) \geq 2\sqrt{3}(1)$$

Sử dụng kĩ thuật chọn điểm rơi ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3a+3b+3c-4(a+b+c) \geq 6\sqrt[3]{3^3.abc.\frac{1}{abc}}-4\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bạn đọc tự luyện các bài sau.

Problem 8: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)+3abc(a+b+c) \geq 15abc\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}$$

Problem 9: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$3(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)+4abc(a+b+c) \geq 21abc\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}$$

Problem 10: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương; m,n dương và $2n \geq m$. Chứng minh rằng:

$$mabc(a+b+c)+n(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \geq \sqrt{3}(m+n)abc\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}$$

Hướng dẫn:

NX: Đây là bài toán tổng quát của các bài toán trên. Sau khi chuẩn hoá $a^2+b^2+c^2=3$ ta sẽ có được bất đẳng thức sau:

$$m(a+b+c)+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3(m+n)\ (*)$$

Ngoài cách sử dụng kĩ thuật chọn điểm rơi, ta có thể sử dụng cách giải sau:

Đặt $X=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};Y=a+b+c$

Gọi VT (*) là T ta có: $T=\frac{m}{2}(Y+Y+X)+\left(n-\frac{m}{2}\right)X$

Dễ dàng chứng minh: $X\geq 3; XY^2\geq 27$. Khi đó :

$T\geq \frac{m}{2}.3\sqrt[3]{XY^2}+\left(n-\frac{m}{2}\right).3\geq \frac{9m}{2}+3\left(n-\frac{m}{2}\right)=3(m+n)$

Tiếp theo đây ta sẽ xét những bài toán vừa áp dụng kĩ thuật chuẩn hoá vừa áp dụng phương pháp cân bằng hệ số.

> ***Problem 11:*** (Sưu tầm)
>
> Cho a,b,c không âm. Chứng minh rằng:
>
> $$289(a^3+64b^3+c^3)\geq 64(a+b+c)^3$$

Solution:

Rõ ràng đối với bài toán trên nếu ta khai triển hai vế dùng phương pháp biến đổi tương đương thì dẫn tới lời giải quá dài hoặc không ra. Nếu để ý ta thấy bất đẳng thức đã cho là thuần nhất nên nó định hướng cho ta nghĩ tới kĩ thuật chuẩn hoá bất đẳng thức.

Nếu $a+b+c=0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $a+b+c>0$ ta chuẩn hoá $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$a^3+64b^3+c^3\geq \frac{64}{289}$$

Do vai trò a,c như nhau nên ta đưa vào đây các tham số $\alpha;\beta$:

$$a^3+64b^3+c^3=\left(a^3+\alpha^3+\alpha^3\right)+\left(64b^3+\beta^3+\beta^3\right)+\left(c^3+\alpha^3+\alpha^3\right)-4\alpha^3-2\beta^3$$

Áp dụng BĐT AM-GM trong từng dấu ngoặc ta có:

$$a^3+64b^3+c^3\geq 3a\alpha^2+12b\beta^2+3a\alpha^2-4\alpha^3-2\beta^3$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=\alpha \\ b=\frac{\beta}{4} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow 8\alpha+\beta=4\ (1)$

Đồng thời với ý muốn làm xuất hiện $a+b+c=1$ nên ta phải có: $3\alpha^2=12\beta^2\Rightarrow \alpha=2\beta$ (2)

Từ (1)&(2) suy ra $\alpha=\frac{8}{17};\beta=\frac{4}{17}$

Do đó: $a^3+64b^3+c^3\geq \frac{64}{289}$.

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=c=8b$

Cách khác: Ta dùng đạo hàm dồn biến.

Do tính đối xứng của 2 biến a,c nên nó định hướng cho ta đánh giá qua một bất đẳng thức trung gian quen thuộc để từ đó ta xét theo ẩn b:

$a^3+c^3\geq \frac{(a+c)^3}{4}$ (ta dễ dàng chứng minh BĐT này bằng phương pháp biến đổi tương đương)

Ta có: $a^3+64b^3+c^3\geq 64b^3+\frac{(a+c)^3}{4}=\frac{255b^3+3b^2-3b+1}{4}$

Xét $f(b)=\dfrac{255b^3+3b^2-3b+1}{4}\left(\forall b\in[0;1]\right)\Rightarrow f^{'}(b)=\dfrac{1}{4}\left(765b^2+6b-3\right)$.

$$f^{'}(b)=0\Rightarrow b=\frac{1}{17}.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(b)$ trên đoạn $[0;1]$ ta thấy $f(b)\geq\dfrac{64}{289}$.

Vậy $a^3+64b^3+c^3\geq\dfrac{64}{289}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=c=8b$.

Problem 12: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương.Tìm GTNN :

$$A=\frac{10a^2+10b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Soluiton:

Biểu thức A có tính thuần nhất nên ta chuẩn hoá $ab+bc+ca=1\,(1)$. Bài toán qui về tìm GTNN của

$A=10a^2+10b^2+c^2$ với a,b,c thoả điều kiện (1).

Ta có:

$$2a^2+2b^2\geq 4ab$$
$$8a^2+\frac{1}{2}c^2\geq 4ac$$
$$8b^2+\frac{1}{2}c^2\geq 4bc$$

Cộng lại ta suy ra $10a^2+10b^2+c^2\geq 4(ab+bc+ca)=4$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4a=4b=c$.

Problem 13: (bài toán tổng quát).

Cho a,b,c,k dương. Tìm GTNN của:

$$A=\frac{k(a^2+b^2)+c^2}{ab+bc+ca}$$ (k cho trước).

Solution:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chuẩn hoá $ab+bc+ca=1$. Bài toán qui về tìm GTNN của

$A=k(a^2+b^2)+c^2$ với a,b,c thoả điều kiện trên.

Ta tách $k=l+(k-l)\left(0<l\leq k\right)$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$la^2+lb^2\geq 2lab$$
$$(k-l)a^2+\frac{1}{2}c^2\geq\sqrt{2(k-l)}ac$$
$$(k-l)b^2+\frac{1}{2}c^2\geq\sqrt{2(k-l)}bc$$

Với ý muốn xuất hiện $ab+bc+ca=1$ thì ta phải có: $2l=\sqrt{2(k-l)}\Rightarrow l=\dfrac{-1+\sqrt{1+8k}}{4}$

Vậy GTNN của $A=\dfrac{-1+\sqrt{1+8k}}{4}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2(k-l)}c$

> ***Problem 14:*** (Sưu tầm).
>
> Cho a,b,c dương. Tìm GTLN của:
>
> $$A=\frac{4ab+6ac+8bc}{(a+b+c)^2}$$

Solution:

Biểu thức A có tính thuần nhất nên ta chuẩn hoá $a+b+c=1$. Bài toán qui về việc tìm GTLN của:

$A=4ab+6ac+8bc$ với a,b,c thoả điều kiện trên.

Ta sử dụng kĩ thuật hệ số bất định để tách ra các hạng tử trong biểu thức A như sau:

$$A=a\,a(b+c)+b\,b(a+c)+g\,c(a+b)=(a+b)ab+(a+g)bc+(b+g)ca$$

Đồng nhất các hệ số ta có:

$$\begin{cases}a+b=4\\a+g=6\\b+g=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\g=5\end{cases}$$

Do đó:

$$4ab+6ac+8bc=a(b+c)+3b(a+c)+5c(a+b)=a(1-a)+3b(1-b)+5c(1-c)$$

$$=\frac{9}{4}-\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Đặt $x=\left|a-\frac{1}{2}\right|;y=\left|b-\frac{1}{2}\right|;z=\left|c-\frac{1}{2}\right|\Rightarrow x+y+z=\left|a-\frac{1}{2}\right|+\left|b-\frac{1}{2}\right|+\left|c-\frac{1}{2}\right|\ge\left|a+b+c-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}$

Bài toán qui về việc tìm GTLN của $A=\dfrac{9}{4}-(x^2+3y^2+5z^2)$ với $x+y+z\ge\dfrac{1}{2}$.

Sử dụng phương pháp cân bằng hệ số ta có:

$$x^2+\left(\frac{15}{46}\right)^2\ge\frac{30}{46}x$$

$$3y^2+3.\left(\frac{5}{46}\right)^2\ge\frac{30}{46}y\Rightarrow x^2+3y^2+5z^2\ge\frac{15}{92}\Rightarrow A=\frac{9}{2}-(x^2+3y^2+5z^2)\le\frac{399}{92}$$

$$5z^2+5.\left(\frac{3}{46}\right)^2\ge\frac{30}{46}z$$

Vậy GTLN của $A=\dfrac{399}{92}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{9}{4}a=b=\dfrac{9}{10}c$.

Bạn đọc tự luyện một số bài toán sau:

Problem 15: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Tìm GTNN của:

$$A=\frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}$$

Problem 16: (Sưu tầm)

Cho a,b,c,d dương. Tìm GTNN của:

$$A=\frac{5a^2+4b^2+5c^2+d^2}{ab+bc+cd+da}$$

Problem 17: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Tìm GTLN của:

$$A=\frac{ab+2bc+3ac}{(a+b+c)^2}$$

Comment 3: *Kĩ thuật cân bằng hệ số là một kĩ thuật cần thiết và thường được sử dụng, mặc dù đôi lúc ta phải giải quyết nhiều hệ phương trình khá phức tạp. Nhưng đối với các bài toán không ở dạng chuẩn tức là không đối xứng, không hoán vị, các biểu thức lệch nhau thì công việc này dường như là bắt buộc. Qua các bài toán trên ta càng thấy tầm ứng dụng quan trọng của kĩ thuật chuẩn hoá, quả thật các bài toán trên nếu ta không kèm theo sử dụng kĩ thuật chuẩn hoá thì không thể giải quyết chúng được.*

Tiếp theo ta sẽ xét một số bài toán vừa sử dụng kĩ thuật chuẩn hoá vừa sử dụng phương pháp dồn biến.

Problem 18: (Vasile Cirtoaje)

Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}+9xyz\ge\frac{7\sqrt{3}}{3}(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$$

Solution:

Ngoại hình của bài toán thật "cồng kềnh" nếu như theo lói mòn ta suy nghĩ sử dụng phương pháp biến đổi tương đương như bình phương hai vế chẳng hạn hay sử dụng phương pháp mạnh như S.O.S hay dồn biến thì vẫn không dễ gì ra bài toán.

Nhưng ta hãy bình tĩnh suy xét lại cấu hình của nó. Dễ nhận thấy bất đẳng thức đã cho thuần nhất và với mong muốn làm mất đi các biểu thức trong căn ta chuẩn hoá $x^2+y^2+z^2=3$ .Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$12+9xyz\ge 7(xy+yz+zx)$$

Đến đây ta sử dụng phương pháp dồn biến theo trung bình bình phương. Ta chứng minh:

$$f(x,y,z)-f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},z\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (9z-7)(x-y)^2\le \frac{14z(x-y)^2}{x+y+\sqrt{2(x^2+y^2)}}$$

Ta cần chứng minh: $(9z-7)\sqrt{2(x^2+y^2)}\le 7z \Leftrightarrow \left(9-\frac{7}{z}\right)\sqrt{2(3-z^2)}\le 7$. BĐT này đúng do $z\le 1$.

Cuối cùng ta cùng ta cần chứng minh trong trường hợp $x=y$. Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, BĐT cần chứng minh

trở thành: $7(t^2+2zt)\le 12+9t^2z \Leftrightarrow 7\left(\frac{3-z^2}{2}+2z\sqrt{\frac{3-z^2}{2}}\right)\le 12+9z\left(\frac{3-z^2}{2}\right)$

Công việc của chúng ta bây giờ là khảo sát hàm số biến z. (bạn đọc tự giải)

Cách khác: Ta dồn tất cả về một biến z như sau.BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau:

$$7z(x+y)+xy(7-9z)-12\le 0$$

BĐT trên đúng thật vậy :

$$7z(x+y)+xy(7-9z)\le \frac{(7-9z)(x^2+y^2)}{2}+7z\sqrt{2(x^2+y^2)}\le \frac{(7-9z)(3-z^2)}{2}+\frac{7z(5-z^2)}{2}-12$$

Đặt $f(z)=\frac{(7-9z)(3-z^2)}{2}+\frac{7z(5-z^2)}{2}=\frac{(z-1)^2\left(z-\frac{3}{2}\right)}{2}\le 0\left(z\in[0,1]\right)$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Commnet 4: *Thật ra với bài toán này thì phương pháp dồn biến vẫn chưa phải là tối ưu nhất, bởi vì khảo sát hàm z ở cách 1 hơi khó. Nhưng vẫn với ý tưởng dồn tất cả về một biến ta đã giải quyết bài toán theo cách 2 một cách nhẹ nhàng, ngắn gọn. Ta đã vận dụng một cách khéo léo BĐT AM-GM khi đánh giá:*

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}\le \frac{2+x^2+y^2}{2}=\frac{5-z^2}{3}.$$

Do ta dự đoán $x=y=1$ nên ta áp dụng BĐT AM-GM giữa hai số 2 và x^2+y^2 mà vẫn đảm bảo điều kiện dấu bằng xảy ra.

Problem 19: (Việt Nam MO-2002).

Cho x,y,z là số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$6(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\le 27xyz+10\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$$

Solution:

Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hoá: $x^2+y^2+z^2=9$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $2(x+y+z)\le xyz+10 \Leftrightarrow [2(x+y+z)-xyz]^2\le 100$.

Không mất tính tổng quát giả sử $|x|\le|y|\le|z|$.Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz:

$$[2(x+y+z)-xyz]^2=\left[(x+y)^2+z(2-xy)\right]^2\le\left[(x+y)^2+z^2\right]\left[2^2+(2-xy)^2\right]=72-20xy+x^2y^2+2x^3y^3$$

$\Leftrightarrow [2(x+y+z)-xyz]^2 \le 100+(xy+2)^2(2xy-7)$.

Từ $|x| \le |y| \le |z| \Rightarrow z^2 \ge 3 \Rightarrow 2xy \le x^2+y^2 \le 6$.

Suy ra đpcm.

Cách khác:

Ta sử dụng phương pháp dồn biến . Xét hiệu:

$$f\left(x,\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}},\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)-f(x,y,z)=2\left(\sqrt{2(y^2+z^2)}-y-z\right)-\frac{x(y-z)^2}{2}=(y-z)^2\left(\frac{2}{\sqrt{2(y^2+z^2)}+y+z}-\frac{x}{2}\right)$$

Nếu $x,y,z>0$. Ta xét hai trường hợp:

$1 \le x \le y \le z$. Khi đó: $2(x+y+z)-xyz \le 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}-1=6\sqrt{3}-1<10$.

$0 \le x \le 1$. Khi đó: $2(x+y+z)-xyz < 2(x+y+z) \le 2x+2\sqrt{2(y^2+z^2)}=2x+2\sqrt{2(9-x^2)}=g(x)$

$$\Rightarrow g'(x)=2-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{9-x^2}}>0 \Rightarrow g(x) \le g(1)=10.$$

Nếu trong 3 số x,y,z có một số âm, giả sử $x<0$. Khi đó: $f\left(x,\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}},\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)-f(x,y,z)\ge 0$.

Ta cần chứng minh $f\left(x,\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}},\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)\le 10$ hay : $2x+2\sqrt{2(9-x^2)}-\frac{x(9-x^2)}{2}\le 10$

$\Leftrightarrow h(x)=x^3-5x+4\sqrt{2(9-x^2)}\le 20$. Ta có: $h'(x)=3x^2-5-\frac{4x\sqrt{2}}{\sqrt{9-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow h(x)\le h(-1)=20$

Problem 20: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng:

$$\left[3(a^2+b^2+c^2)+\left(a+b+c\right)^2\right]^3 \ge 5(a+b+c)^6+54abc(a+b+c)^3+729a^2b^2c^2$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chuẩn hoá $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:. $\left[3(a^2+b^2+c^2)+9\right]^3 \ge 5.3^6+1458abc+729a^2b^2c^2$

$$\Leftrightarrow \left[3+a^2+b^2+c^2\right]^3 \ge 135+54abc+27a^2b^2c^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\left(3+a^2+b^2+c^2\right)^3 \ge 27(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$

Khi đó ta phải chứng minh : $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\ge 5+abc(2+abc)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 4+2abc(1)$

Lại có: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c)=3abc$.(2)

Từ (1)&(2) ta phải chứng minh BĐT sau: $a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$

Ta viết BĐT cần chứng minh dưới dạng:

$(b+c)^2-2bc+a^2+abc-4\ge 0 \Leftrightarrow (3-a)^2+a^2+bc(a-2)-4\ge 0 \Leftrightarrow (a-2)bc+2a^2-6a+5\ge 0$

Ta cố định a xét hàm bậc nhất $f(bc)=(a-2)bc+2a^2-6a+5\left(bc\in\left[0;\dfrac{(3-a)^2}{4}\right]\right)$

Theo tính chất về hàm bậc nhất thì $f(bc)\ge \min\{f(0); f\left[\dfrac{(3-a)^2}{4}\right]\}$

Mà: $f(0)=2a^2-6a+5=2\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$

$$f\left[\frac{(3-a)^2}{4}\right]=(a-2).\frac{(3-a)^2}{4}+2a^2-6a+5=\frac{1}{4}(a-1)^2(a+2)\ge 0$$

Do đó $f(bc)\ge 0$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Sau đây là một số bài toán sử dụng thêm kĩ thuật đổi biến p,q,r.

Problem 21: (Phạm Sinh Tân)

Cho a,b,c không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. CMR với mọi $k\ge 1$ ta luôn có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k.\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3}\ge 2\sqrt{k}+1$$

Solution:

Bất đã cho là thuần nhất nên ta chuẩn hoá: $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k.\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3}\ge 2\sqrt{k}+1.$$

Đổi biến a,b,c theo p,q,r; khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{1-2q+3r}{q-r}+k.\frac{q}{1-3q+3r}\ge 2\sqrt{k}+1.$$

Ta có: $\dfrac{1-2q+3r}{q-r}+k.\dfrac{q}{1-3q+3r}=\dfrac{1-3q+3r}{q-r}+k.\dfrac{q}{1-3q+3r}+1\ge \dfrac{1-3q+3r}{q}+k.\dfrac{q}{1-3q+3r}+1$

Sử dụng tiếp bất đẳng thức AM-GM ta có: $\dfrac{1-3q+3r}{q}+k.\dfrac{q}{1-3q+3r}+1\ge 2\sqrt{k}+1$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\dfrac{\sqrt{k+2\sqrt{k}-3}+\sqrt{k+1}}{2}x,x,0\right)$ hoặc các hoán vị.

Problem 24: (Dương Đức Lâm).

Cho a,b,c không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. CMR:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Solution:

Đặt $x=\frac{2a}{b+c}; y=\frac{2b}{c+a}; z=\frac{2c}{a+b}$ khi đó ta có: $xy+yz+xz+xyz=4$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $x^2+y^2+z^2+5xyz\ge 8$.

Đổi biến x,y,z theo p,q,r khi đó giả thiết: $q+r=4$. BĐT cần chứng minh trở thành:

$$p^2-2q+5r\ge 8 \Leftrightarrow p^2-7q+12\ge 0.$$

Nếu $4\ge p$ sử dụng bất đẳng thức Schur $r\ge \frac{p(4q-p^2)}{9} \Rightarrow 4\ge q+\frac{p(4q-p^2)}{9} \Leftrightarrow q\le \frac{p^3+36}{4p+9}$

Do đó: $p^2-7q+12\ge p^2-\frac{7(p^3+36)}{4p+9}+12$. Ta cần chứng minh:

$$p^2-\frac{7(p^3+36)}{4p+9}+12\ge 0 \Leftrightarrow (p-3)(p^2-16)\le 0.$$

Bất đẳng thức trên đúng vì: $4\ge q\ge \sqrt{3q}\ge 3$.

Nếu $p\ge 4$ ta có: $p^2\ge 16\ge 4q$ nên: $p^2-2q+5r\ge p^2-2q\ge \frac{p^2}{2}\ge 8$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ hoặc $x=y=2, z=0$ và các hoán vị tương ứng.

Comment 5: Bài toán trên khá hay ta đã đặt một lần ẩn phụ rồi sau đó ta mới đổi biến theo p,q,r. Đến đây ta đã dung một thủ thuật rất hay dùng khi sử dụng bất đẳng thức Schur đó là chia trường hợp ra để giải quyết. Bài toán trên trong khi sử dụng phương pháp phân tích bình phương S.O.S là khá dài dòng nhưng ta đã có một lời giải đẹp gọn gàng thoả mãn mỹ quan về mặt toán học khi sử dụng khéo léo kĩ thuật đổi biến p,q,r.

Sau đây là một số bài toán tương tự như bài trên.

Problem 26: (Toán học&Tuổi trẻ).

Cho a,b,c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. CMR:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Problem 27: (Toán tuổi thơ)

Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge \frac{2ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{2ca}{(b+c)(a+b)}$$

Ta xét tiếp một bài toán kinh điển sau:

Problem 28: (Iran-1996)

Cho x,y,z không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. CMR:

$$(xy+yz+xz)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}\right]\ge \frac{9}{4}$$

Solution:

Do tính đối xứng của bài toán nên ta giả sử $x \ge y \ge z$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)=\frac{(x+y+2z)^2}{2(y+z)^2(x+z)^2}$$

Nên ta cần chứng minh:

$$(xy+yz+xz)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{(x+y+2z)^2}{2(x+z)^2(y+z)^2}\right] \ge \frac{9}{4}$$

Do tính thuần nhất của bất đẳng thức ta chuẩn hoá $x+y=1$ và đặt $a=xy \Rightarrow \frac{1}{4} \ge a \ge z(1-z)$. Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$f(a)=a+z+\frac{(1+2z)^2(a+z)}{2(z+z^2+a)^2}-\frac{9}{4} \ge 0$$

Ta có: $f^{'}(a)=1-\frac{(1+2z)^2(z+a-z^2)}{2(z+z^2+a)^3}; f^{''}(a)=\frac{(1+2z)^2(z-2z^2+a)}{(z+z^2+a)^4} \ge 0$

Nên $f^{'}(a)$ đồng biến ta suy ra: $f^{'}(a) \le f^{'}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{(2z-1)(8z^3+20z^2+38z+7)}{(2z+1)^4} \le 0$.

Do đó $f(a)$ nghịch biến vậy nên: $f(a) \ge f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{z(1-2z)^2}{(1+2z)^2} \ge 0$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hoặc $x=y=1, z=0$.

Comment 6: Bài toán trên là một trong những bài toán khá nổi tiếng trong làng bất đẳng thức và đã có khá nhiều cách xuất hiện để giải quyết nó như: phương pháp S.O.S, phương pháp dồn biến, phương pháp p,q,r…Nhưng cách giải trên khá mới mẻ mà người ta gọi đó là: "Kĩ thuật Cauchy bất đối". Bạn đọc có thể tìm hiểu kĩ hơn kĩ thuật này trong bài viết cùng tên của anh Võ Quốc Bá Cẩn.

Problem 29: (Phạm Kim Hùng).

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \ge 2$$

Solution:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}$$

Do tính thuần nhất của bất đẳng thức nên ta chuẩn hoá: $abc=1$.

Đổi biến a,b,c theo p,q,r ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{p^2}{2q}+\frac{3}{2p} \ge 2 \Leftrightarrow p^3+3q \ge 4pq \Leftrightarrow (p^3-4pq+9r)+(3q-9r) \ge 0$$

Bất đẳng thức trên đúng do:

$p^3-4pq+9r \ge 0$ (Bất đẳng thức Schur bậc 1)

$3(ab+bc+ca) \ge 9\sqrt[2]{a^2b^2c^2}=9=9abc \Leftrightarrow 3q-9r \ge 0$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problem 30: (Olympic Ba Lan-2005)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+6abc \ge \frac{3}{\sqrt{3}}(ab+bc+ca)^{3/2}$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho là thuần nhất nên ta chuẩn hoá: $ab+bc+ca=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $a^3+b^3+c^3+6abc \ge 9$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau: $a^3+b^3+c^3+7abc \ge 10$. Đổi biến a,b,c theo p,q,r ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta có: $r \ge \max\left\{0, \frac{p(4q-p^2)}{9}\right\} = \max\left\{0, \frac{p(12-p^2)}{9}\right\}$.

Ta cần chứng minh: $p^3-9p+10r \ge 10$. Đến đây ta dùng thủ thuật "Chia để trị" để giải quyết:

Nếu $p \ge 2\sqrt{3}$ thì: $p^3-9p+10r \ge p^3-9p-10 \ge 12p-9q-10 = 3p-10 > 0$.

Nếu $p \le 2\sqrt{3} < 4$ thì:

$$p^3-9p+10r-10 \ge p^3-9p+\frac{10}{9}p(12-p^2)-10 = \frac{1}{9}(p-3)\left[(16-p^2)+3(4-p)+2\right] \ge 0$$

Như vậy $a^3+b^3+c^3+7abc \ge 10 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+6abc \ge 9+1-abc \ge 9$.

Bất đẳng thức trên đúng do: $3 = ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow abc \le 1$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problem 31: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho là thuần nhất nên ta chuẩn hoá $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+9 \ge \frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a} .(1)$$

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z}; b=\frac{y}{x+y+z}; c=\frac{z}{x+y+z}$. Khi đó (1) tương đương:

$$\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}+9 \ge \frac{4(x+y+z)}{x+y}+\frac{4(x+y+z)}{y+z}+\frac{4(x+y+z)}{x+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z} \ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)(2)$$

Ta sử dụng bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{A}+\frac{1}{B} \ge \frac{4}{A+B}$. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}\ge\dfrac{4x}{y+z}\\ \dfrac{y}{z}+\dfrac{y}{x}\ge\dfrac{4y}{x+z}\\ \dfrac{z}{y}+\dfrac{z}{x}\ge\dfrac{4z}{x+y}\end{array}\right\}\Rightarrow (2)$$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Comment 7: Bài toán trên còn có nhiều cách giải khác nhưng cách giải trên theo tôi có lẽ là đẹp nhất. Còn vì sao mà ta có thể đặt $a=\dfrac{x}{x+y+z};b=\dfrac{y}{x+y+z};c=\dfrac{z}{x+y+z}$ đó là một điều hoàn toàn tự nhiên và dễ hiểu bởi vì một khi ta đã có điều kiện $a+b+c=1$ thì việc tồn tại các số x,y,z là một điều hiển nhiên. Phép đặt như trên người ta gọi là "phép thế đại số".

Lưu ý: Bạn đọc có thể sử dụng phương pháp phân tích bình phương S.O.S để giải bài toán trên.

Problem 32: (Phạm Kim Hùng)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(ab+bc+ca\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Solution:

Bất đẳng thức trên thuần nhất nên ta chuẩn hoá $ab+bc+ca=1$.Đổi biến a,b,c theo p,q,r ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$p^4-4p^2+2+4pr\ge p^2-2p^3r-2+4pr$$

$$\Leftrightarrow (p^4-5p^2+6pr+4)+2pr(p^2-3)\ge 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng do:

$p^4-5p^2+4+6pr\ge 0$ (Bất đẳng thức Schur bậc 2 với $q=ab+bc+ca=1$).

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow p^2-3\ge 0\Leftrightarrow 2pr(p^2-3)\ge 0$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problem 33: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}+\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ge\frac{19}{6}$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chuẩn hoá $a+b+c=1$. Đổi biến a,b,c theo p,q,r. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{r}{pq-3r}+\frac{p^3-3pq+3r}{r}\geq\frac{19}{6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{r}{q-3r}+\frac{1-3q+3r}{r}\geq\frac{19}{6}\Leftrightarrow\frac{r^2+(q-3)(1-3q+3r)}{r(q-3r)}\geq\frac{19}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6r^2+6(q-3)(1-3q+3r)\geq 19r(q-3r)$$

$$\Leftrightarrow 6r^2+6q-18r+18q^2+54qr+18qr-45r^2\geq 19qr-57r^2$$

$$\Leftrightarrow q(18q+53r+2)+9r^2+2(q-9r)\geq 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng do:

$q(18q+53r+2)+9r^2\geq 0$ (với $a,b,c>0\Rightarrow p,q,r>0$).

$2(pq-9r)\geq 0\Leftrightarrow 2(q-9r)\geq 0$ (Bất đẳng thức Schur bậc 0 với $p=1$).

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Comment 8: Ta đã biết hai bất đẳng thức xảy sau:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq 6abc\Leftrightarrow\frac{abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(c+a)}\leq\frac{1}{6}$$

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq 3$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta thấy bài toán 33 cho ta thực hiện phép cộng ngược chiều. Đa số bất đẳng thức hiện nay đều được tạo ra nhờ phép cộng ngược chiều. Những loại bất đẳng thức như vậy thì phương pháp tối ưu nhất là phân tích bình phương S.O.S. Sau đây là lời giải bằng phương pháp S.O.S. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-3\geq\frac{1}{6}-\frac{abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc}\geq\frac{\sum_{sym}a^2b-6abc}{6.\sum_{sym}a^2b}$$

Ta tạo dạng chính tắc cho hai vế ta có:

VT: $\dfrac{(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{2abc}$

VP: $\dfrac{c(a-b)^2+b(c-a)^2+a(b-c)^2}{6ab(a+b)+6bc(b+c)+6ac(a+c)}$ *Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:*

$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$ *trong đó:*

$$S_a=\frac{a+b+c}{2abc}-\frac{a}{6ab(a+b)+6bc(b+c)+6ac(a+c)}=\frac{3\sum_{cyc}a.\sum_{sym}a^2b-a^2bc}{6abc.\sum_{sym}a^2b}\geq\frac{abc(17a+18b+18c)}{6abc.\sum_{sym}a^2b}>0.$$

$$S_b=\frac{a+b+c}{2abc}-\frac{b}{6ab(a+b)+6bc(b+c)+6ac(a+c)}=\frac{3\sum_{cyc}a.\sum_{sym}a^2b-ab^2c}{6abc.\sum_{sym}a^2b}\geq\frac{abc(18a+17b+18c)}{6abc.\sum_{sym}a^2b}>0$$

$$S_c=\frac{a+b+c}{2abc}-\frac{c}{6ab(a+b)+6bc(b+c)+6ac(a+c)}=\frac{3\sum_{cyc}a.\sum_{sym}a^2b-abc^2}{6abc.\sum_{sym}a^2b}\geq\frac{abc(18a+18b+17c)}{6abc.\sum_{sym}a^2b}>0$$

Vậy bất đẳng thức đã chứng minh xong.
Với bài toán này vấn đề đặt ra là tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a,b,c dương:

$$k.\frac{abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}+\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq 3+\frac{k}{6}$$

Problem 34: (USAMO-2003)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$$

Solution:
Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chuẩn hoá $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leq 8.$$

Nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là tìm số thực a sao cho: $\dfrac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}\leq a\,a+\dfrac{8}{3}-a$ (1) đúng với $\forall a\in(0;3)$. Giả sử tồn tại số a thì :

$(1)\Leftrightarrow 3a\,a^3+(7-9a)a^2+(15a-22)a+15-9a\geq 0$.

Đặt $f(a)=3a\,a^3+(7-9a)a^2+(15a-22)a+15-9a$. Vì $f(a)\geq 0\left(\forall a\in(0;3)\right)$ và $f(1)=0$ nên theo đính lí Fermat ta có: $f'(1)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{4}{3}$.

Như vậy ta cần chứng minh : $\dfrac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}\leq\dfrac{4}{3}a+\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow(a-1)^2(4a+3)\geq 0$.

Tương tự đối với b,c cộng lại ta được điều cần chứng minh.

Comment 9: *Kĩ thuật tìm số thực a như trên người ta gọi đó là "phương pháp hệ số bất định". Ý tưởng của kĩ thuật này ta có thể hiểu sơ lược như sau:*

Bài toán: Cho các số thực $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)\in D\subset R^+$ thoả mãn: $g(a_1)+g(a_2)+...+g(a_n)=m(m>0)$.

Chứng minh rằng: $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\geq 0$.

HD: Vì bất đẳng thức cần chứng minh và cả biểu thức điều kiện đề bài là mang tính đối xứng với tất cả các biến nên dấu bằng thường đạt tại tâm. Việc ta phải làm là tìm số thực a sao cho: $f(a_1)\geq a\,g(a_1)$ đúng với mọi a_1 thoả mãn đề bài. Đây là một đường lối rất cơ bản để giải quyết dạng toán này. Đồng thời với các bất đẳng thức thuần nhất sau khi chuẩn hoá sẽ chuyển ngay về dạng này.

Điều kiện cần để có thể sử dụng phương pháp này là:
+ Bất đẳng thức cần chứng minh phải thuần nhất.
+ Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi các biến số bằng các giá trị trong một tập hữu hạn nào đó (thường thì tập đó chỉ có một số cùng lắm là hai).
+Bất đẳng thức là tổng của một dãy các biểu thức đối xứng nhau và tồn tại cách chuẩn hoá để mỗi biểu thức chỉ còn phụ thuộc vào một biến số hoặc các biểu thức là hoán vị liên tiếp nhau.

Problem 35: (IMO-2001)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

Solution:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chuẩn hoá $a+b+c=1$. Khi đó bài toán cần chứng minh trở thành:

$$af(a^2+8bc)+bf(b^2+8ca)+cf(c^2+8ab)\ge 1$$

Trong đó $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$. Vì hàm f là hàm lồi trên R^+ nên áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có:

$$af(a\ \ +8bc)+bf(b^2+8ca)+cf(c^2+8ab)\ge f\left(a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\right)$$

Ta thấy $f(1)=1$ và hàm f nghịch biến nghiêm cách trên R^+ nên ta chỉ cần chứng minh:

$$1\ge a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\ge a^3+b^3+c^3+24abc$$

$$\Leftrightarrow c(a-b)^2+b(c-a)^2+a(b-c)^2\ge 0$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Comment 10: Vì lời giải trên đã sử dụng hàm lồi và hàm đơn điệu nghiêm cách nên có lẽ không phù hợp với các bạn chưa học các lí thuyết đó. Sau đây là một lời giải khác:

Ta chuẩn hoá $abc=1$ khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c}}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\sqrt{(1+8a)(1+8b)}\ge\sqrt{(1+8a)(1+8b)(1+8c)}$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)+2\sqrt{(1+8a)(1+8b)(1+8c)}\sum_{cyc}\sqrt{1+8a}\ge 510$$

Do $abc=1\Rightarrow a+b+c\ge 3$ *và* $(1+8a)(1+8b)(1+8c)\ge 9a^{\frac{8}{9}}b^{\frac{8}{9}}c^{\frac{8}{9}}=729$ *và*

$\sum_{cyc}\sqrt{1+8a}\ge\sum_{cyc}\sqrt{9a^{\frac{8}{9}}}\ge 9(abc)^{\frac{4}{27}}=9$. *Cộng tất cả lại ta được điều cần chứng minh.*

Bài toán tổng quát: Cho $a,b,c>0;\ l\ge 8$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+l\,bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+l\,ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+l\,ab}}\ge 1.$$

Lời giải bài toán này tương tự như bài trên.

Như vậy là qua các bài toán trên chúng ta cũng đã thấy được sự hữu hiệu, lợi ích của việc chuẩn hoá một bất đẳng thức thuần nhất:

* Làm bất đẳng thức cần chứng minh của chúng ta đơn giản hơn so với ngoại hình của nó lúc ban đầu (thường thì các bất đẳng thức lời giải có sử dụng kĩ thuật chuẩn hoá thì ngoại hình của nó khá "cồng kềnh, dễ sợ").

* Sau khi chuẩn hoá nó giúp chúng ta định hướng lời giải bài toán cũng như sử dụng công cụ nào tiếp theo để sử lí phần còn lại của bài toán. Tiêu biểu cho sự lợi ích này là sử dụng kĩ thuật chuẩn hoá đi kèm với phương pháp dồn biến.

* Một khi bạn đã chuẩn hoá được thì cũng chính là bạn đã đoán được dấu bằng xảy ra khi nào (tại tâm hay tại biên), nghĩa là bạn đã đi được 20% quãng đường.
Tuy nhiên điều độc đáo và cũng là điều khó khăn nhất của kĩ thuật này là chuẩn hoá như thế nào là hợp lí? chuẩn hoá như thế nào để có lời giải tốt? điều quan trọng hơn cả là khi nào ta phải chuẩn hoá?........
Đó chính là vấn đề tôi mong muốn các bạn hiểu được qua bài viết này.
Nói tóm lại kĩ thuật chuẩn hoá đúng như theo tên của nó tuy không phải là một phương pháp giải mang tính bao quát như S.O.S; U.M.V;S.M.V; P,Q,R;ABC;GLA…nhưng nó vẫn là một trong những công cụ ưu tiên hàng đầu khi đối mặt với các bất đẳng thức thuần nhất.
Kết thúc bài viết là một số bài tập tự luyện dành cho bạn đọc.

Problem 1:(Mihai Piticari, Dan Popescu, Old and NewInequalities). Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$5(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\le 6(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)^3$$

Problem 2:(Sưu tầm) Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\left(|a|+|b|+|c|\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\le abc+\left(a^2+b^2+c^2\right)^{3/2}$$

Problem 3:(Sưu tầm) Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng:

$$x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\ge 3xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Problem 4:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$3(ab+bc+ca)+4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)^{1/2}\ge 21(a^2+b^2+c^2)$$

Problem 5:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\le 4\sqrt{2}.(a^2+b^2+c^2)^{3/2}+9abc$$

Problem 6:(Russia MO) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^{3/2}.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 3\sqrt{3}(ab+bc+ca)$$

Problem 7:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$2(a^2+b^2+c^2)^3+2(a^2+b^2+c^2)^2(ab+bc+ca)\ge 8a^2b^2c^2$$

Problem 8:(Sưu tầm) Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}+xyz$$

Problem 9:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2+c^2)^{3/2}(a+b+c)\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Problem 10:(Japan MO 2002) Cho a,b,c không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Problem 11:(Nguyễn Anh Khoa) Cho a,b,c không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+3(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+3(c+a)^2}+\frac{c^2}{c^2+3(a+b)^2}\ge\frac{3}{13}$$

Problem 12:(Darij Grinberg) Cho a,b,c không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}\ge 6.$$

BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG THUẦN NHẤT

NGUYỄN ANH KHOA

A. <u>Lời nói đầu</u>:
Như ở phần trước ta đã xét bất đẳng thức thuần nhất với kĩ thuật chuẩn hoá và ta đã thấy được sự quan trọng của kĩ thuật này . Ở phần này ta xét một lớp bất đẳng thức không thuần nhất có điều kiện và không có điều kiện. Tuy bất đẳng thức không thuần nhất không được nhiều người chú ý đến nhưng theo tác giả một khi đã nghiên cứu về bất đẳng thức thì không nên lãng quên bất cứ vấn đề gì liên quan đến nó. Vì lí do đó mà hôm nay tác giả đã viết thêm một bài viết về bất đẳng thức không thuần nhất mong bạn quan tâm đến.

B. <u>Bất đẳng thức không thuần nhất</u>:
Vì kiến thức lớp hàm không thuần nhất không có gì quan trọng nên tác giả sẽ không nêu ra đây mà tác giả mong muốn rằng thong qua một số bài tập bạn đọc tự rút ra những kinh nghiệm riêng cho mình.

1.1 Bất đẳng thức không thuần nhất có điều kiện:

Ta xét bài toán đơn giản sau:

<u>Problem 1:</u> (Sưu tầm)
Cho a,b,c không âm và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:
$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2+b^2+c^2 \ge a+b+c$$

<u>Solution:</u>
Mỗi vế của bất đẳng thức hơn kém nhau một bậc đồng thời đẳng thức điều kiện có dạng bậc nhất nên ta dựa vào đó để đồng bậc hai vế.
Vế thứ nhất: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:
$$3(a^3+b^3+c^3) \ge (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \Leftrightarrow (a^3+b^3-a^2b-ab^2)+(b^3+c^3-b^2c-bc^2)+(c^3+a^3-ca^2-c^2a) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a) \ge 0$$
Bất đẳng thức trên luôn đúng.
Vế thứ hai: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:
$$3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0.$$
Bất đẳng thức trên luôn đúng.
Vậy bất đẳng thức đã cho chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.
<u>Comment 1:</u> Kĩ thuật đã sử dụng ở bài toán trên gọi là kĩ thuật đồng bậc hoá (thuần nhất hoá) bất đẳng thức. Đây là một kĩ thuật quan trọng trong chứng minh bất đẳng thức.
Nội dung kĩ thuật thuần nhất hoá bất đẳng thức:
Giả sử ta cần chứng minh BĐT $f(x_1,x_2,..x_n) \ge g\left(x_1,x_2,...x_n\right)$ mà trong đó bậc của của 2 vế BĐT chênh lệch nhau thì ta dựa vào điều kiện đề bài (thường thì đối với loại toán này người ta thường cho thêm điều kiện ràng buộc các biến như tổng hoặc tích…) cho để đồng bậc 2 vế, rồi sau đó sử dụng phép biến đổi tương đương để chứng minh BĐT là đúng.

Thực ra thuần nhất hoá và chuẩn hoá là hai kĩ thuật đối ngược nhau nhưng nó bổ sung cho nhau và có mối liên hệ mật thiết với nhau. Hầu hết các bất đẳng thức có điều kiện đều được suy ra từ bất đẳng thức thuần nhất sau một bước chuẩn hoá nào đó. Bạn đọc có thể hiểu rõ ý mà tôi muốn nói thông qua bài toán sau.

Problem 2: (IMO-1984)

Cho x, y, z không âm và $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$xy+yz+xz-2xyz \le \frac{7}{27}$$

Solution:

Thuần nhất hoá hai vế bất đẳng thức ta có:

$$(xy+yz+xz)(x+y+z)-2xyz \le \frac{7}{27}(x+y+z)^3 \ (*)$$

$$\Leftrightarrow 7\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz \ge 6xy(x+y)+6yz(y+z)+6xz(x+z)$$

BĐT trên đúng do được suy ra từ hai BĐT sau:

$6\left(x^3+y^3+z^3\right)+18xyz \ge 6xy(x+y)+6yz(y+z)+6xz(x+z)$ (BĐT Schur)

$x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz$ (BĐT Cauchy)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Comment 2:

Sau đã thuần nhất hóa hai vế ta có thể phát biểu bài toán lại như sau:

Cho x, y, z *không âm. Chứng minh rằng:* $7(x+y+z)^3+54xyz \ge 27(xy+yz+xz)(x+y+z)$

Bây giờ ta coi như chưa biết lời giải của bài toán hai. Ta giải bài toán này như sau:

Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chuẩn hoá $x+y+z=1$ *(vì sao lại chuẩn hoá như vậy thì tôi nghĩ tới đây các bạn đã tự có thể trả lời câu hỏi đó). Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:* $7+54xyz \ge 27(xy+yz+xz)$.

Đến đây ta có thể giải bằng nhiều cách khác nhau, sau đây là một lời giải theo phương pháp Look at the end point.

BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau:

$$xy+yz+yz-2xyz-\frac{7}{27}=x(y+z)+yz(1-2x)-\frac{7}{27}=x(1-x)+yz(1-2x)-\frac{7}{27}$$

Ta cố định x xét $f(yz)=x(1-x)+yz(1-2x)-\frac{7}{27}\left(yz\in\left[0;\frac{(1-x)^2}{4}\right]\right)$. *Theo định lí ta có :*

$$f(yz)\le \max\{f(0); f\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\}.$$

Mà $f(0)=x(1-x)-\frac{7}{27}=-x^2+x-\frac{7}{27}<-x^2+x-\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le 0 \Rightarrow f(0)<0$

$$f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right]=x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{4}-\frac{2(1-x)^2}{4}-\frac{7}{27}=\frac{-1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)\le 0 \Rightarrow f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right]\le 0$$

Do đó $f(yz) \le 0 \Rightarrow$ *đpcm.*
Qua đó chắc bạn đọc đã hiểu điều tôi muốn nói. Nhưng theo kinh nghiệm bản thân thì tôi thấy hầu hết các bất đẳng thức thuần nhất đều dễ chứng minh hơn các bất đẳng thức không thuần nhất (đặc biệt là không có điều kiện).

Problem 3: (Sưu tầm)

Cho các số thực a,b,c thoả mãn điều kiện: $a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2 \ge a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}.$$

Solution:

Để loại bỏ số mũ hữu tỉ ta đặt ẩn phụ như sau: $x=a^{1/3}; y=b^{1/3}; z=c^{1/3}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x^6+y^6+z^6 \ge x^4+y^4+z^4$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.
Thuần nhất hoá bất đẳng thức cần chứng minh ta có:

$$3(x^6+y^6+z^6) \ge (x^2+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2(x^2+y^2)+(y^2-z^2)^2(y^2+z^2)+(x^2-z^2)^2(x^2+z^2) \ge 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$
Ta xét tiếp một số bài toán có mức độ khó hơn.

Problem 4: (Trần Tuấn Anh).

Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b} \ge 2$$

Solution:

Thuần nhất hoá bất đẳng thức cần chứng minh ta có:

$$\frac{a(a+b+c)+bc}{b+c}+\frac{b(a+b+c)+ca}{c+a}+\frac{c(a+b+c)+ab}{a+b}$$
$$=\frac{(a+c)(a+b)}{b+c}+\frac{(a+b)(b+c)}{c+a}+\frac{(a+c)(b+c)}{a+b}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(a+c)(a+b)}{b+c}+\dfrac{(a+b)(b+c)}{c+a} \ge a+b \\ \dfrac{(a+b)(b+c)}{c+a}+\dfrac{(a+c)(b+c)}{a+b} \ge b+c \\ \dfrac{(a+c)(a+b)}{b+c}+\dfrac{(a+c)(b+c)}{a+b} \ge a+c \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{cyc}\frac{(a+c)(a+b)}{b+c} \ge 2(a+b+c)=2.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problem 5: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}\le\frac{1}{6abc}$$

Solution:

Thuần nhất hoá bất đẳng thức cần chứng minh ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b(a+b+c)+ac}}+\frac{1}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)\\ \sqrt{\dfrac{1}{(b+c)(a+b)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)\\ \sqrt{\dfrac{1}{(c+a)(c+b)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{c+b}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\,(1)$$

Sử dụng tiếp bất đẳng thức phụ $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\ge\frac{4}{A+B}$ ta có:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+bc+ca}{2abc}\le\frac{\frac{(a+b+c)^2}{3}}{2abc}=\frac{1}{6abc}\,(2)$$

Từ (1)&(2) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Sau đây là một số bài toán tự luyện cho kĩ thuật này.

Problem 6: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương và $abc=1$. Chứng minh rằng:

1. $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 2(1+a+b+c)$
2. $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1$

Problem 7: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

1. $5+xyz\ge 2(xy+yz+xz)$
2. $\frac{a}{a+\sqrt{a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{b+ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{c+ab}}\le 1$

Problem 8: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+abc\geq 4$$

Solution:

Ta sử dụng phương pháp *Look at the end point.* Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$(y+z)^2-2yz+x^2+xyz-4\geq 0\Leftrightarrow (3-x)^2+x^2+yz(x-2)-4\geq 0\Leftrightarrow (2-x)yz+2x^2-6x+5\geq 0$$

Ta cố định x xét $f(yz)=(x-2)yz+2x^2-6x+5\left(yz\in\left[0;\frac{(3-x)^2}{4}\right]\right)$

Theo đỉnh lí $f(yz)\geq \min\{f(0);f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right]\}$.Mà

$$f(0)=2x^2-6x+5=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0\Rightarrow f(0)>0$$

$$f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right]=(x-2)\frac{(3-x)^2}{4}+2x^2-6x+5=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+2)\geq 0\Rightarrow f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right]\geq 0$$

Do đó $f(yz)\geq 0\Rightarrow$ đpcm.

Sau đây là một bài toán tương tự.

Problem 9: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho a,b,c dương và $2(a^2+b^2+c^2)+abc=7$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\leq 3.(*)$$

Solution:

Thật kì lạ chắc hẳn các bạn thắc mắc vì sao mà tôi lại nói bài toán này lại tương tự như bài toán 8. Và đó cũng là một điều dễ hiểu.

Sử dụng kĩ thuật phản chứng ta chứng minh bài toán tương đương sau:

Với $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $2(a^2+b^2+c^2)+abc\geq 7$.(**)

Sử dụng phương pháp *Look at the end point* ta viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$2(b+c)^2-4bc+2a^2+abc-7\geq 0\Leftrightarrow 2(3-a)^2+bc(a-4)+2a^2-7\geq 0\Leftrightarrow 4a^2-12a+11+bc(a-4)\geq 0$$

Ta cố định a xét $f(bc)=bc(a-4)+4a^2-12a+11\left(bc\in\left[0,\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right]\right)$

Theo định lí $f(bc)\geq \min\left\{f(0),f\left[\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right]\right\}$. Mà :

$$f(0)=4a^2-12a+11=(2a-3)^2+2>0$$

$$f\left[\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right]=\frac{(3-a)^2(a-4)}{4}+4a^2-12a+11=\frac{(a-1)^2(a+8)}{4}\geq 0$$. Do đó $f(bc)\geq 0\Rightarrow$ đpcm

Comment 3: Có lẽ các bạn sẽ thắc mắc vì sao khi bất đẳng thức (**) đúng thì dẫn tới bất đẳng thức (*) đúng đó cũng chính là cái hay của kĩ thuật phản chứng. Nó giúp ta đưa một bài toán chứng minh bất đẳng thức với điều kiện phức tạp về bài toán bất đẳng thức tương đương với điều kiện nhẹ nhàng hơn. Giả sử bất đẳng thức (**) đúng việc bây giờ là từ (**) ta suy ra (*) nghĩa là ta có giả thiết:

$$a+b+c=3\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+abc\geq 7.$$

Bây giờ ta chứng minh (*). Giả sử tồn tại a,b,c *thoả mãn* $2(a^2+b^2+c^2)+abc=7$. *CMR:* $a+b+c\leq 3$.

Giả sử ngược lại: $a+b+c=3k>3$. *Đặt:* $a=ka';b=kb';c=kc'$ *thì* $a'+b'+c'=3$ *vì (**) chứng minh được nên ta suy ra* $2(a'^2+b'^2+c'^2)+a'b'c'\geq 7$.

Do $k>1$ *nên* $2(a^2+b^2+c^2)+abc>2(a'^2+b'^2+c'^2)+a'b'c'\geq 7$ *(vô lí).*

Problem 10: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho a,b,c dương và thoả mãn: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a+b+c}=\frac{11}{6}$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$

Solution:

Xây dựng bài toán phản chứng: Với a,b,c dương và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a+b+c}\geq\frac{11}{6}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $3=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\Rightarrow abc\geq 1$.

Khi đó: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a+b+c}\geq\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}$.

Sử dụng tiếp bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{a+b+c}{2}+\frac{1}{a+b+c}.$$

Đặt $a+b+c=t\geq 3$. Sử dụng kĩ thuật điểm rơi ta có: $\frac{t}{2}+\frac{1}{t}=\frac{t}{9}+\frac{1}{t}+\frac{7t}{18}\geq 2\sqrt{\frac{1}{9}}+\frac{7}{18}.3=\frac{11}{6}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problem 11: (IMO-2005)

Cho x,y,z dương và $xyz\geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geq 0$$

Solution:

Ta thuần nhất hoá bất đẳng thức như sau:

$$\sum_{x,y,z}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\sum_{x,y,z}\frac{x^5-x^2.xyz}{x^5+xyz(y^2+z^2)}=\sum_{x,y,z}\frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)}\ge\sum_{x,y,z}\frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{x^4+yz(y^2+z^2)}.$$

Đặt $a=x^2;b=y^2;c=z^2$. Khi đó ta cần chứng minh:

$$\sum_{a,b,c}\frac{2a^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{a,b,c}(a-b)\left[\frac{a}{2a^2+(b+c)^2}-\frac{b}{2b^2+(a+c)^2}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{a,b,c}(a-b)^2\left[\frac{c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2}{\left(2a^2+(b+c)^2\right)\left(2b^2+(a+c)^2\right)}\right]\ge 0$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Problem 12: (Phạm Kim Hùng)

Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\ge\frac{3}{2}$$

Solution:

Sử dụng kĩ thuật Cauchy ngược dấu. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a-\frac{a^2}{a+b^2}+b-\frac{b^2}{b+c^2}+c-\frac{c^2}{c+a^2}\le a+b+c-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a}\le\frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ở dưới mẫu ta có:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{ab^2}{a+b^2}\le\dfrac{b\sqrt{a}}{2}\\ \dfrac{bc^2}{b+c^2}\le\dfrac{c\sqrt{b}}{2}\\ \dfrac{ca^2}{c+a^2}\le\dfrac{a\sqrt{c}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{ab^2}{a+b^2}\le\frac{a\sqrt{c}+c\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{2}\le\frac{a(c+1)+c(b+1)+b(a+1)}{4}\le\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problem 13: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}\ge\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Solution:

Ta có: $\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}=\frac{1-(1-a)}{\sqrt{1-a}}+\frac{1-(1-b)}{\sqrt{1-b}}+\frac{1-(1-c)}{\sqrt{1-c}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}-\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\right)(1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\le\sqrt{3(3-a-b-c)}=\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{1-b}}+\frac{1}{\sqrt{1-c}}\ge\frac{9}{\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}}=\frac{9}{\sqrt{6}}$$

Do đó: $\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}\ge\frac{9}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problem 14: (Moskva-2000)

Cho x,y,z dương và $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge 2(xy+yz+xz)$$

Solution:

Do tình đối xứng của bài toán nên ta giả sử $x\le y\le z$. Ta đặt:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z-2(xy+yz+xz)$$

Xét hiệu: $f(x,y,z)-f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz})$

$=x^2+y\ \ +z^2+x+y+z-2(xy+yz+xz)-x^2-yz-yz-x-2\sqrt{yz}+2(2x\sqrt{yz}+yz)$

$=y^2+z^2+y+z-2(xy+yz+xz)-2\sqrt{yz}+4x\sqrt{yz}$

$=(y-z)^2+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2-2x(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$

$=\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left(y+z-2x+1+2\sqrt{yz}\right)$

Do $x\le y\le z\Rightarrow y+z-2x\ge 0$ nên $f(x,y,z)-f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right)\ge 0$

Đặt $a=x;\sqrt{yz}=b\Rightarrow ab^2=1$. Xét: $f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz})=f(a,b,b)=a^2+a+2b-4ab=\frac{1}{b^4}+\frac{1}{b^2}+2b-\frac{4}{b}$

$=\frac{1}{b^4}(2b^5-4b^3+b^2+1)=\frac{1}{b^4}(b-1)^2(2b^3+4b^2+2b+1)\ge 0$. Suy ra: $f(x,y,z)\ge f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz})\ge 0$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Problem 15: (Võ Quốc Bá Cẩn)

Cho a,b,c dương và $abc=1$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{8a^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{8b^3+1}}\ge 1$$

Solution:
Bài toán trên đây được anh Võ Quốc Bá Cẩn đưa lên báo Toán học&Tuổi trẻ. Tính cho đến nay (thời điểm tôi đang viết bài viết này) là tôi chưa nhận được lời giải từ báo Toán học&Tuổi trẻ. Nhưng may mắn thay là tôi đã giải được bài toán này và càng ngạc nhiên hơn là tôi đã sử dụng kĩ thuật thuần nhất hoá. Sau đây là lời giải của tôi:
Ta có:

$$\sqrt{8c^3+1}=\sqrt{(2c+1)(4c^2-2c+1)}\le\frac{4c^2+2}{2}=2c^2+1\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}}\ge\frac{a}{2c^2+1}$$

$$\sqrt{8b^3+1}=\sqrt{(2b+1)(4b^2-2b+1)}\le\frac{4b^2+2}{2}=2b^2+1\Rightarrow\frac{c}{\sqrt{8b^3+1}}\ge\frac{c}{2b^2+1}$$

$$\sqrt{8a^3+1}=\sqrt{(2a+1)(4a^2-2a+1)}\le\frac{4a^2+2}{2}=2a^2+1\Rightarrow\frac{b}{\sqrt{8a^3+1}}\le\frac{b}{2a^2+1}$$

Do đó: $\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{8a^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{8b^3+1}}\ge\frac{a}{2c^2+1}+\frac{b}{2a^2+1}+\frac{c}{2b^2+1}$.(1)

Do $abc=1$ nên ta đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$ khi đó (1) trở thành:

$$\frac{x^3}{x^2y+2yz^2}+\frac{y^3}{y^2z+2zx^2}+\frac{z^3}{xz^2+2xy^2}$$
$$=\frac{x^4}{x^3y+2xyz^2}+\frac{y^4}{y^3z+2x^2yz}+\frac{z^4}{xz^3+2xy^2z}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{x^4}{x^3y+2xyz^2}+\frac{y^4}{y^3z+2x^2yz}+\frac{z^4}{xz^3+2xy^2z}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^3y+y^3z+z^3x+2xyz(x+y+z)}$$

Ta chứng minh: $(x^2+y^2+z^2)^2\ge x^3y+y^3z+z^3x+2xyz(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)\ge x^3y+y^3z+z^3x+2xyz(x+y+z)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta chứng minh được: $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz(x+y+z)$.

Giả sử $y=\max\{x,y,z\}$. Xét hiệu:

$$x^4+y^4+z^4-x^3y-y^3z-z^3x=x^3(x-y)+y^3(y-z)+z^3(z-x)$$
$$=(x-z)(x^3-z^3)+(y-z)(y^3-x^3)=(x-z)^2(x^2+xz+z^2)+(y-z)(y-x)(x^2+xy+y^2)\ge0$$

Bất đẳng thức trên đúng. Vậy bất đẳng thức ban đầu đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Qua các ví dụ trên có lẽ các bạn đã tự nắm cho mình một số kinh nghiệm trong việc giải quyết các bài toán không thuần nhất có điều kiện. Thật ra đối với các bất đẳng thức không thuần nhất có điều kiện thì kĩ thuật thuần nhất hoá là được sử dụng nhiều nhất. Tuy nhiên bạn hãy xét bất đẳng thức sau:

Cho $a,b,c\ge0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)\le27.$$

Đối với bài toán trên thì việc sử dụng kĩ thuật thuần nhất hoá vế là hoàn toàn vô dụng mà phải sử dụng công cụ mạnh hơn là phương pháp dồn biến. Qua đó tôi muốn nói không phải lúc nào kĩ thuật thuần nhất hoá cũng có thể giải quyết được hầu hết các bất đẳng thức không thuần nhất có điều kiện (tức là sức mạnh của kĩ thuật thuần nhất hoá có chừng mực nào đó). Tuy nói thế nhưng kĩ thuật này vô cùng quan

trọng trong việc chứng minh bất đẳng thức và nó cũng là một tiêu chuẩn đầu tiên mỗi khi xét đến một bài toán bất đẳng thức nào đó.
Sau đây là một số bài toán tự luyện:

Problem 1:(Sưu tầm) Cho $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge \frac{1}{4}.$$

Problem 2:(Pháp 2005) Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge 3.$$

Problem 3:(Toán học&Tuổi trẻ) Cho a,b,c dương và $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$a^2b+b^2c+c^2a\le a^3+b^3+c^3\le 1+\frac{1}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

Problem 4:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\le 6.$$

Problem 5:(APMO 2001) Cho a,b,c dương và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Problem 6:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\le\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+3.$$

Problem 7:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\le\frac{27}{4}$$

HD: Sau khi thuần nhất hoá hai vế bất đẳng thức ta sử dụng kĩ thuật chuyển từ bất đẳng thức có dấu bằng đạt tại biên về chứng minh bất đẳng thức có dấu bằng đạt tại tâm. Cụ thể là ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a+b+c)^3\ge 4\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]+3abc.$$

Đây là kĩ thuật rất hay bạn đọc có thể tham khảo kĩ thuật này trên trang web ***diendantoanhoc.net***

1.2 Bất đẳng thức không thuần nhất không có điều kiện:

Problem 15: (Áo 2000)

Cho $a\ne 0,b$ là hai số thực . Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\ge\sqrt{3}$$

Solution:

Ta có:

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}=\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2+a^2+\frac{3}{4a^2}\ge a^2+\frac{3}{4a^2}\ge 2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức đã đượ chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=\sqrt[4]{\frac{3}{4}};b=-\frac{\sqrt[4]{4}}{2\sqrt[4]{3}}$.

Problem 16: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{a}\right)^4+\left(1+\frac{1}{b}\right)^4+\left(1+\frac{1}{c}\right)^4}-\sqrt[4]{3}\geq\frac{\sqrt[4]{243}}{2+abc}$$

Solution:

Ta chứng minh 2 BĐT phụ sau: Với x,y,z dương thì:

$$x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)(1)$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3\ (2)$$

+ Chứng minh BĐT (1). Sử dụng BĐT AM-GM:

$$x^4+x^4+y^4+z^4\geq 4x^2yz;y^4+y^4+x^4+z^4\geq 4xy^2z;z^4+z^4+x^4+y^4\geq 4xyz^2$$

Cộng dồn lại ta có: $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)$

+ Chứng minh BĐT (2) . Ta có:

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+x+y+z+xy+yz+xz+xyz\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz=\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3$$

Bây giờ ta quay lại việc chứng minh BĐT (*)

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{a}\right)^4+\left(1+\frac{1}{b}\right)^4+\left(1+\frac{1}{c}\right)^4}\geq\sqrt[4]{3}+\frac{\sqrt[4]{243}}{2+abc}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{a}\right)^4+\left(1+\frac{1}{b}\right)^4+\left(1+\frac{1}{c}\right)^4\geq 3\left(1+\frac{3}{2+abc}\right)^4$$

Sử dụng BĐT (1) ta có:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^4+\left(1+\frac{1}{b}\right)^4+\left(1+\frac{1}{c}\right)^4\geq\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Sử dụng BĐT (2) và BĐT AM-GM ta có:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3\left(3+\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc.1.1}}\right)^4\geq 3\left(1+\frac{3}{2+abc}\right)^4$$

Vậy BĐT đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problem 17: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

Solution:

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{1+abc}{a(1+b)}+\frac{1+abc}{b(1+c)}+\frac{1+abc}{c(1+a)}\ge 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1+abc+a+ab}{a(1+b)}+\frac{1+abc+bc+b}{b(1+c)}+\frac{1+abc+ac+c}{c(1+a)}\ge 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{(1+a)+ab(1+c)}{a(1+b)}+\frac{(1+b)+bc(1+a)}{b(1+c)}+\frac{(1+c)+ca(1+b)}{c(1+a)}\ge 6$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\right]+\left[\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{b(1+c)}{1+b}\right]+\left[\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{c(1+a)}{1+c}\right]\ge 6$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta suy ra $\sum_{cyc}\left[\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\right]\ge 6$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Comment 4: Ta có bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức trên như sau:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}.$$

Để chứng minh điều này ta chứng minh rằng:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}\ge \frac{3}{1+abc}\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{(abc)^2}\ge 2\sqrt[3]{abc}$$ *(đúng theo bất đẳng thức AM-GM).*

Problem 18: (Sưu tầm)

Cho a,b,c,d dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{d+a}\right)\ge \frac{16}{1+abcd}$$

Solution:

Ta có:

$$\sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{1}{a}.\sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{1}{a+b}=\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)+\left[\frac{a+b}{ab(c+d)}+\frac{c+d}{cd(a+b)}\right]+\frac{a+b}{ab(a+d)}+\frac{a+b}{ab(b+c)}+\frac{c+d}{cd(b+c)}+\frac{c+d}{cd(d+a)}$$
$$\ge \frac{4}{\sqrt{abcd}}+\frac{a+b}{ab(d+a)}+\frac{a+b}{ab(b+c)}+\frac{c+d}{cd(b+c)}+\frac{c+d}{cd(d+a)}.$$

Tương tự ta có: $VT\ge \frac{4}{\sqrt{abcd}}+\frac{b+c}{bc(a+b)}+\frac{b+c}{bc(c+d)}+\frac{a+d}{ad(a+b)}+\frac{a+d}{ad(c+d)}$

Do đó:

$$2VT\ge \frac{8}{\sqrt{abcd}}+\left[\frac{a+b}{ab(d+a)}+\frac{d+a}{ad(a+b)}\right]+\left[\frac{a+b}{ab(b+c)}+\frac{b+c}{bc(a+b)}\right]+\left[\frac{c+d}{cd(b+c)}+\frac{b+c}{bc(c+d)}\right]+\left[\frac{c+d}{cd(d+a)}+\frac{a+d}{ad(c+d)}\right]$$

$$\Rightarrow 2VT\ge \frac{8}{\sqrt{abcd}}+\frac{2}{a\sqrt{bd}}+\frac{2}{b\sqrt{ca}}+\frac{2}{c\sqrt{bd}}+\frac{2}{d\sqrt{ca}}=\frac{8}{\sqrt{abcd}}+\frac{2}{\sqrt{bd}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{2}{\sqrt{ac}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$$
$$\Rightarrow 2VT\ge \frac{8}{\sqrt{abcd}}\ge \frac{16}{1+abcd}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Problem 19: (Trần Nam Dũng)

Cho x, y, z dương. Chứng minh rằng:

$$2(x^2+y^2+z^2)+xyz+8\ge 5(x+y+z)$$

Solution:

Do tính bình đẳng của x, y, z nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử:

$$\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 1 \\ y\le 1 \end{cases} (*)$$

Khi đó ta có:

$$xy\ge x+y-1 \Leftrightarrow xyz\ge xz+yz-z \Leftrightarrow xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge xz+yz-z+2(x^2+y^2+z^2)+8$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$xz+yz-z+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge 5(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (y+z-2)^2+(x+z-2)^2+3(x-1)^2+3(y-1)^2+2(z-1)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Comment 5:

Chắc hẳn các bạn thắc mắc tại sao ta lại có thể giả sử được như (*). Thật vậy đều này hoàn toán tự nhiên và dễ hiểu, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 1:Trong ba số x_1, x_2, x_3 *luôn tồn tại hai số* $x_i, x_j\left(i, j\in\{1,2,3\}\right)$ *sao cho:*

$$\begin{cases} x_i\ge a \\ x_j\ge a \end{cases} \vee \begin{cases} x_i\le a \\ x_j\le a \end{cases} \text{(a là số thực bất kì)}$$

Bổ đề 2: Nếu $\begin{cases} x_i\ge a \\ x_j\ge a \end{cases} \vee \begin{cases} x_i\le a \\ x_j\le a \end{cases}$ *thì* $x_ix_j\ge x_i+x_j-a^2$.

CM:

Bổ đề 1: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_1\le x_2\le x_3$.

Nếu $x_2\le a\Rightarrow x_1\le a\Rightarrow$ *đpcm*

Nếu $x_2\ge a\Rightarrow x_3\ge a\Rightarrow$ *đpcm.*

Bổ đề 2: Từ giả thiết ta suy ra $(x_i-a)(x_j-a)\ge 0\Leftrightarrow x_ix_j\ge x_i+x_j-a^2$.

Đây là hai bổ đề tưởng chứng như đơn giản mà lại khá hay trong việc chứng minh bất đẳng thức không thuần nhất không có điều kiện, hai bổ đề này được thầy giáo Sơn Kều giới thiệu trong bài viết "Một phương pháp chứng minh bất đẳng thức và xây dựng một số bất đẳng thức".

Ta vận dụng hai bổ đề trên chứng minh bài toán sau:

Problem 20: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho x, y, z dương. Chứng minh rằng:

$$xyz+3(x^2+y^2+z^2)+11\ge 7(x+y+z)$$

Solution:

Do tính bình đẳng của x,y,z nên ta giả sử $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 1\end{cases} \vee \begin{cases} x\le 1 \\ y\le 1\end{cases}$. Khi đó ta có:

$xy\ge x+y-1 \Leftrightarrow xyz\ge xz+yz-z \Leftrightarrow xyz+3(x^2+y^2+z^2)+11\ge 3(x^2+y^2+z^2)+11+xz+yz-z$.

Ta cần chứng minh:

$$3(x^2+y^2+z^2)+11+xz+yz-z\ge 7(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (y+z-2)^2+(x+z-2)^2+5(x-1)^2+5(y-1)^2+4(z-1)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Sau đây ta sẽ xét một bài toán khá nổi tiếng và một số kết quả thu được từ bài toán kinh điển này.

Problem 21: (Darij Grinberg)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$$

Solution:

Đây là một bài toán khá nổi tiếng có thể coi nó là bất đẳng thức tiêu biểu cho các bất đẳng thức không thuần nhất không có điều kiện. Sau đây là một số lời giải cho bất đẳng thức này:

Cách 1: Sử dụng phương pháp tam thức bậc hai.

Chuyển về tam thức bậc hai theo a.

$$f(a)=a\ \ +2(bc-b-c)a+(b-c)^2+1$$

$$\Delta'=(bc-b-c)^2-(b-c)^2-1=bc(b-2)(c-2)-1$$

Nếu $bc-b-c\ge 0 \Rightarrow$ đpcm.

Nếu $bc-b-c\le 0 \Leftrightarrow (b-1)(c-1)\le 1$. Ta chia làm hai trường hợp:

+ Có đúng 1 trong hai số b,c lớn hơn 2, số còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 2. Ta thấy $\Delta'\le 0$.

+ Cà hai số b,c đều nhỏ hơn 2. Theo bất đẳng thức AM-GM

$$b(2-b)\le 1; c(2-c)\le 1 \Rightarrow \Delta'\le 0.$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong.

Cách 2: Sử dụng kĩ thuật bán thuần nhất hoá.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)(2abc+1)\ge 2(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3+(a+b+c)(2abc+1)\ge 6abc+\sum_{sym} a^2b$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 1 ta có: $\sum_{cyc} a^3+3abc\ge \sum_{sym} a^2b$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $(a+b+c)(2abc+1)\ge 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{(abc)^2}=9abc$.

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên lại ta được đpcm.

Cách 3: Sử dụng bổ đề đã nêu trên.

Không mất tính tổng quát giả sử: $\begin{cases} a\ge 1 \\ b\ge 1\end{cases} \vee \begin{cases} a\le 1 \\ b\le 1\end{cases}$. Khi đó ta có:

$ab\ge a+b-1 \Leftrightarrow 2abc\ge 2ac+2bc-2c \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge a^2+b^2+c^2+2ac+2bc-2c+1$.

Ta cần chứng minh : $a^2+b^2+c^2+2bc+2ac-2c+1\ge 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2\ge 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.
Sau đây là một số bất đẳng thức liên quan đến bất đẳng thức trên

> *Problem 22:* (Marian Tetiva)
> Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:
> $$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge(1+a)(1+b)(1+c)$$

Solution:
Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$$a^2+b^2+c^2+abc+2\ge a+b+c+ab+bc+ca$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+2abc+4\ge 2(a+b+c+ab+bc+ca)$$
Tới đây ta sử dụng bất đẳng thức phụ sau:
$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$$
$$a^2+1\ge 2a$$
Và
$$b^2+1\ge 2b$$
$$c^2+1\ge 2c$$
Cộng các bất đẳng thức trên lại vế theo vế ta có được đpcm.

> *Problem 23:* (APMO 2004)
> Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:
> $$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$$

Solution:
Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:
$$\prod_{cyc}(a^2+2)-9\sum_{cyc}ab\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}(a^2b^2+1)+(a^2b^2c^2+1)+1-9\sum_{cyc}ab\ge 0$$
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$4\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}(a^2b^2+1)+(a^2b^2c^2+1)+1-9\sum_{cyc}ab\ge\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab+4\sum_{cyc}ab+2abc+1-9\sum_{cyc}ab$$
$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}(a^2b^2+1)+(a^2b^2c^2+1)+1-9\sum_{cyc}ab\ge\sum_{cyc}a^2+2abc+1-2\sum_{cyc}ab\ge 0$$
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.
Ta có bài toán mạnh hơn bất đẳng thức APMO-2004 như sau:

> *Problem 24:* (Nguyễn Đình Thi)
> Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:
> $$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2$$

Solution: Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 + 2abc + 7 \ge 6\sum_{cyc} ab.$$

Bất đẳng thức trên được suy ra từ hai bất đẳng thức sau:

$$\sum_{cyc} a^2 + 2abc + 1 \ge 2\sum_{cyc} ab (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a^2b^2 + 2 \ge 4ab \\ 2b^2c^2 + 2 \ge 4bc \\ 2a^2c^2 + 2 \ge 4ac \end{array}\right\} \Rightarrow 2\sum_{cyc} a^2b^2 + 6 \ge 4\sum_{cyc} ab (2)$$

Cộng (1)&(2) vế theo vế ta được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

> ***Problem 25:*** (Nguyễn Anh Khoa)
>
> Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:
>
> $$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) + 4 \ge 4(ab+bc+ca) + (abc-1)^2$$

Solution:

Ta có VT của bất đẳng thức bằng:

$$\prod_{cyc}(1+a^2) = 1 + \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} a^2b^2 + a^2b^2c^2$$

Mặt khác ta lại có: $\sum_{cyc} a^2 + 2abc + 1 \ge 2\sum_{cyc} ab \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 + 1 \ge 2\sum_{cyc} ab - 2abc$.

Do đó: $\prod_{cyc}(1+a^2) + 4 \ge \sum_{cyc} a^2b^2 + a^2b^2c^2 + 2\sum_{cyc} ab - 2abc + 4$

$$\Leftrightarrow \prod_{cyc}(1+a^2) + 4 \ge \sum_{cyc}(ab+1)^2 + (abc-1)^2.$$

Sử dụng tiếp bất đẳng thức AM-GM ta có: $\prod_{cyc}(1+a^2) + 4 \ge 4\sum_{cyc} ab + (abc-1)^2$.

Vậy bất đẳng thức đã chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

> ***Problem 26:*** (Nguyễn Anh Khoa)
>
> Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:
>
> $$3.\max\left\{(a-1)^2, (b-1)^2, (c-1)^2\right\} + 3 \ge 2(1-a)(1-b)(1-c)$$

Solution:

Ta sử dụng bất đẳng thức phụ sau:

$$3.\max\left\{(a-1)^2, (b-1)^2, (c-1)^2\right\} \ge 3.\frac{(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2}{3} = \sum_{cyc}(a-1)^2.$$

Ta cần chứng minh : $\sum_{cyc}(a-1)^2 + 3 \ge 2\prod_{cyc}(1-a)$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} a + 3 \ge 2 - 2\sum_{cyc} a + 2\sum_{cyc} ab - 2abc$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 + 2abc + 1 \ge 2\sum_{cyc} ab$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

* *Attention: Trong qua trình chứng minh bất đẳng thức có dạng* $\min(\max)\{a,b,c\} \geq d$ *.Ta cần nhớ các bất đẳng thức phụ sau:*

$$\max\{a,b,c\} \geq \frac{a+b+c}{3}; \min\{a,b,c\} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Sau đây là một số bài toán tự luyện:

Problem 1:(Nguyễn Anh Khoa) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{9+\sum_{cyc} a^2}{3}\right)^3 + 4abc \geq 18\sum_{cyc} ab + 14.$$

Problem 2:(Nguyễn Đình Thi) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\prod_{cyc}(1+a^2) + \frac{3}{2}a^2b^2c^2 + abc + 21 \geq 2\prod_{cyc}(1+ab).$$

Problem 3:(Kvant 1988) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$3 + \sum_{cyc} a + \sum_{cyc}\frac{1}{a} + \sum_{cyc}\frac{a}{b} \geq 3\frac{\prod_{cyc}(1+a)}{1+abc}.$$

Problem 4:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

1. $\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{1+a}\right) \geq \frac{9}{1+abc}$

2. $\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{1+a}\right) \geq \frac{9}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$.

Problem 5:(Nguyễn Anh Khoa) Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng:

$$\left[8+\prod_{cyc}(a+b)\right].\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a+b}\right) \geq 24.$$

Như vậy là ta đã kết thúc phần bất đẳng thức không thuần nhất, qua các ví dụ trên ta có thể thấy được công cụ để giải các bất đẳng thức không thuần nhất là vô cùng phong phú mỗi bài có những vẻ đẹp riêng. Một lần nữa ta hãy xem lại bài toán quen thuộc sau:

Với $a,b,c>0$ thì: $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$.(*)

Từ bài toán trên ta có thể tạo ra hàng loạt bài toán liên quan mà các bạn đã thấy. Đó chính là những đều ẩn sau vẻ đẹp của mỗi bài toán. Như anh Hùng đã nói điều kiện để bất đẳng thức hay điều đầu tiên là nó phải đẹp, không có điều kiện rắc rối phức tạp và ở dạng chuẩn, và ta phải giải quyết được bài toán tổng quát của nó. Và bất đẳng thức (*) chính là như thế.

<u>*Bài toán tổng quát*</u>: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$(2n-1)(a^2+b^2+c^2)+2ab+1 \geq 2n(ab+bc+ca)\left(n \geq 1\right).$$

Nếu bạn là một người đam mê bất đẳng thức không thuần nhất thì bạn hãy xét bài toán sau:

Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng:

$$a(b+2g)xyz + (mb+2ng-g)\sum_{cyc} x^{2a} + 2a(3mb+3ng+b-g) - 3(mb+2ng-g) \geq a(2mb+b)\sum_{cyc} x + 2a\,ng\sum_{cyc} xy$$

trong đó: $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}; n \geq 1; a>1; b,g \geq 0$.

Rõ ràng bất đẳng thức trên không thể nói là hay được vì ngoại hình của nó quá cồng kềnh. Nhưng đây là một bất đẳng thức khó bạn đọc tự chứng minh xem như bài luyện.

BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ VÒNG QUANH

NGUYỄN ANH KHOA

A. Lời giới thiệu:
Cũng giống như bất đẳng thức không thuần nhất, bất đẳng thức ở dạng hoán vị vòng được rất ít người chú ý đến. Hầu hết bất đẳng thức trong các kì thi toán hiện nay thì xác xuất xuất hiện của bất đẳng thức hoán vị là rất ít. Bởi vì những bất đẳng thức hoán vị thường khó hơn so với bất đẳng thức ở dạng thuần nhất hoặc không thuần nhất. Chính vì lí do đó nên hôm nay tôi quyết định viết thêm vào chuyên đề của mình một bài viết về bất đẳng thức hoán vị.

B. Kiến thức cơ bản:
Đến đây có lẽ ta nên định nghĩa lại một số kiến thức sau:

1.1 Hoán vị vòng quanh- hoán vị bất kì (đối xứng):

1. Giả sử biểu thức P có giá trị không đổi khi ta hoán vị vòng quanh các biến $a_1;a_2;...a_n$

   Nghĩa là $P(a_1,a_2,...a_n)=P(a_2,...a_n,a_1)=...=P(a_n,...a_{n-2},a_{n-1})$

   Với n=3 thì ta có $P(a_1,a_2,a_3)=P(a_2,a_3,a_1)=P(a_3,a_1,a_2)$

   Khi đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử

   $a_1=\min\{a_1,a_2...a_n\}\vee a_1=\max\{a_1,a_2,...a_n\}$

   Trong trường hợp này người ta gọi biểu thức P là biểu thức cyclic của các biến số trên

2. Giả sử biểu thức P có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị một cách bất kì các biến $a_1,a_2,..a_n$.Nghĩa là $P(a_1,a_2,..a_n)=P(b_1,b_2,..b_n)$ trong đó $b_1,b_2,..b_n$ là hoán vị bất kì của $a_1,a_2,..a_n$

   Với n=3 thì ta có $P(a_1,a_2,a_3)=P(a_i,a_j,a_m)$ trong đó i,j,m là hoán vị bất kì của 1,2,3

   Khi đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1\ge a_2\ge...\ge a_n\vee a_1\le a_2\le...\le a_n$

   Trong trường hợp này người ta gọi biểu thức P là biểu thức symmetric của các biến số trên.

1.2 Cách viết tổng hoán vị- tổng đối xứng:
Sau đây ta sẽ định nghĩa cách viết như sau:

$$\sum_{cyc}P(x,y,z)=P(x,y,z)+P(y,z,x)+P(z,x,y)$$

$$\sum_{sym}P(x,y,z)=P(x,y,z)+P(x,z,y)+P(y,z,x)+P(z,x,y)+P(y,x,z)+P(z,y,x)$$

$$\sum_{cyc}x^3=x^3+y^3+z^3$$

$$\sum_{sym}x^3=2(x^3+y^3+z^3)$$

VD: $$\sum_{cyc}x^2y=x^2y+y^2z+z^2x$$

$$\sum_{sym}x^2y=x^2y+xy^2+y^2z+z^2y+x^2z+z^2x$$

$$\sum_{cyc}xyz=3xyz;\sum_{sym}xyz=6xyz$$

Ta có định nghĩa tương tự như trên đối với các viết $\prod$.

C. <u>Một số ví dụ và kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức hoán vị</u>:

1. <u>*Kĩ thuật sử dụng bất đẳng thức AM-GM cổ điển.*</u>

Kĩ thuật sử dụng bất đẳng thức AM-GM cổ điển không có gì mới mẻ . Ta bắt đầu với bài toán đơn giản sau:

<u>*Problem 1:*</u> (Nguyễn Kim Cường).

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

1. $\sum_{cyc}\frac{a^3}{bc}\geq\sum_{cyc}\frac{ab}{c}$

2. $\sum_{cyc}\frac{a^3b}{c^3}\geq\sum_{cyc}\frac{ab}{c}$

3. $\sum_{cyc}\frac{a^3b^3}{c^5}\geq\sum_{cyc}\frac{ab}{c}$

4. $\sum_{cyc}\frac{a^5}{bc^3}\geq\sum_{cyc}\frac{ab}{c}$

<u>*Solution:*</u>

1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}\geq 2\frac{ab}{c}\\ \frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq 2\frac{bc}{a}\\ \frac{c^3}{ab}+\frac{a^3}{bc}\geq 2\frac{ca}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a^3}{bc}\geq\sum_{cyc}\frac{ab}{c}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

2. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^3b}{c^3}+\frac{bc}{a}\geq 2\frac{ab}{c}\\ \frac{b^3c}{a^3}+\frac{ca}{b}\geq 2\frac{bc}{a}\\ \frac{c^3a}{b^3}+\frac{ab}{c}\geq 2\frac{ca}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a^3b}{c^3}\geq\sum_{cyc}\frac{ab}{c}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

3. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^3b^3}{c^5}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 3\frac{ab}{c}\\ \frac{b^3c^3}{a^5}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq 3\frac{bc}{a}\\ \frac{c^3a^3}{b^5}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 3\frac{ca}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a^3b^3}{c^5}\geq\sum_{cyc}\frac{ab}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

4. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^5}{bc^3}+\dfrac{b^5}{ca^3}+\dfrac{ac}{b}\ge 3\dfrac{ab}{c}\\ \dfrac{b^5}{ca^3}+\dfrac{c^5}{ab^3}+\dfrac{ba}{c}\ge 3\dfrac{bc}{a}\\ \dfrac{a^5}{bc^3}+\dfrac{c^5}{ab^3}+\dfrac{ba}{c}\ge 3\dfrac{ac}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a^5}{bc^3}\ge \sum_{cyc}\frac{ab}{c}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Comment1: *Qua các ví dụ trên ta thấy việc tách ghép để sử dụng bất đẳng thức AM-GM là khá phong phú và đa dạng. Kĩ thuật "tách ghép nhóm" này nó phụ thuộc vào từng bài toán và sự nhạy bén của người làm toán. Một điểm cần chú ý là ta phải tách ghép sao cho dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức vẫn đảm bảo.*

Problem 2: (Nguyễn Kim Cường)

Cho a,b,c,d dương và $abcd=1$. Chứng minh rằng:

1. $\displaystyle\sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{a^3}{c^6}\ge \sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{a^2}{c}$.
2. $\displaystyle\sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{a^5b^4}{c^{13}}\ge \sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{ab^2}{c^3}$.

Solution:

1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^6}{c^6}+\dfrac{c^3}{a^6}+\dfrac{b^3}{d^6}\ge 3\dfrac{b}{cd^2a}=3\dfrac{b^2}{abcd.d}=3\dfrac{b^2}{d}\\ \dfrac{c^3}{a^6}+\dfrac{b^3}{d^6}+\dfrac{d^3}{b^6}\ge 3\dfrac{c}{a^2bd}=3\dfrac{c^2}{abcd.a}=3\dfrac{c^2}{a}\\ \dfrac{b^3}{d^6}+\dfrac{d^3}{b^6}+\dfrac{a^3}{c^6}\ge 3\dfrac{a}{bc^2d}=3\dfrac{a^2}{abcd.c}=3\dfrac{a^2}{c}\\ \dfrac{d^3}{b^6}+\dfrac{a^3}{c^6}+\dfrac{c^3}{a^6}\ge 3\dfrac{d}{ab^2c}=3\dfrac{d^2}{abcd.b}=3\dfrac{d^2}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{a^3}{c^6}=\sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{a^2}{c}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

2. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^5b^4}{c^{13}}+\dfrac{bc^2}{d^3}+\dfrac{cd^2}{a^3}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^5}{c^{10}d}}=3\sqrt[3]{\dfrac{a^3b^6}{abcd.c^9}}=3\dfrac{ab^2}{c^3}\\ \dfrac{b^5c^4}{d^{13}}+\dfrac{cd^2}{a^3}+\dfrac{da^2}{b^3}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2c^5}{d^{10}a}}=3\sqrt[3]{\dfrac{b^3c^6}{abcd.d^9}}=3\dfrac{bc^2}{d^3}\\ \dfrac{c^5d^4}{a^{13}}+\dfrac{da^2}{b^3}+\dfrac{ab^2}{c^3}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{c^2d^5}{a^{10}b}}=3\sqrt[3]{\dfrac{c^3d^6}{abcd.a^9}}=3\dfrac{cd^2}{a^3}\\ \dfrac{d^5a^4}{b^{13}}+\dfrac{ab^2}{c^3}+\dfrac{bc^2}{d^3}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{d^2a^5}{b^{10}c}}=3\sqrt[3]{\dfrac{a^6d^3}{abcd.b^9}}=3\dfrac{da^2}{b^3}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{a^5b^4}{c^{13}}\ge \sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{ab^2}{c^3}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

Problem 3: (Toán học&Tuổi trẻ)

Cho x, y, z dương và $x+y+z=2001$. Tìm GTNN của:

$$F=\frac{x^{20}}{y^{11}}+\frac{y^{20}}{z^{11}}+\frac{z^{20}}{x^{11}}.$$

Solution:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\underbrace{\frac{x^{20}}{y^{11}}+\ldots+\frac{x^{20}}{y^{11}}}_{9\text{ lần}}+\underbrace{y^9+\ldots+y^9}_{11\text{ lần}}\ge 20x^9$$

Tương tự đối với $\frac{y^{20}}{z^{11}};\frac{z^{20}}{x^{11}}$ ta có: $\sum_{cyc}\frac{x^{20}}{y^{11}}\ge\sum_{cyc}x^9$.(1)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM một lần nữa như sau:

$$x^9+\underbrace{\left(\frac{2001}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{2001}{3}\right)^9}_{8\text{ lần}}\ge 9x\left(\frac{2001}{3}\right)^8$$

Xây dựng tương tự đối với $y^9;z^9$ ta có: $\sum_{cyc}x^9\ge 9\left(\frac{2001}{3}\right)^8\sum_{cyc}x-24\left(\frac{2001}{3}\right)^9=3\left(\frac{2001}{3}\right)^9$ (2)

Từ (1)&(2) suy ra $F\ge 3\left(\frac{2001}{3}\right)^9$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2001}{3}$.

Problem 4: (Nguyễn Anh Khoa)

Cho a,b,c dương và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{2a}{a+c^2}\ge\frac{1}{2}\left(9-\sum_{cyc}c^3b\right)$$

Solution:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\sum_{cyc}\frac{2a}{a+c^2}\ge\frac{1}{2}\left(9-\sum_{cyc}\frac{c^3b}{abc}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2a}{a+c^2}\ge\frac{9}{2}-\sum_{cyc}\frac{c^2}{2a}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2a}{a+c^2}+\sum_{cyc}\frac{c^2+a}{2a}\ge 6$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{2a}{a+c^2}+\sum_{cyc}\frac{a+c^2}{2a}\ge 6.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

2. *Kĩ thuật AM-GM ngược dấu:*

Ta xét bài toán đơn giản sau:

Problem 5: (Sưu tầm).

Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$$

Solution:

Ta không thể dùng trực tiếp BĐT AM-GM với mẫu số vì khi đó BĐT sẽ đổi chiều:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a}\le\frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a}\ge\frac{3}{2}??$$

Để giải bài toán này ta sẽ dùng một ý tưởng từ một đẳng thức quen thuộc $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau:

$$a-\frac{a}{1+b^2}+b-\frac{b}{1+c^2}+c-\frac{c}{1+a^2}\le a+b+c-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab^2}{1+b^2}+\frac{bc^2}{1+c^2}+\frac{ca^2}{1+a^2}\le\frac{3}{2}$$

Ta sử dụng BĐT AM-GM dưới mẫu số ta được:

$$\frac{ab^2}{1+b^2}+\frac{bc^2}{1+c^2}+\frac{ca^2}{1+a^2}\le\frac{ab^2}{2b}+\frac{bc^2}{2c}+\frac{ca^2}{2a}=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\le\frac{1}{2}\left[\frac{(a+b+c)^2}{2}\right]=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problem 6: (Sưu tầm).

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Solution:

BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau:

$$a-\frac{a^2}{a^2+b^2}+b-\frac{b^3}{b^2+c^2}+c-\frac{c^3}{c^2+a^2}\le a+b+c-\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab^2}{a^2+b^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2}\le\frac{a+b+c}{2}$$

Ta sử dụng BĐT AM-GM dưới mẫu số:

$$\frac{ab^2}{a^2+b^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2}\le\frac{ab^2}{2ab}+\frac{bc^2}{2bc}+\frac{ca^2}{2ca}=\frac{a+b+c}{2}$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problem 7: (Sưu tầm).

Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$$

Solution:

BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau:

$$a+1-\frac{a+1}{b^2+1}+b+1-\frac{b+1}{c^2+1}+c+1-\frac{c+1}{a^2+1}\le a+1+b+1+c+1-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)b^2}{b^2+1}+\frac{(b+1)c^2}{c^2+1}+\frac{(c+1)a^2}{a^2+1}\le 3$$

Ta sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}+\frac{(b+1)c^2}{c^2+1}+\frac{(c+1)a}{a\ \ +1}\le\frac{(1+a)b}{2}+\frac{(1+b)c}{2}+\frac{(1+c)a}{2}=\frac{3+ab+bc+ca}{2}\le\frac{3+\frac{(a+b+c)^2}{3}}{2}=3$$

Problem 8: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b}{b+2c^2}+\frac{c}{c+2a^2}\ge 1$$

Solution:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\ge a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2(ab)^{2/3}}{3}.$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b+2c^2}\ge b-\frac{2(bc)^{2/3}}{3};\frac{c}{c+2a^2}\ge c-\frac{2(ac)^{2/3}}{3}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $\sum_{cyc}a-\frac{2}{3}\sum_{cyc}(ab)^{2/3}\ge 1\Leftrightarrow\sum_{cyc}(ab)^{2/3}\le 3$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sum_{cyc}(ab)^{2/3}\le\sum_{cyc}\frac{a+ab+b}{3}\le\sum_{cyc}\frac{2a}{3}+\sum_{cyc}\frac{(a+b+c)^2}{9}=3.$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problem 9: (Võ Duy Khanh)

Cho $a\ge b\ge c>0;n\ge 2$ dương và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^n}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^n}{c^2+ca+a^2}\ge 1$$

Lời giải:

VT của bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\sum_{cyc}\left(a^{n-2}-\frac{a^{n-2}b(a+b)}{a^2+ab+b^2}\right)\ge\sum_{cyc}\left(a^{n-2}-\frac{a^{n-2}b(a+b)}{3ab}\right)=\sum_{cyc}\left(\frac{2}{3}a^{n-2}-\frac{1}{3}a^{n-3}b\right)(1)$$

Do hai dãy $\left(a^{n-3},b^{n-3},c^{n-3}\right);\left(a,b,c\right)$ là đơn điệu tăng nên theo bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a^{n-3}.a+b^{n-3}.b+c^{n-3}.c\ge a^{n-3}b+b^{n-3}c+c^{n-3}a\,(2)$$

Từ (1)&(2) suy ra $\sum_{cyc}\frac{a^n}{a^2+ab+b^2}\ge\sum_{cyc}\frac{a^{n-2}}{3}\ge\frac{3\sqrt[3]{(abc)^{n-2}}}{3}=1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Attention: *Nội dung bất đẳng thức hoán vị như sau:*

Cho $2n$ số thực $\left(a_1,a_2,...a_n\right);\left(b_1,b_2,...b_n\right)$ đơn điệu tăng:

Ta gọi $A=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$; $B=a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$; $C=a_1x_{i_1}+a_2x_{i_2}+...+a_nx_{i_n}$ (trong đó $\left(i_1,i_2,...i_n\right)$ là hoán vị bất kì của $\left(1,2,...n\right)$).

Khi đó ta có: $A\ge C\ge B\,(*)$.

Nếu hai dãy đã cho đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức (*) đổi chiều

Bất đẳng thức Chebyshev là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức hoán vị.

4. Kĩ thuật sử dụng phép thế và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

> Problem 10: (Sưu tầm).
>
> Cho a,b,c dương và $abc=1$. Chứng minh rằng:
>
> $$\sum_{cyc}\frac{1}{a(a+1)}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải:

Do $abc=1$ nên tồn tại các số dương x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{z(z+x)}\ge\frac{3}{2}.$$

Ta có: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{x^2}{z(z+x)}=\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{x}{z}\right)^2}{1+\frac{x}{z}}\ge\frac{\left(\sum_{cyc}\frac{x}{z}\right)^2}{3+\sum_{cyc}\frac{x}{z}}$.

Ta cần chứng minh: $\displaystyle\frac{\left(\sum_{cyc}\frac{x}{z}\right)^2}{3+\sum_{cyc}\frac{x}{z}}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow2\left(\sum_{cyc}\frac{x}{z}\right)^2\ge3\left(3+\sum_{cyc}\frac{x}{z}\right)\Leftrightarrow2\sum_{cyc}\frac{x^2}{z^2}+\sum_{cyc}\frac{x}{z}\ge9$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problem 11: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}\ge 1$$

Lời giải:

Do $abc=1$ nên tồn tại các số dương x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\ge 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\ge\frac{\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2}{\sum_{cyc}x^4+\sum_{cyc}x^2y^2+\sum_{cyc}x^2yz}.(1)$$

Lại có: $\sum_{cyc}x^2yz\le\sum_{cyc}x^2y^2$. Do đó: $(1)\ge\frac{\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2}{\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2}=1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problem 12: (Sưu tầm).

Cho a,b,c,d dương và $r^4=abcd\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc(a,b,c,d)}\frac{ab+1}{a+1}\ge\frac{4(1+r^2)}{1+r}$$

Lời giải:

Do $abcd=r^4\ge 1$ nên tồn tại các số dương x,y,z,t sao cho: $a=\frac{ry}{x};b=\frac{rz}{y};c=\frac{rt}{z};d=\frac{rx}{t}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum_{cyc}\frac{r^2z+x}{ry+x}\ge\frac{4(1+r^2)}{1+r}.$$

Xét hai biểu thức: $A=\sum_{cyc}\frac{x+z}{ry+x};B=\sum_{cyc}\frac{x}{rt+z}$. Ta phải chứng minh: $A+(r^2-1)B\ge\frac{4(1+r^2)}{1+r}$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4r.\sum_{cyc(x,y,z,t)} xy+8(xz+yt)=4(r-1)(x+z)(y+t)+4(x+z)(y+t)+8(xz+yt)$$

$$\Rightarrow 4r.\sum_{cyc(x,y,z,t)} xy+8(xz+yt)\le (r-1)(x+y+z+t)^2+2(x+y+z+t)^2=(r+1)(x+y+z+t)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$A=(x+z)\left(\frac{1}{ry+x}+\frac{1}{rt+z}\right)+(y+t)\left(\frac{1}{rx+y}+\frac{1}{rz+t}\right)\ge \frac{4(x+z)}{x+z+ry+rt}+\frac{4(y+t)}{y+t+rx+rz}$$

$$\ge \frac{4(x+y+z+t)^2}{(x+z)^2+(y+t)^2+2r(x+z)(y+t)}\ge \frac{8}{r+1}$$

$$B\ge \frac{(x+y+z+t)^2}{z(ry+x)+t(rz+y)+x(rt+z)+y(rx+t)}\ge \frac{(x+y+z+t)^2}{r(xy+yz+zt+tx)+2(xz+yt)}\ge \frac{4}{r+1}$$

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=r$.

Problem 13: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương và $\sum_{cyc}\frac{1}{1+a}=2$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a}\ge 4\sum_{cyc} a$$

Lời giải:

Điều kiện đã cho tương đương với việc tồn tại các số x,y,z dương sao cho :

$$a=\frac{x}{y+z};b=\frac{y}{x+z};c=\frac{z}{x+y}.$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\sum_{sym}\frac{x}{y}\ge 4\left(\sum_{cyc}\frac{x}{y+z}\right).$$

Bất đẳng thức đã chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

Trong quá trình chứng minh các bài toán bất đẳng thức có khi ta cũng làm sử dụng một thủ thuật ngược với phép thế. Thủ thuật đó thể hiện qua bài toán sau:

Problem 14: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải:

VT của bất đẳng thức tương đương với:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}=\sum_{cyc}\frac{\frac{a}{b}}{\sqrt{\frac{a}{b}+1}}\ge\frac{\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}{\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b}+1}}.(1)$$

Đặt $x=\frac{a}{b};y=\frac{b}{c};z=\frac{c}{a}\Rightarrow xyz=1$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow\frac{\left(\sum_{cyc}\sqrt{x}\right)^2}{\sum_{cyc}\sqrt{x+1}}\ge\frac{\sum_{cyc}x+2\sum_{cyc}\sqrt{xy}}{\sqrt{3\left(\sum_{cyc}x+3\right)}}\ge\frac{\sum_{cyc}x+6}{\sqrt{3\left(\sum_{cyc}x+3\right)}}$.

Do đó: $\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}\ge\frac{S+3}{\sqrt{3S}}\left(S=\sum_{cyc}x+3\ge 6\right)$. Sử dụng điểm rơi ta có:

$$\sqrt{S}+\frac{3}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{S}}{2}+\left(\frac{\sqrt{S}}{2}+\frac{3}{\sqrt{S}}\right)\ge\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{S+3}{\sqrt{3S}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

5. <u>Kĩ thuật chọn phần tử lớn nhất</u>:

> ***<u>Problem 15:</u>*** (Sưu tầm)
>
> Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:
>
> $$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

<u>Solution:</u>

Do BĐT có tính hoán vị vòng quanh nên ta giả sử: $a=\max(a,b,c)$. Ta đưa BĐT cần chứng minh về dạng sau:

$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)}+\frac{b(c-a)}{a(a+b)}+\frac{c(a-b)}{b(b+c)}\ge 0$$

Ta chia ra thành 2 trường hợp sau:

TH1: $a\ge b\ge c>0$. Khi đó ta có:

$$a(b-c)\ge 0;c(c+a)\le a(a+b)$$

$$c(a-b)\ge 0;b(b+c)\le a(a+b)$$

Suy ra: $\frac{a(b-c)}{c(c+a)}\ge\frac{a(b-c)}{a(a+b)}$ và $\frac{c(a-b)}{b(b+c)}\ge\frac{c(a-b)}{a(a+b)}$. Do đó:

$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)}+\frac{b(c-a)}{a(a+b)}+\frac{c(a-b)}{b(b+c)}\ge\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{a(a+b)}=0$$

TH2: $a\ge c\ge b>0$. Khi đó ta có:

$$a(b-c)\le 0;c(c+a)\ge b(b+c)$$

$$c(a-b)\le 0;a(a+b)\ge b(b+c)$$

Suy ra: $\frac{a(b-c)}{c(c+a)}\ge\frac{a(b-c)}{b(b+c)}$ và $\frac{b(c-a)}{a(a+b)}\ge\frac{b(c-a)}{b(b+c)}$.Do đó:

$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)}+\frac{b(c-a)}{a(a+b)}+\frac{c(a-b)}{b(b+c)}\geq\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{b(b+c)}=0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Comment 2: *Bài toán trên khá hay và cách giải trên là ngắn gọn và dễ hiểu nhất. Ngoài ra còn có 2 cách giải như sau:*

C1: Sử dụng phép thế. BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{b}{c}\frac{a}{c+a}+\frac{c}{a}\frac{b}{a+b}+\frac{a}{b}\frac{c}{b+c}\geq\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+b}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{c}\frac{1}{\frac{c}{a}+1}+\frac{c}{a}\frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{a}{b}\frac{1}{\frac{b}{c}+1}\geq\frac{1}{\frac{c}{a}+1}+\frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{1}{\frac{b}{c}+1}$$

Đặt $x=\frac{a}{b};y=\frac{b}{c};z=\frac{c}{a}\Rightarrow xyz=1$. *BĐT trở thành:*

$$\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1}+\frac{x}{y+1}\geq\frac{1}{z+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow y(x+1)(y+1)+z(y+1)(z+1)+x(z+1)(x+1)\geq(x+1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow(xy^2+yz^2+zx^2)+(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)+3$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x+y+z)+(xy^2+yz^2+zx^2-3)\geq0$$

Sử dụng BĐT Cauchy $xy^2+yz^2+zx^2\geq3\sqrt[3]{(xyz)^3}=3$. *Ta suy ra đpcm.*

C2: Sử dụng phương pháp đánh giá tổng các phân thức- phép thế.

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\left[\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{c}{c+a}\right]+\left[\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{a}{a+b}\right]+\left[\frac{ca}{b(b+c)}+\frac{b}{b+c}\right]\geq3$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab+c^2}{c(c+a)}+\frac{bc+a^2}{a(a+b)}+\frac{ca+b^2}{b(b+c)}\geq3$$

Sử dụng BĐT Cauchy tức là ta phải chứng minh:

$$(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2)\geq abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

Chia hai vế cho $(abc)^3$ *ta được BĐT trở thành:*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{a}\right)\geq\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

Đặt $x=\frac{a}{b};y=\frac{b}{c};z=\frac{c}{a}\Rightarrow xyz=1$. *BĐT cần chứng minh trở thành:*

$$(x+y)(y+z)(x+z)\geq(1+x)(1+y)(1+z)$$

Còn lại bạn đọc tự chứng minh.

Problem 16: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-b}{\sqrt{b+c}}+\frac{b-c}{\sqrt{c+a}}+\frac{c-a}{\sqrt{a+b}}\geq0$$

Solution:

Giả sử $a=\max(a,b,c)$,ta xét các trường hợp sau:
TH1: $a\ge b\ge c>0$. Khi đó ta có:

$$a-b\ge 0;\sqrt{b+c}\le\sqrt{a+b}$$

$$b-c\ge 0;\sqrt{c+a}\le\sqrt{a+b}$$

Do đó: $\dfrac{a-b}{\sqrt{b+c}}\ge\dfrac{a-b}{\sqrt{a+b}}$ và $\dfrac{b-c}{\sqrt{c+a}}\ge\dfrac{b-c}{\sqrt{a+b}}$

Suy ra : $\dfrac{a-b}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b-c}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c-a}{\sqrt{a+b}}\ge\dfrac{a-b+b-c+c-a}{\sqrt{a+b}}=0$

TH2: $a\ge c\ge b>0$. Khi đó ta có:

$$b-c\le 0;\sqrt{c+a}\ge\sqrt{b+c}$$

$$c-a\le 0;\sqrt{a+b}\ge\sqrt{b+c}$$

Do đó: $\dfrac{b-c}{\sqrt{c+a}}\ge\dfrac{b-c}{\sqrt{b+c}}$ và $\dfrac{c-a}{\sqrt{a+b}}\ge\dfrac{c-a}{\sqrt{b+c}}$

Suy ra: $\dfrac{a-b}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b-c}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c-a}{\sqrt{a+b}}\ge\dfrac{a-b+b-c+c-a}{\sqrt{b+c}}=0$.

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Comment 3: Bạn đọc có thể tham khảo thêm cách giải sau đây:

Đặt $x=\sqrt{b+c};y=\sqrt{c+a};z=\sqrt{a+b}\,(x,y,z>0)$. *Khi đó ta có:*

$$a=\frac{y^2+z^2-x^2}{2};b=\frac{z^2+x^2-y^2}{2};c=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}$$

BĐT cần chứng minh trở thành: $\dfrac{y^2-x^2}{x}+\dfrac{z^2-y^2}{y}+\dfrac{x^2-z^2}{z}\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{z}+\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{z^2}{y}\ge x+y+z$. *Đến đây bạn đọc tự giải quyết việc còn lại.*

Problem 17: (Toán tuổi thơ)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$a(a-c)^2+b(b-c)^2\ge(a-c)(b-c)(a+b-c)$$

Solution:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $b\ge a\ge 0$. Khi đó ta viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$a(a-c)^2+b(b-c)^2\ge a(a-c)(b-c)+(a-c)(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow b(b-c)^2-(a-c)(b-c)^2\ge a(a-c)(b-c)-a(a-c)^2$$

$$\Leftrightarrow(b+c-a)(b-c)^2\ge a(a-c)(b-a)$$

Do $b+c-a\ge b-a\ge 0$ nên nếu $a-c\le 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Do đó ta chỉ cần xét trong trường hợp $a-c\ge 0\Leftrightarrow a\ge c\Rightarrow b\ge a\ge c\ge 0$. Ta có:

$$(b+c-a)(b-c)^2\ge(b+c-a)(b-c)(a-c).$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(b+c-a)(b-c) \ge a(b-a)$$
$$\Leftrightarrow (b+c-a)(b-c)-a(b-a) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow c(a-c)+(b-a)^2 \ge 0$$
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problem 18: (Toán tuổi thơ)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+2008}{b+2008}+\frac{b+2008}{c+2008}+\frac{c+2008}{a+2008}$$

Solution:

Bài toán này ta sẽ không sử dụng phương pháp chọn phần tử lớn nhất, nhỏ nhất mà sẽ sử dụng một phương pháp khác liên quan mật thiết này đó là phương pháp " Bán Schur- Bán S.O.S"

Giả sử $c=\min(a,b,c)$

BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau:
$$\frac{a-b}{b(b+2008)}+\frac{b-c}{c(c+2008)}+\frac{c-a}{a(a+2008)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[\frac{1}{b(b+2008)}-\frac{1}{a(a+2008)}\right]+(b-c)\left[\frac{1}{c(c+2008)}-\frac{1}{a(a+2008)}\right] \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2\frac{(a+b+2008)}{ab(a+2008)(b+2008)}+(b-c)(a-c)\frac{(a+c+2008)}{ac(a+2008)(c+2008)} \ge 0$$
BĐT trên đúng với các điều kiện đã giả sử ban đầu.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Comment 4: Có thể nói sử dụng phương pháp " bán Schur- bán S.O.S" để giải toán BĐT là khá hay. Tuy sức mạnh của phương pháp " bán Schur- bán S.O.S" không bằng phương pháp phân tích bình phương S.O.S.

Nhưng có thể nói phương pháp " bán Schur-bán S.O.S" là một mẫu mực khi đứng trước các bài toán về bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị.

Nội dung của phương pháp "Bán Schur – Bán S.O.S".

Khi đứng trước một bài toán BĐT đối xứng hay hoán vị ta tìm cách đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng sau: $M(a-b)^2+N(a-c)(b-c) \ge 0$

Với điều kiện giả sử $c=\min(a,b,c) \vee c=\max(a,b,c)$. *Nhiệm vụ của ta là chứng minh các hệ số M,N không âm hoặc dương.*

Về mặt lí thuyết là ta có thể đưa mọi BĐT đối xứng hay hoán vị bất kì về dạng bán schur- bán S.O.S. Nhưng trong thức hành thì ta cần dựa vào một số dạng phân tích tổng quát như sau:

Dạng tổng quát:

Giả sử BĐT cần chứng minh có dạng là:
$$(a-b)A(a,b,c)+(b-c)B(a,b,c)+(c-a)C(a,b,c) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)\left[A(a,b,c)-C(a,b,c)\right]+(b-c)\left[B(a,b,c)-C(a,b,c)\right] \ge 0$$
Sau đó tìm cách phân tích các biểu thức $A(a,b,c)-C(a,b,c); B(a,b,c)-C(a,b,c)$ *sao cho chứa các thừa số* $a-b; a-c$.

Đối với dạng căn thức thì ta có thể làm như sau sử dụng biểu thức liên hợp:

$$\sqrt{A(a,b,c).B(a,b,c)}-\sqrt{C(a,b,c).D(a,b,c)}=\frac{A(a,b,c).B(a,b,c)-C(a,b,c).D(a,b,c)}{\sqrt{A(a,b,c).B(a,b,c)}+\sqrt{C(a,b,c).D(a,b,c)}}$$

Sau đó ta mới bắt đầu tìm cách đưa về dạng chính tắc của bán schur- bán S.O.S.

Sau đây là một số phân tích thường dùng:

1.$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a-b)^2+(a-c)(b-c)$

2.$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a-b)^2+(a+b+c)(a-c)(b-c)$

3.$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc=2c(a-b)^2+(a+b)(a-c)(b-c)$

4.$ab^2+bc^2+ca\ \ -3abc=c(a-b)^2+b(a-c)(b-c)$

5.$a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)=\left[(a+b)^2+c^2\right](a-b)^2+\left[ab+(a+c)(b+c)\right](a-c)(b-c)$

6.$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)-2abc(a+b+c)=(a+c)(b+c)(a-b)^2+(2ab+ac+bc)(a-c)(b-c)$

7.$a^3b+b^3c+c^3a-abc(a+b+c)=(ac+cb)(a-b)^2+(a^2+ac)(a-c)(b-c)$

8.$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}$

9.$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}-6=\frac{2(a-b)^2}{ab}+\frac{(a+b)(a-c)(b-c)}{abc}$.

10.$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(a+b+2c)(a-c)(b-c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$

11.$\frac{a}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}=\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(a+b+c)(a+b+2c)(a-c)(b-c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$

6. <u>Phương pháp P,Q,R:</u>

Phần này ta thường sử dụng hằng đẳng thức và định lí sau:

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r.$$

Định lí: Cho hàm số: $f(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$.

$$*\ \ f(x)\ge 0,\forall x\in R\Leftrightarrow \Delta=b^2-4ac\le 0.$$

$$*\ \ f(x)\ge 0,\forall x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_{ct}\le 0(\vee b\ge 0)\\ f(0)\ge 0(\vee c\ge 0)\end{cases}\\ \begin{cases}x_{ct}\ge 0(\vee b\le 0)\\ f(x_{ct})\ge 0(\vee\Delta\le 0)\end{cases}\end{array}\right.$$

> ***<u>Problem 19:</u>*** (Sưu tầm)
>
> Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:
>
> $$a^2b+b^2c+c^2a\le 4$$

<u>Lời giải:</u>

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$2\sum_{cyc}a^2b\le 8\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^2b+\sum_{cyc}ab^2\right)+\left(\sum_{cyc}a^2b-\sum_{cyc}ab^2\right)\le 8$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2(b+c)+(a-b)(b-c)(c-a) \le 8 .(1)$$

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức torng trường hợp $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2(b+c)+\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} \le 8 .$$

Đổi biến theo p,q,r ta có: $pq-3r+\sqrt{p^2q^2+18pqr+-27r^2-4q^3-4p^3r} \le 8$.

$$\Leftrightarrow 36r^2+(4p^3-24pq+48)r+4q^3-16pq+64 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 9r^2+(39-18q)r+q^3-12q+16 \ge 0$$

Đặt $f(r)=9r^2+(39-18q)r+q^3-12q+16 \Rightarrow r_{ct}=\dfrac{18q-39}{18}$.

Dùng tiếp kĩ thuật chia để trị, xét hai trường hợp sau:

TH1: $0 \le q \le \dfrac{39}{18} \Rightarrow r_{ct} \le 0$.

$$f(0)=q^3-12q+16=(q+4)(q-2)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow f(r) \ge 0$.

TH2: $\dfrac{39}{18} \le r \le 3 \Rightarrow r_{ct} \ge 0$.

$$f(r_{ct})=24q^3-216q^2+648q-630 \ge 0; \forall q \in \left[\frac{39}{18},3\right].$$

$\Rightarrow f(r) \ge 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

__Problem 20:__ (Sưu tầm)

Cho a,b,c không âm và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} a^2b+2\sum_{cyc} ab^2 \le 6\sqrt{3}.$$

__Lời giải:__

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$2\sum_{cyc} a^2b+4\sum_{cyc} ab^2 \le 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^2(b+c)+\left(\sum_{cyc} ab^2-\sum_{cyc} ab^2\right) \le 12\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^2(b+c)+(a-b)(b-c)(c-a) \le 12\sqrt{3}(1)$$

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp: $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2(b+c)+\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} \le 12\sqrt{3}.$$

Đổi biến theo p,q,r ta có: $3(pq-3r)+\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r} \le 12\sqrt{3}$.

$$\Leftrightarrow 108r^2+(4p^3-72pq+216\sqrt{3})r+4q^3+8p^2q^2-72\sqrt{3}pq+432 \ge 0$$

Đặt

$$f(r)=108r^2+(4p^3-72pq+216\sqrt{3})r+4q^3+8p^2q^2-72\sqrt{3}pq+432 \Rightarrow r_{ct}=\frac{216q-108-216\sqrt{3}}{108}$$

Sử dụng kĩ thuật chia để trị, xét 2 trường hợp sau:

TH1: $0\le q\le \frac{216\sqrt{3}+108}{216}\Rightarrow r_{ct}\le 0$.

$$f(0)=(q+12+6\sqrt{3})(q+3-\sqrt{3})^2\ge 0.$$

$\Rightarrow f(r)\ge 0$.

TH2: $\frac{216\sqrt{3}+108}{216}\le q\le 3\Rightarrow r_{ct}\ge 0$.

$$f\left(r_{ct}\right)=4q^3-36q^2+108q+81-108\sqrt{3}\ge 0\left(\forall q\in\left[\frac{216\sqrt{3}+108}{216},3\right]\right).$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Comment 5: *Kĩ thuật trên khá mạnh trong việc chứng minh bất đẳng thức hoán vị có chứa dạng biểu thức* $a^nb+b^nc+c^na;ab^n+bc^n+ca^n\left(n\ge 2\right)$. *Tuy ý tưởng biến đổi về sử dụng kĩ thuật P,Q,R khá hay nhưng khối lượng tính toán lại quá lớn. Nên theo ý kiến của tác giả thì xét cho cùng việc sử dụng phương pháp P,Q,R trong một số bài toán hoán vị chưa phải là phương pháp tối ưu nhất. Tuy nhiên bạn đọc vẫn nên nắm rõ tư tưởng chứng minh này, dù sao nó vẫn là công cụ hỗ trỡ đắc lực cho chúng ta trong việc chứng minh bất đẳng thức hoán vị.*

Sau đây là một số bài toán tự luyện:

Problem 1:(Nguyễn Kim Cường) Cho a,b,c dương và $x,y,z\in R$. Chứng minh rằng:

1. $\sum_{cyc}\frac{a^{x+y+z}b^{-x+y-z}}{c^{-x+y+z}}\ge\sum_{cyc}\frac{a^xb^y}{c^z}$.
2. $\sum_{cyc}\frac{a^{2x+z}b^{-x+2y}}{c^{y+2z}}\ge\sum_{cyc}\frac{a^xb^y}{c^z}$.
3. $\sum_{cyc}\frac{a^{3x-y+z}b^{-x+3y+z}}{c^{x+y+3z}}\ge\sum_{cyc}\frac{a^xb^y}{c^z}$

Problem 2:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1.$$

Problem 3:(Phạm Kim Hùng) Cho a,b,c dương và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\ge\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}.$$

Problem 4:(Trần Tuấn Anh) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{b^2-c^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{c^2-a^2}{\sqrt{a+b}}\ge 0.$$

Problem 5:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{4}{27}\left(\sum_{cyc}a\right)^4\ge\sum_{cyc}a^3b+\sum_{cyc}a^2b^2+abc.\sum_{cyc}a.$$

PHỤ LỤC

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG S.O.S

A. <u>Lời giới thiệu</u>:
Ở các phần trước, một số bài tập trong lời giải tôi có sử dụng phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Đối với một số bạn có lẽ đã làm quen với phương pháp này thông qua cuốn "Sáng tạo bất đẳng thức" của tác giả Phạm Kim Hùng hoặc qua các tài liệu trên mạng. Tuy nhiên với các bạn chưa có điều kiện học tập thì việc tiếp cận phương pháp này là khá khó. Vì thế hôm nay tôi xin mạn phép được trích lại một số kết quả từ trước tới nay mà người ta thường sử dụng đối với phương pháp này.
B. <u>Kĩ thuật làm chặt bất đẳng thức</u>:
Chắc có bạn sẽ thắc mắc phần này có gì liên quan tới phương pháp trên. Nhưng thật ra vì ứng dụng hầu hết của phương pháp phân tích bình phương S.O.S là chứng minh những bất đẳng thức được làm chặt. Do đó mà tôi nghĩ nên đưa phần này ra trước để bạn đọc làm quen.
Mục này ta chỉ quan tâm đến bất đẳng thức đại số.
Ý tưởng của kĩ thuật làm chặt bất đẳng thức:
Giả sử ta có bất đẳng thức dạng : $A \le B$. Nếu có C sao cho $A \le C \le B$ thì ta nói bất đẳng thức thứ hai chặt (mạnh) hơn bất đẳng thức thứ nhất.
Ý tưởng trên tưởng chừng như đơn giản nhưng hầu hết các bất đẳng thức tạo nên từ ý tưởng này đều là bất đẳng thức khó thậm chí là rất khó. Ta có thể hình dung kĩ thuật trên thông qua ví dụ sau:
Problem 1: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3} \quad (1)$$

Việc chứng minh bất đẳng thức trên nói chung là không khó và ta không quan tâm đến việc chứng minh nó như thế nào mà ta chỉ xét xem bất đẳng thức chặt hơn (1) là bất đẳng thức nào.
Xuất phát từ ý tưởng $\sqrt{2(a^2+b^2)} \ge a+b$ ta xây dựng cho bộ các biến còn lại khi đó ta được bất đẳng thức :

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}+\sqrt{2(b^2+c^2)}+\sqrt{2(c^2+a^2)} \ge 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{cyc}\sqrt{2(a^2+b^2)}}{6} \ge \frac{a+b+c}{3} \quad (2)$$

Sau khi cho vài giá trị cụ thể các biến a,b,c ta nhận thấy vế trái của (1) lớn hơn vế trái của (2). Nên từ đó ta có bài toán sau:
Problem 2: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^2+bc+c^2} \ge \sum_{cyc}\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{6} \quad (3)$$

Ở đây ta có biểu thức $A=\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^2+bc+c^2}; B=\sum_{cyc}\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{6}; C=\frac{a+b+c}{3}$.

Ta lại có nhận xét sau: $\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \ge a+b$ tương tự ta xây dựng cho các bộ các biến còn lại ta có bất đẳng thức sau: $$\sum_{cyc}\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \ge 2(a+b+c) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{6} \ge \frac{a+b+c}{3} \quad (4)$$
Sau khi cho vài giá trị đặc biệt ta nhận thấy vết trái (1) lớn hơn vế trái (4) nên từ đó ta có bất đẳng thức sau:
Problem 3: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:
$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^2+bc+c^2} \ge \sum_{cyc}\frac{\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{6} \quad (5)$$
Rõ ràng các bất đẳng thức (3),(5) là chặt hơn bất đẳng thức (1) và việc chứng minh các bất đẳng thức này đã trở thành công việc khá khó (nhưng sẽ chẳng là gì nếu ta sử dụng phương pháp phân tích bình phương S.O.S)
* Chú ý: Tại (3),(5) xảy ra dấu bằng là bởi vì các bất đẳng thức được sử dụng để làm chặt (2),(4) có dấu bằng đạt tại tâm nên khi (3),(5) đúng thì dấu bằng chắc chắn sẽ xảy ra.
Ngoài ra một lớp các bất đẳng thức hiện nay được tạo ra từ "phép cộng ngược chiều". Như chẳng hạn bài toán sau:
Problem 4: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2.$$
Ta đã biết:
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge 1; \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le 1$$
Thực hiện phép cộng ngược chiều ta được Problem 4.
Trên đây là các ý tưởng sáng tạo bất đẳng thức dựa vào đó bạn đọc có thể tự tạo cho mình những bài toán bất đẳng thức đẹp.

C. <u>Cơ sở phương pháp phân tích bình phương S.O.S</u>:

Ta có một số định nghĩa và định lí sau:
Định nghĩa 1: Một hàm phân thức ba biến $F(a,b,c)$ được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau
$F(a,b,c)=F(x,y,z)$ đúng với mọi hoán vị (x,y,z) của (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi số thực dương x mà
$F(x,x,x)=0$ thì $F(a,b,c)$ được gọi là hàm đối xứng ba biến chuẩn.
Định nghĩa 2: Hàm nữa đối xứng ba biến. Một hàm phân thức ba biến $G(a,b,c)$ được gọi là nửa đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $G(a,b,c)=G(a,c,b)$ đúng với mọi bộ ba số thực dương (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi cặp hai số thực dương x,y mà $G(x,y,y)=0$ thì $G(a,b,c)$ được gọi là hàm nửa đối xứng ba biến chuẩn.
Định lí 1: (Biểu diễn cơ sở đối với lớp hàm đa thức). Giả sử $F(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng ba biến chuẩn thì tồn tại một đa thức nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng.
$$F(a,b,c)=G(a,b,c)(b-c)^2+G(b,c,a)(c-a)^2+G(c,a,b)(a-b)^2$$
Hệ quả 1: (Biểu diễn cơ sở với phân thức). Giả sử rằng $M(a,b,c);N(a,b,c)$ là hai đa thức nửa đối xứng ba biến, hơn nữa với mọi số thực dương x thì phân số $\dfrac{M(x,x,x)}{N(x,x,x)}$ là một hằng số t nào đó. Khi đó tồn tại hàm số nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng.

$$F(a,b,c)=\frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)}+\frac{M(b,c,a)}{N(b,c,a)}+\frac{M(c,a,b)}{N(c,a,b)}-3t=G(a,b,c)(b-c)^2+G(b,c,a)(c-a)^2+G(c,a,b)(a-b)^2.$$

Bổ đề 4: (Biểu diễn chính tắc). Giả sử a, b, g là hữu tỉ có tổng bằng $3k$, khi đó tồn tại biểu diễn cơ sở cho biểu thức.

$$f_k(a,b,c)=\sum_{sym} a^{a'}b^{b'}c^{g'}-6a^kb^kc^k$$

Trong đó tổng lấy trên tất cả các hoán vị (a', b', g') của (a, b, g).

Định lí S.O.S:

Xét biểu thức $S=f(a,b,c)=S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2$

Trong đó S_a, S_b, S_c là các hàm số của a,b,c.

1. Nếu $S_a, S_b, S_c \ge 0$ thì $S \ge 0$
2. Nếu $a \ge b \ge c$ và $S_b, S_b+S_c, S_b+S_a \ge 0$ thì $S \ge 0$
3. Nếu $a \ge b \ge c$ và $S_a, S_c, S_a+2S_b, S_c+2S_b \ge 0$ thì $S \ge 0$
4. Nếu $a \ge b \ge c$ và $S_b, S_c \ge 0, a^2S_b+b^2S_a \ge 0$ thì $S \ge 0$
5. Nếu $S_a+S_b+S_c \ge 0$ và $S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a \ge 0$ thì $S \ge 0$

Ngoài ra để $S \ge 0$ với mọi $a,b,c \ge 0$ thì ta phải có: $S_a+S_b|_{a=b} \ge 0, S_b+S_c|_{b=c} \ge 0, S_c+S_a|_{c=a} \ge 0$ trong đó $S_a+S_b|_{a=b} \ge 0$ có nghĩa là ta xét biểu thức S_a+S_b khi $a=b$. Với các bài toán đối xứng ta có ngay $S_a=S_b$ nếu $a=b$. Nhận xét này rất quan trọng trong các bài toán tìm hằng số tốt nhất.

Sau đây là một số đẳng thức thường dùng trong phân tích:

1.$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

2.$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}$

3.$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2$

4.$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

5.$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{2}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

6.$(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$

7.$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

8.$\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)=\frac{(a-b)^2}{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}$

9.$a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2\left((a+b)^2+c^2\right)+(b-c)^2\left((b+c)^2+a^2\right)+(c-a)^2\left((c+a)^2+b^2\right)\right]$

10.$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{2(a+b)(a+c)}+\frac{(c-a)^2}{2(b+c)(b+a)}$

* Chú ý: phương pháp phân tích trên là không duy nhất.

Ta có thể hiểu "nôm na" phương pháp phân tích bình phương S.O.S như sau:

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ trong đó ta đã biết hoặc chứng minh được:

$$\begin{cases} A \geq C \\ B \geq C \end{cases} \vee \begin{cases} A \leq C \\ B \leq C \end{cases}$$

Khi đó thay vì ta chứng minh bất đẳng thức đã cho ta qui về chứng minh bất đẳng thức:

$A - C \geq B - C$ (1) hoặc $C - A \leq C - B$ (2)

Lợi ích của phương pháp này là: Do các vế của bất đẳng thức (1) , (2) đều không âm (thông thường là các đại lượng bình phương đủ). Khi đó việc ta cần làm là so sánh các hệ số của các đại lượng không âm đó với nhau.

D. <u>Một số bài toán không cần sử dụng tiêu chuẩn</u>:

<u>Problem 1:</u> (Trần Nam Dũng)

Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

<u>Lời giải:</u>

* Ta nhận thấy hai vế đều lớn hơn hoặc bằng 3/2.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 \geq \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{cyc} (a-b)^2}{ab + bc + ca} \geq \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$$

Đưa bất đẳng thức về dạng chính tắc: $S_a (b-c)^2 + S_b (c-a)^2 + S_c (a-b)^2 \geq 0$

Trong đó:

$$S_a = \frac{a^2}{(b+a)(c+a)} > 0$$

$$S_b = \frac{b^2}{(b+a)(b+c)} > 0$$

$$S_c = \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} > 0$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

<u>Problem 2:</u> (Sưu tầm)

Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b} + \sum_{cyc} a \geq 2 \sqrt{3 . \sum_{cyc} a^2}$$

<u>Lời giải:</u>

Ta nhận thấy hai vế của bất đẳng thức đều lớn hơn hoặc bằng: $2(a+b+c)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}-\sum_{cyc}a \ge 2\sqrt{3.\sum_{cyc}a^2}-2\sum_{cyc}a$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b} \ge 2.\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{\sqrt{3.\sum_{cyc}a^2}+\sum_{cyc}a}$$

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng chính tắc: $S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$.

$$S_a=\frac{1}{c}-\frac{2}{\sqrt{3.\sum_{cyc}a}+\sum_{cyc}a} \ge \frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{a+b}{c(a+b+c)}>0$$

Trong đó: $S_b=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{\sqrt{3.\sum_{cyc}a^2}+\sum_{cyc}a} \ge \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b+c}=\dfrac{b+c}{a(a+b+c)}>0$

$$S_c=\frac{1}{b}-\frac{2}{\sqrt{3.\sum_{cyc}a^2}+\sum a} \ge \frac{1}{b}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{a+c}{b(a+b+c)}>0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Sau đây là một số bài tự luyện dành cho bạn đọc bước đầu làm quen với phương pháp này.

Problem 3: (Crux 2290)

Cho a,b,c ***dương. Chứng minh rằng:*** $\left(\prod_{cyc}(a+b)\right)^2 \ge abc.\prod_{cyc}(2a+b+c)$.

Problem 4: (Sưu tầm)

Cho a,b,c ***dương. Chứng minh rằng:*** $\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+\sum_{cyc}a^2b^2 \ge 2\sum_{sym}a^3b$.

Problem 5:(Sưu tầm)

Cho a,b,c ***dương. Chứng minh rằng:*** $\sum_{cyc}a^2.\sum_{cyc}\frac{1}{a^2}+15 \ge 4\sum_{sym}\frac{a}{b}$.

Problem 6:(Sưu tầm)

Cho a,b,c ***dương. Chứng minh rằng:*** $\sum_{cyc}a^2.\sum_{cyc}\frac{1}{a^2}+27 \ge 4\sum_{cyc}a.\sum_{cyc}\frac{1}{a}$.

Problem 7:(Sưu tầm)

Cho a,b,c ***dương. Chứng minh rằng:***

1. $\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}a \ge \sqrt{3.\sum_{cyc}a^2}$

2. $\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}+\sum_{cyc}a \ge \frac{3}{2}\sqrt{3.\sum_{cyc}a^2}$.

E. <u>Một số bài toán sử dụng tiêu chuẩn</u>:

<u>Problem 3:</u> (Bất đẳng thức Schur)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}a^3+3abc \ge \sum_{cyc}ab.\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Lời giải:

Đây là bài toán mà phần trước mà ta đã đề cập tới. Bây giờ ta sẽ giải quyết bài toán này bằng phương pháp S.O.S .

Ta nhận thấy hai vế bất đẳng thức đều lớn hơn hoặc bằng $\sum_{cyc} ab(a+b)$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} ab(a+b) \ge \sum_{cyc} ab\sqrt{2(a^2+b^2)} - \sum_{cyc} ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a+b-c)(a-b)^2}{2} \ge \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}$$

Đưa bất đẳng thức về dạng chính tắc : $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$.

$$S_a = \frac{(b+c-a)}{2} - \frac{bc}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+b+c}$$

Trong đó: $S_b = \dfrac{c+a-b}{2} - \dfrac{ca}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+a+c}$

$$S_c = \frac{a+b-c}{2} - \frac{ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó:

$$S_b = \frac{(c+a-b)\left(\sqrt{2(a^2+c^2)}+a+c\right)-2ac}{2\left(\sqrt{2(a^2+c^2)}+a+c\right)} \ge \frac{2(c+a-b)(a+c)-2ac}{2\left(\sqrt{2(a^2+c^2)}+a+c\right)} \ge 0 \left(c+a-b \ge c; a+c \ge a\right)$$

$$S_c = \frac{(a+b-c)\left(\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b\right)-2ab}{2\left(\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b\right)} \ge \frac{2(a+b-c)(a+b)-2ab}{2\left(\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b\right)} \ge 0 \left(a+b-c \ge a; a+b \ge b\right)$$

$\Rightarrow S_b + S_c \ge 0$

Ta chứng minh :

$$S_a + S_c = 2b - \frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b} - \frac{2bc}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+b+c} \ge 2b\left[1 - \frac{a}{2(a+b)} - \frac{c}{2(b+c)}\right] = b\left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c}\right) \ge 0 .$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \vee a=b, c=0$ và các hoán vị.

Problem 4: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2$$

Lời giải:

Như đã nói ở phần trước bất đẳng thức trênđược tạo ra nhờ phép cộng ngược chiều. Ta sẽ chứng minh nó bằng phương pháp S.O.S:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sum_{cyc} a^2}{\sum_{cyc} ab} - 1 \ge 1 - \frac{8abc}{\prod_{cyc}(a+b)} \Leftrightarrow \frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{\sum_{cyc} ab} \ge \frac{\sum_{cyc} 2c(a-b)^2}{\prod_{cyc}(a+b)}.$$

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng chính tắc: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$.

Trong đó:

$$S_a = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2b = b+c-a - \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

$$S_b = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2b = a+c-b - \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

$$S_c = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2c = a+b-c - \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó dễ thấy $S_b, S_c \ge 0 \Rightarrow S_b + S_c \ge 0$.

Ta chứng minh: $S_a + S_c = 2c - \dfrac{2abc}{ab+bc+ca} = \dfrac{2c^2(a+b)}{ab+bc+ca} \ge 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \vee a=b, c=0$ và các hoán vị.

Comment 1: *Bài toán đặt ra là tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a,b,c không âm.*

$$k.\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 1+k.$$ *(Sẽ được xét ở phần sau)*

Problem 5: (Sưu tầm)

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b} \ge \frac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải:

Ta thấy hai vế của bất đẳng thức đều lớn hơn hoặc bằng: $\sum_{cyc} a$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b} - \sum_{cyc} a \ge \frac{3.\sum_{cyc} a^3}{\sum_{cyc} a^2} - \sum_{cyc} a \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \ge \sum_{cyc} \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Đưa bất đẳng thức chứng minh về dạng chính tắc: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$.

Trong đó:

$$S_a = \frac{b^2+a^2}{c} - b$$

$$S_b = \frac{c^2+b^2}{a} - c.$$

$$S_c = \frac{a^2+c^2}{b} - a$$

Do bất đẳng thức có tính hoán vị ta xét hai trường hợp:

* $a \ge b \ge c$. Khi đó ta có: $S_a, S_c \ge 0$. Ta chứng minh: $S_a + 2S_b \ge 0; S_c + 2S_b \ge 0$ cả hai bất đẳng thức này chứng minh không khó, dành cho bạn đọc.
* $a \le b \le c$. Khi đó ta có: $S_b, S_c \ge 0$. Dễ dàng chứng minh: $S_a + S_b \ge 0$.
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.
Bây giờ ta sẽ xét một số bài toán với yêu cầu là tìm hằng số k để bất đẳng thức thoả mãn một đềi kiện nào đó. Ta bắt đầu với bài toán sau:

Problem 6: (Nguyễn Anh Khoa)
Tìm hằng số dương k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$k.\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 1 + k.$$

ở đây a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Lời giải:
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$k.\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1\right) \ge 1 - \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow k.\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{\sum_{cyc} c(a-b)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Đưa bất đẳng thức về dạng chính tắc: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$.
Trong đó các hệ số được xác định bởi:

$$S_a = k(a+b)(b+c)(c+a) - a(ab+bc+ca)$$

$$S_b = k(a+b)(b+c)(c+a) - b(ab+bc+ca)$$

$$S_c = k(a+b)(b+c)(c+a) - c(ab+bc+ca)$$

ĐK cần: Lấy $b = c$, ta có $S_b = S_c$. Để bất đẳng thức đúng thì phải có:

$$S_b + S_c\,|_{b=c} = 2S_b \ge 0 \Leftrightarrow k \ge \frac{2ab+b^2}{2(a+b)^2}$$

Mặt khác $\max f(a,b) = \frac{1}{2}$. Từ đây ta suy ra giá trị tốt nhất của k là $\frac{1}{2}$.

ĐK đủ: Với $k = \frac{1}{2}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow S_a \le S_b \le S_c$.

$$S_b = (ab+bc+ca)\frac{(a+c-b)}{2} - \frac{abc}{2} \ge 0 \left(a+c-b \ge c\right)$$

$$S_c = (ab+bc+ca)\frac{(a+b-c)}{2} - \frac{abc}{2} \ge 0 \left(a+b-c \ge a\right)$$

$$\Rightarrow S_b + S_c \ge 0$$

$$S_a + S_b = (a+b)(b+c)(c+a) - (a+b)(ab+bc+ca) = (a+b)c^2 \ge 0.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $a, b, c \ge 0 \Leftrightarrow k \ge \frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \vee a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Problem 7: (Bùi Việt Anh)

Tìm hằng số dương k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+k.\frac{abc}{(a+b+c)^3}\ge 3+\frac{k}{27}$$

ở đây a,b,c là các số thực không âm tuỳ ý.

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-3\ge k\left(\frac{1}{27}-\frac{abc}{(a+b+c)^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)\sum_{cyc}(a-b)^2}{2abc}\ge k.\frac{(a+b+7c)\sum_{cyc}(a-b)^2}{54(a+b+c)^3}$$

Đưa bất đẳng thức về dạng chính tắc: $S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$.

Trong đó các hệ số được xác định bởi:

$$S_a=27(a+b+c)^4-kabc(7a+b+c)$$

$$S_b=27(a+b+c)^4-kabc(a+7b+c)$$

$$S_c=27(a+b+c)^4-kabc(a+b+7c)$$

ĐK cần: Lấy $b=c$, ta có: $S_b=S_c$. Để bất đẳng thức đúng thì ta phải có:

$$S_b+S_c\,|_{b=c}=2S_b\ge 0\Leftrightarrow k\le\frac{27(a+2b)^4}{ab^2(a+8b)}$$

Mặt khác $\min f(a,b)=\frac{729}{4}$. Từ đó suy ra giá trị tốt nhất của k là $\frac{729}{4}$.

ĐK đủ: Với $k=\frac{729}{4}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow S_a\le S_b\le S_c$.

$$S_b=4(a+b+c)^4-27abc(a+7b+c)\ge 27abc(4a+4b+4c-a-7b-c)=27abc(3a-3b+3c)\ge 0$$

$$S_c=4(a+b+c)^4-27abc(a+b+7c)\ge 27abc(4a+4b+4c-a-b-7c)=27abc(3a+3b-3c)\ge 0$$

$$\Rightarrow S_b+S_c\ge 0$$

$$S_a+S_b=4(a+b+c)^4-27abc(4a+4b+c)\ge 27abc(4a+4b+4c-4a-4b-c)\ge 0.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $a,b,c\ge 0\Leftrightarrow k\le\frac{729}{4}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Sau đây là một số bài tập tự luyện:

Problem 1:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\ge\frac{5}{3}$$

Problem 2:(Sưu tầm) Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

1. $$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{21}{2(a^2+b^2+c^2)+5(ab+bc+ca)}$$

2. $\dfrac{1}{8a^2+7ab+8b^2}+\dfrac{1}{8b^2+7bc+8c^2}+\dfrac{1}{8c^2+7ca+8a^2}\geq\dfrac{27}{23(a+b+c)^2}$

Problem 2:(Phạm Kim Hùng) Tìm hằng số dương k để bất đẳng thức sau luôn đúng với $a,b,c\geq 0$:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+k.\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 8+k$$

ĐS: $k\leq 4\sqrt{2}$

Problem 4:(Sưu tầm) Tìm hằng số dương k để bất đẳng thức sau đúng với $a,b,c\geq 0$:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k.\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq k+\frac{3}{2}$$

ĐS: $k\leq\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Lưu ý: Các bài toán trên chỉ là những bài đơn giản giúp những bạn mới lần đầu tiếp cận phương pháp S.O.S. Phương pháp này rất mạnh đối với bài toán bất đẳng thức đối xứng 3 biến dạng đa thức, phân thức, không có căn thức (vẫn có trường hợp ngoại lệ cụ thể Problem 2), hầu hết các bất đẳng thức loại này đều phải "chịu thua" trước sức mạnh của nó. Để nắm rõ và điêu luyện phương pháp này bạn đọc nên tham khảo thêm trong sách "Sáng tạo bất đẳng thức" của tác giả Phạm Kim Hùng hoặc truy cập vào các trang web được giới thiệu ở phần mục lục.

Lời kết: Bất đẳng thức quả là một thế giới đẹp đẽ biết bao, càng đi sâu vào nó ta mới cảm nhận hết được những vẻ đẹp mà nó mang lại. Như các bạn đã biết bất đẳng thức là một phần rất rộng và có khá nhiều đề tài hấp dẫn chưa được nghiên cứu. Cũng vì lí do đó và đồng thời tôi đang học lớp 10 nên kiến thức có hạn khó tránh khỏi những sai sót, mặc dù đã rất cố gắng hoán thành bài viết trong thời gian ngắn nhất. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự đóng góp ý kiến chân thành của bạn đọc đối với bài viết này.