Kỹ thuật Cauchy bất đối

Võ Quốc Bá Cẩn - Phạm Thị Hằng
Trường Đại học Y Dược Cần Thơ
E-mail: can_hang2007@yahoo.com

Lĩnh vực bất đẳng thức là một lĩnh vực được quan tâm nhiều nhất ở toán sơ cấp. Trong đó, các dạng bài toán đối xứng hoặc hoán vị là những dạng thường gặp nhất ở lỉnh vực này. Trong bài viết trước, chúng tôi đã giới thiệu cùng các bạn kỹ thuật CYH, một kỹ thuật rất hay và mạnh để giải quyết các dạng toán này. Ý tưởng của kỹ thuật là đưa một bất đẳng thức hoán vị (đối xứng) ban đầu về một bất đẳng thức hoán vị (đối xứng) khác nhưng dễ chứng minh hơn. Đây cũng là điều mà mọi người hay làm khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz-Holder. Thế nhưng, đã bao giờ các bạn thử dùng Cauchy Schwarz-Holder để đưa một bài toán từ đối xứng sang bất đối chưa? Đối với phần đông các bạn đam mê bất đẳng thức, hầu hết đều chưa thử qua với việc này, vì nó làm mất tính tính đối xứng của bài toán (một tính chất rất quan trọng có thể được ứng dụng để giải được nhiều bài toán). Tuy nhiên, tồn tại một kỹ thuật như thế, mặc dù ta đưa bài toán về không đối xứng nữa nhưng ta vẫn có thể giải được bài toán, đó là "Kỹ thuật Cauchy bất đối". Đây là một tìm tòi nhỏ của chúng tôi về những kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức kinh điển. Rất mong nhận được sự trao đổi, đóng góp ý kiến của các bạn.

Kỹ thuật của chúng ta chỉ có một ý tưởng đơn giản là sắp xếp thứ tự của các biến trước. Sau đó chỉ là sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz-Holder.

Để làm rõ cho ý tưởng này, chúng ta sẽ xét những ví dụ sau (bạn sẽ thấy là ý tưởng hết sức đơn giản và dễ hiểu nên chúng tôi cũng không bình luận gì thêm ở mỗi ví dụ)

Ví dụ 1 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right) \ge \frac{9}{4}.$$

(Iran 1996, Ji Chen)

Lời giải. Do tính đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2 = \frac{(a+b+2c)^2}{2(a+c)^2(b+c)^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{(a+b+2c)^2}{2(a+c)^2(b+c)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right] \ge \frac{9}{4}$$

Từ đây, sử dụng tính thuần nhất, ta hãy chuẩn hóa cho $a+b=1$ và đặt $x=ab \Rightarrow \frac{1}{4} \ge x \ge c(1-c)$. Bất đẳng thức trở thành

$$f(x) = x+c+\frac{(1+2c)^2(x+c)}{2(c+c^2+x)^2}-\frac{9}{4} \ge 0$$

Ta có

$$f'(x) = 1-\frac{(1+2c)^2(c+x-c^2)}{2(c+c^2+x)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(1+2c)^2(c-2c^2+x)}{(c+c^2+x)^4} \geq 0$$

Nên $f'(x)$ đồng biến, suy ra

$$f'(x) \leq f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(2c-1)(8c^3+20c^2+38c+7)}{(2c+1)^4} \leq 0$$

Do đó $f(x)$ nghịch biến, vậy nên

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{c(1-2c)^2}{(1+2c)^2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. $\square$

Ví dụ 2 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6.$$

(Darij Grinberg)

LỜI GIẢI. Do tính đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} \geq \frac{(a+b+2c)^2}{a^2+b^2+c(a+b)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} + \frac{(a+b+2c)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \geq 6$$

Từ đây, sử dụng tính thuần nhất, ta hãy chuẩn hóa cho $a+b=1$ và đặt $x=ab \Rightarrow \frac{1}{4} \geq x \geq c(1-c)$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{x+c^2} + \frac{(1+2c)^2}{1+c-2x} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 12x^2 - (7+2c-16c^2)x + 1 + c - 5c^2 - 2c^3 + 4c^4 \geq 0$$

Ta có

$$f'(x) = 24x - 7 - 2c + 16c^2$$

Xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. $16c^2 - 2c - 1 \leq 0$, khi đó

$$f'(x) = 6(4x-1) + 16c^2 - 2c - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}c(1+2c)(1-2c)^2 \geq 0$$

Trường hợp 2. $8c^2 - 22c + 7 \leq 0$, khi đó

$$f'(x) = 24x - 7 - 2c + 16c^2 \geq 24c(1-c) - 7 - 2c + 16c^2 = -(8c^2-22c+7) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(c(1-c)\right) = (1-2c)^3 \geq 0$$

Trường hợp 3. $\begin{cases} 16c^2 - 2c - 1 \ge 0 \\ 8c^2 - 22c + 7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{16} < \frac{\sqrt{17}+1}{16} \le c \le \frac{11-\sqrt{65}}{8} < \frac{3}{8}$, khi đó ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 + 2c - 16c^2}{24}$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra

$$f(x) \ge f\left(\frac{7 + 2c - 16c^2}{24}\right) = -\frac{1}{48}(1 - 20c + 20c^2 + 32c^3 + 64c^4) = -\frac{1}{48}g(c)$$

Dễ thấy $g(c)$ là hàm lồi nên

$$g(c) < \max\left\{g\left(\frac{5}{16}\right), g\left(\frac{3}{8}\right)\right\} = \max\left\{-\frac{1751}{1024}, -\frac{47}{64}\right\} < 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. $\square$

Ví dụ 3 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{b^2 + bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2} + \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \ge \frac{9}{(a + b + c)^2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\frac{1}{a^2 + ac + c^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} \ge \frac{(a + b + 2c)^2}{(b + c)^2(a^2 + ac + c^2) + (a + c)^2(b^2 + bc + c^2)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a + b + 2c)^2}{(b + c)^2(a^2 + ac + c^2) + (a + c)^2(b^2 + bc + c^2)} + \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \ge \frac{9}{(a + b + c)^2}$$

Do tính thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa cho $a + b = 1$, đặt $x = ab$ thì ta có $\frac{1}{4} \ge x \ge c(1 - c)$. Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành

$$f(x) = \frac{(1 + 2c)^2}{2x^2 + 3cx + 2c^4 + 3c^3 + 2c^2} + \frac{1}{1 - x} - \frac{9}{(1 + c)^2} \ge 0$$

Ta có

$$f'(x) = -\frac{(1 + 2c)^2(3c + 4x)}{(2x^2 + 3cx + 2c^4 + 3c^3 + 2c^2)^2} + \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1 + 2c)^2(12x^2 + 18cx + 5c^2 - 6c^3 - 4c^4)}{(2x^2 + 3cx + 2c^4 + 3c^3 + 2c^2)^3} + \frac{1}{(1 - x)^3}$$

Mà

$$\begin{aligned} 12x^2 + 18cx + 5c^2 - 6c^3 - 4c^4 &\ge 12c^2(1 - c)^2 + 18c^2(1 - c) + 5c^2 - 6c^3 - 4c^4 \\ &= c^2(35 - 48c + 8c^2) \ge 0 \ \left(\text{do } \frac{1}{2} \ge c \ge 0\right) \end{aligned}$$

Nên $f''(x) > 0$, suy ra $f'(x)$ đồng biến, do đó

$$\begin{aligned} f'(x) &\le f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{9} - \frac{64(1+3c)}{(1+2c)^2(1+2c+4c^2)^2} \\ &\le \frac{16}{9} - \frac{64}{(1+2c)^2(1+2c+4c^2)^2} \\ &= \frac{16}{9}\left[1 - \frac{36}{(1+2c)^2(1+2c+4c^2)^2}\right] \\ &\le \frac{16}{9}\left[1 - \frac{36}{(1+1)^2(1+1+1^2)^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến nên

$$f(x) \ge f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{4c^2+2c+1} + \frac{4}{3} - \frac{9}{(1+c)^2} = \frac{(1-2c)^2(4c^2+14c+1)}{3(c+1)^2(4c^2+2c+1)} \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. □

Ví dụ 4 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}\right) \ge 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức Holder, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \ge \sqrt{\frac{(a+b+2c)^3}{(a+c)^3(b^2+bc+c^2)+(b+c)^3(a^2+ac+c^2)}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{\frac{(a+b+2c)^3}{(a+c)^3(b^2+bc+c^2)+(b+c)^3(a^2+ac+c^2)}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} \ge \frac{2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}(a+b+c)}$$

Chuẩn hóa cho $a+b=1$, đặt $x = ab \Rightarrow \frac{1}{4} \ge x \ge c(1-c)$ thì bất đẳng thức trở thành

$$f(x) = \sqrt{\frac{(1+2c)^3}{(1+4c)x^2+cx(1+3c-2c^2)+2c^5+4c^4+4c^3+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}(1+c)} \ge 0$$

Ta có

$$f'(x) = -\frac{[2(1+4c)x+c+3c^2-2c^3](1+2c)^{3/2}}{2[(1+4c)x^2+cx(1+3c-2c^2)+2c^5+4c^4+4c^3+c^2]^{3/2}} + \frac{1}{2(1-x)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{(1+2c)^{3/2}A}{4[(1+4c)x^2+cx(1+3c-2c^2)+2c^5+4c^4+4c^3+c^2]^{5/2}} + \frac{3}{4(1-x)^{5/2}}$$

với

$$\begin{aligned} A &= 8(1+4c)^2x^2 + 8cx(1+4c)(1+3c-2c^2) - c^2(20c^4+108c^3+65c^2+14c+1) \\ &\ge 8c^2(1-c)^2(1+4c)^2 + 8c^2(1-c)(1+4c)(1+3c-2c^2) \\ &\quad -c^2(20c^4+108c^3+65c^2+14c+1) \\ &= c^2(172c^4-444c^3-33c^2+82c+15) \ge 0 \quad \left(\text{do } \frac{1}{2} \ge c \ge 0\right) \end{aligned}$$

Nên $f''(x) > 0$, suy ra $f'(x)$ đồng biến, do đó

$$\begin{aligned} f'(x) &\le f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16(2c^2-4c-1)}{(1+2c)^2(1+2c+4c^2)^{3/2}} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \\ &\le \frac{16(2c^2-4c-1)}{(1+2c)^2(1+1+1^2)^{3/2}} + \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[1 + \frac{4(2c^2-4c-1)}{(1+2c)^2}\right] \\ &= \frac{4(4c^2-4c-1)}{\sqrt{3}(1+2c)^2} < 0 \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến nên

$$f(x) \ge f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{1+2c+4c^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}(1+c)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{4(c+1)}{\sqrt{4c^2+2c+1}} + \frac{2}{\sqrt{3}}(c+1) \ge 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}c \ge 2\left(1 - \frac{c+1}{\sqrt{4c^2+2c+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}c \ge \frac{6c^2}{4c^2+2c+1+(c+1)\sqrt{4c^2+2c+1}}$$

$$\Leftrightarrow 4c^2+2c+1+(c+1)\sqrt{4c^2+2c+1} \ge 6\sqrt{3}c$$

Ta có

$$\sqrt{4c^2+2c+1} \ge c+1, \quad 6\sqrt{3}c \le \frac{21}{2}c$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$4c^2+2c+1+(c+1)^2 \ge \frac{21}{2}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-2c)(4-5c) \ge 0 \quad \left(\text{đúng do } \frac{1}{2} \ge c \ge 0\right).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.
Nhận xét. Xem xét lời giải này, nhiều bạn sẽ cho rằng lời giải quá phức tạp, nhưng trên quan điểm cá nhân, chúng tôi cho rằng lời giải này cũng rất "đơn giản". Bạn chỉ cần thành thạo kỹ thuật tính toán đạo hàm thì có thể dễ dàng làm được bài này theo kỹ thuật của ta. □

Ví dụ 5 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} + \frac{2b^2+5ca}{(c+a)^2} + \frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2} \ge \frac{21}{4}.$$

(Phạm Kim Hùng)

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Ta có bất đẳng thức tương đương với

$$\left[\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} + 2\right] + \left[\frac{2b^2+5ca}{(c+a)^2} + 2\right] + \frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2} \ge \frac{37}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\left[\frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2}\right] + 9c\left[\frac{b}{(b+c)^2} + \frac{a}{(a+c)^2}\right] + \frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2} \ge \frac{37}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2=\frac{(a+b+2c)^2}{2(a+c)^2(b+c)^2}$$

$$\frac{b}{(b+c)^2}+\frac{a}{(a+c)^2}\ge\frac{\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab(a+b+2c)^2}{(a+b)(a+c)^2(b+c)^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2}+\frac{9abc(a+b+2c)^2}{(a+b)(a+c)^2(b+c)^2}+\frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2}\ge\frac{37}{4}$$

Chuẩn hóa cho $a+b=1$ và đặt $x=ab\Rightarrow\frac{1}{4}\ge x\ge c(1-c)$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1+c^2-2x)(1+2c)^2}{(c+c^2+x)^2}+\frac{9cx(1+2c)^2}{(c+c^2+x)^2}+5x+2c^2\ge\frac{37}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{[1+c^2+(9c-2)x](1+2c)^2}{(c+c^2+x)^2}+5x+2c^2-\frac{37}{4}\ge 0$$

Ta có

$$f'(x)=5-\frac{[2+2c-5c^2-9c^3+(9c-2)x](1+2c)^2}{(1+c+x)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2[3+4c-11c^2-18c^3+(9c-2)x](1+2c)^2}{(1+c+x)^4}$$

Nếu $9c\ge 2$ thì ta có

$$\begin{aligned}3+4c-11c^2-18c^3+(9c-2)x &\ge 3+4c-11c^2-18c^3+c(1-c)(9c-2)\\ &= 3+2c-27c^3=c^3\left(\frac{3}{c^3}+\frac{2}{c^2}-27\right)\\ &\ge c^3\left(\frac{3}{(1/2)^3}+\frac{2}{(1/2)^2}-27\right)=5c^3\ge 0\end{aligned}$$

Nếu $2\ge 9c$ thì ta có

$$\begin{aligned}3+4c-11c^2-18c^3+(9c-2)x &\ge 3+4c-11c^2-18c^3+\frac{1}{4}(9c-2)\\ &= \frac{1}{4}(10+25c-44c^2-72c^3)\\ &\ge \frac{1}{4}(10+3c-72c^3)\ \left(\text{do }\frac{1}{2}>c\right)\\ &= \frac{1}{4}c^3\left(\frac{10}{c^3}+\frac{3}{c^2}-72\right)\\ &\ge \frac{1}{4}c^3\left(\frac{10}{(1/2)^3}+\frac{3}{(1/2)^2}-72\right)=5c^3\ge 0\end{aligned}$$

Vậy nên $f''(x)\ge 0$, suy ra $f'(x)$ đồng biến, do đó

$$f'(x)\le f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{(2c-1)(40c^3+388c^2+414c+91)}{(2c+1)^4}\le 0$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến nên

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2c(c+2)(2c-1)^2}{(2c+1)^2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Cuối cùng là một số bài tập tự luyện, xin được dành cho các bạn

Bài toán 1 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2} + \frac{bc}{b^2+c^2+3a^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+3b^2} \leq \frac{3}{5}.$$

(Phạm Kim Hùng)

CHÚ Ý. Bài này có đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ và $a = b = \frac{3}{2}c$ nên khác với các ví dụ trên. Vậy thì ta phải làm thế nào để áp dụng kỹ thuật này? Các bạn hãy thử suy nghĩ xem nhé! □

Bài toán 2 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \geq \frac{6}{a+b+c}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Xin cảm ơn các bạn đã theo dõi bài viết này!