PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

VÕ QUỐC BÁ CẨN

Hiện nay có rất nhiều phương pháp mạnh và mới để chứng minh bất đẳng thức như là *EV* của *Vasile Cirtoaje*, *SOS* của *Phạm Kim Hùng* và *Trần Tuấn Anh*, ... Nhưng các phương pháp này phần lớn chỉ dùng để giải quyết các bài toán đối xứng, khi gặp các bất đẳng thức hoán vị thì chúng thường tỏ ra kém hiệu quả. Vậy chúng ta có cách nào để giải quyết các bất đẳng thức hoán vị không? Bài viết này, chúng tôi xin được chia sẻ cùng các bạn một kinh nghiệm nhỏ để chứng minh bất đẳng thức hoán vị 3 biến (và đôi khi ta cũng có thể áp dụng nó cho bất đẳng thức hoán vị 4 biến). Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn!

Như đã nói ở trên, các phương pháp chứng minh bất đẳng thức đối xứng thì rất nhiều nên nếu ta có thể chuyển một bất đẳng thức hoán vị về dạng đối xứng thì việc chứng minh không còn gì khó khăn cả. Đó chính là kinh nghiệm nhỏ mà chúng tôi muốn giới thiệu cùng bạn đọc, một kỹ thuật giúp ta chuyển một bất đẳng thức hoán vị thành một bất đẳng thức đối xứng để giải, ta tạm gọi đó là "*phương pháp chuyển vị*".

Để hiểu rõ hơn ý tưởng của nó, chúng ta hãy cùng xét ví dụ sau

Example 0.1 *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$. Chứng minh rằng*

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4.$$

(Vasile Cirtoaje, Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$a \cdot ab + b \cdot \underline{bc} + c \cdot \underline{ca} + abc \le 4.$$

Ta thấy rằng đây là một bất đẳng thức hoán vị với đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ và $a=2, b=1, c=0$ (với giả thiết $c=\min\{a,b,c\}$). Điều này chứng tỏ rằng việc đánh giá nó là không dễ dàng chút nào, chỉ cần một chút "quá đà" thì cũng có thể đưa đến kết quả không mong muốn. Một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay đến việc chuyển nó về dạng đối xứng để giải. Thông thường, mọi người thường nghĩ đến việc chuyển về đối xứng cho ba biến, nhưng việc này rất khó thực hiện (vì bất đẳng thức này có đến hai điểm đẳng thức), cho nên ta hãy nghĩ đến việc đưa về đối xứng cho hai biến (mà không phải ba). Muốn làm điều này, các bạn hãy cùng để ý đến hai biểu thức được gạch chân ở trên, chúng có điều gì kì lạ? À, nếu ta hoán đổi vị trí cho nhau thì ta có thể thu được một bất đẳng thức mới là

$$a \cdot ab + b \cdot \underline{ca} + c \cdot \underline{bc} + abc \le 4.$$

Và thật thú vị, đây lại là một bất đẳng thức đối xứng cho hai biến a và c. Vì vậy, nếu ta có một đánh giá kiểu như $a \cdot ab + b \cdot \underline{bc} + c \cdot \underline{ca} + abc \le a \cdot ab + b \cdot \underline{ca} + c \cdot \underline{bc} + abc$ thì đó là một điều tuyệt vời! May mắn thay, điều này tương đương với $c(a-b)(b-c) \ge 0$ và chúng ta hoàn toàn có thể đạt được điều này bằng cách giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Đến đây, ta tìm được lời giải cho bài toán như sau:
Không mất tính tổng quát, giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} a \cdot ab + b \cdot bc + c \cdot ca + abc &\le a \cdot ab + b \cdot ca + c \cdot bc + abc \\ &= b(a+c)^2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{2b+a+c+a+c}{3}\right)^3 = 4. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ và $a = 2, b = 1, c = 0$ (cùng các hoán vị tương ứng). ■
Đây là một ví dụ quen thuộc, và có lẽ nhiều bạn sẽ cho rằng nó quá quen thuộc, hiển nhiên. Và nếu bạn, nào tinh ý thì sẽ thấy rằng việc đánh giá $a \cdot ab + b \cdot bc + c \cdot ca + abc \le a \cdot ab + b \cdot ca + c \cdot bc + abc$ ở trên thực ra chính là việc sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại cho hai bộ số đơn điệu cùng chiều (a, b, c) và (ab, ca, bc) (với giả thiết b là số hạng nằm giữa). Tuy nhiên, chúng tôi đến với ý tưởng chuyển vị này hoàn toàn độc lập với bất đẳng thức sắp xếp lại. Chúng ta hãy cùng đi đến ví dụ sau để thấy rõ được điều đó

Example 0.2 *Cho các số không âm x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y+z^2} + \sqrt{z+x^2} \ge 2.$$

(Phan Thành Nam)

Rõ ràng với bài toán này, việc sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại là rất khó (có thể nói là không thể), nhưng việc sử dụng phép chuyển vị như trên thì ta vẫn có thể áp dụng được. Và một điều thú vị nữa là, với những cách phân tích khác nhau thì chúng ta lại có những phép chuyển vị khác nhau, giúp đưa bài toán đi đến kết quả. Chẳng hạn, ở ví dụ này, chúng ta có hai cách chuyển vị sau
Lời giải 1. Bất đẳng thức này có dạng đồng bậc (ở vế trái) là

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz} + \sqrt{y^2+z^2+yz+\underline{yx}} + \sqrt{z^2+x^2+zx+\underline{zy}} \ge 2.$$

Ta thấy rằng bất đẳng thức này chứa căn và hoán vị cho 3 biến x, y, z nên việc đánh giá nó sẽ gặp rất nhiều khó khăn, cho nên ý tưởng của ta ở đây chính là chuyển nó về dạng đối xứng, chẳng hạn cho y và z. Để thực hiện, ta hãy để ý 2 biểu thức yx và zy được gạch chân ở trên, nếu ta chuyển vị 2 biểu thức này thì sẽ thu được một bất đẳng thức mới

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{y^2+z^2+yz+\underline{yz}}+\sqrt{z^2+x^2+zx+\underline{xy}} \geq 2.$$

Và thật thú vị, nó là một bất đẳng thức đối xứng cho y và z. Với ý tưởng như vậy, chúng ta cần có

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy} \geq \sqrt{y^2+z^2+yz+yz}+\sqrt{z^2+x^2+zx+xy}.$$

Bình phương 2 vế, và thu gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$y(x-y)(x-z)(x+y+z) \geq 0.$$

Điều này có thể đạt được nếu ta giả sử $x = \min\{x,y,z\}$ hoặc $x = \max\{x,y,z\}$. Với những phân tích này, ta đi đến lời giải của bài toán như sau:
Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x,y,z\}$, khi đó theo trên, ta có ngay

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy} \geq \sqrt{y^2+z^2+yz+yz}+\sqrt{z^2+x^2+zx+xy},$$

nên bất đẳng thức của ta được đưa về

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{x+z^2}+y+z \geq 2,$$

tương đương

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{x+z^2} \geq 2x+y+z.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Minkowski*, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y^2}+\sqrt{x+z^2} &\geq \sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)^2+(y+z)^2} = \sqrt{4x+(y+z)^2} \\ &= \sqrt{4x(x+y+z)+(y+z)^2} = 2x+y+z.\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ hoặc $x=1, y=z=0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Lời giải 2. Nếu các bạn không thích phép chuyển vị như trên, chúng ta có thể thử chọn phép chuyển vị kiểu khác như sau: Hãy chú ý đến 2 biểu thức được gạch dưới trong bất đẳng thức

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{\underline{y^2}+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+\underline{x^2}+zx+zy} \geq 2.$$

Nếu ta thực hiện phép chuyển vị cho 2 biểu thức này thì sẽ thu được một bất đẳng thức mới đối xứng cho x và z là

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{z^2+\underline{y^2}+zx+zy}+\sqrt{\underline{x^2}+z^2+yz+yx}\geq 2.$$

Như vậy, ta cần có

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy}\geq\sqrt{x^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+y^2+zx+zy},$$

hay là

$$x(x^2-y^2)(y-z)\geq 0.$$

Điều này có thể đạt được nếu ta giả sử y là số hạng nằm giữa x và z. Đến đây, ta thu được một lời giải mới như sau:
Giả sử y là số hạng nằm giữa x và z, khi đó dễ thấy

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy}\geq\sqrt{x^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+y^2+zx+zy},$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{y^2+z^2+zx+zy}+\sqrt{x^2+z^2+yz+yx}\geq 2,$$

tương đương

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{z+y^2}+\sqrt{x+z-2xz}\geq 2,$$

hay là

$$x+z+2y^2+2\sqrt{(x+y^2)(z+y^2)}\geq\left(2-\sqrt{x+z-2xz}\right)^2.$$

Đặt $t=xz$ $(0\leq t\leq y(1-2y))$ thì bất đẳng thức trên được viết lại là

$$f(t)=2t+2y^2-4+2\sqrt{t+(1-y+y^2)y^2}+4\sqrt{1-y-2t}\geq 0.$$

Ta có

$$f''(t)=-\frac{1}{2\left[t+y^2(1-y+y^2)\right]^{3/2}}-\frac{4}{(1-y-2t)^{3/2}}<0,$$

nên $f(t)$ là hàm lõm, suy ra $f(t)\geq\min\{f(0),f(y(1-2y))\}$ nên ta chỉ cần chứng minh được $f(0)\geq 0$ và $f(y(1-2y))\geq 0$. Điều này đồng nghĩa với việc chứng minh bất đẳng thức trên khi $xz=0$ và $(x-y)(z-y)=0$.

+ Nếu $xz = 0$, ta giả sử $z = 0$, khi đó $x = 1 - y$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{1 - y + y^2} + \sqrt{1 - y} + y \geq 2.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, bởi vì theo bất đẳng thức *Minkowski*, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - y + y^2} + \sqrt{1 - y} &= \sqrt{\left(\sqrt{1 - y}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(\sqrt{1 - y}\right)^2 + 0^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\sqrt{1 - y} + \sqrt{1 - y}\right)^2 + (y + 0)^2} = 2 - y. \end{aligned}$$

+ Nếu $(x - y)(z - y) = 0$, ta giả sử $y = z$, khi đó $x = 1 - 2y \geq 0$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{1 - 2y + y^2} + \sqrt{y + y^2} + \sqrt{1 - y - 2y(1 - 2y)} \geq 2,$$

tương đương

$$\sqrt{y + y^2} + \sqrt{1 - 3y + 4y^2} \geq 1 + y.$$

Nhưng bất đẳng thức này cũng hiển nhiên đúng, bởi vì theo bất đẳng thức *Minkowski*, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{y + y^2} + \sqrt{1 - 3y + 4y^2} &= \sqrt{(\sqrt{y})^2 + y^2} + \sqrt{(\sqrt{y})^2 + (1 - 2y)^2} \\ &\geq \sqrt{(\sqrt{y} + \sqrt{y})^2 + (y + 1 - 2y)^2} = 1 + y. \end{aligned}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Với ý tưởng chuyển vị như vậy, chúng ta có thể giải được khá nhiều bài toán đẹp và khó. Sau đây là hai ví dụ khác

Example 0.3 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{x - y + z^3} + \sqrt[3]{y - z + x^3} + \sqrt[3]{z - x + y^3} \leq 1.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải. Ta thấy bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} \leq 1$, với

$$\begin{aligned} A &= x - y + z^3 = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2z(x^2 - y^2) + z^2(x - y) + z^3, \\ B &= y - z + x^3 = y^3 + y^2z - yz^2 - z^3 + 2x(y^2 - z^2) + x^2(y - z) + x^3, \\ C &= z - x + y^3 = z^3 + z^2x - zx^2 - x^3 + 2y(z^2 - x^2) + y^2(z - x) + y^3. \end{aligned}$$

Nếu có 2 số trong 3 số A, B, C có tổng không dương thì bất đẳng thức của ta hiển nhiên đúng. Thật vậy, giả sử $A+B \leq 0$ thì do $C = z - x + y^3 \leq z - x + y \leq 1$, nên

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} \leq \sqrt[3]{-B} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = \sqrt[3]{C} \leq 1.$$

Bây giờ ta sẽ xét trường hợp ngược lại, tức là lúc này ta có $A+B \geq 0, B+C \geq 0$ và $C+A \geq 0$. Khi đó, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$, và đặt

$$D = y^3 + y^2x - yx^2 - x^3 + 2z(y^2 - x^2) + z^2(y - x) + z^3, \text{ và } E = x^3 + y^3 - z^3.$$

Lúc này, ta có 2 tính chất sau: $D + E = B + C \geq 0$, và

$$DE - BC = (a-c)(b-c)(a^2 + 2ab + 2ac + bc)(2a^2 + b^2 + 2c^2 + 2bc + 3ca + 2ab) \geq 0.$$

Với những tính chất này, ta dễ dàng chứng minh được $\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} \leq \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E}$, và ta có thể đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E} \leq 1,$$

tương đương

$$\sqrt[3]{x - y + z^3} + \sqrt[3]{y - x + z^3} + \sqrt[3]{x^3 + y^3 - z^3} \leq 1.$$

Thực hiện tương tự như trên, ta cũng có

$$\sqrt[3]{x - y + z^3} + \sqrt[3]{y - x + z^3} \leq \sqrt[3]{z^3} + \sqrt[3]{z^3} = 2z,$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$x + y - z \geq \sqrt[3]{x^3 + y^3 - z^3}.$$

Đây là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì

$$(x + y - z)^3 - (x^3 + y^3 - z^3) = 3(x - z)(y - z)(x + y) \geq 0.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 1, y = z = 0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Example 0.4 *Cho các số không âm a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng*

$$(3a^2 + bc + 3b^2)(3b^2 + ca + 3c^2)(3c^2 + ab + 3a^2) \leq 900.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Khi đó, với chú ý ở đẳng thức sau

$$\begin{aligned}&(3b^2+ca+3c^2)(3c^2+ab+3a^2)-(3b^2+ab+3c^2)(3c^2+ca+3a^2)=\\&=3a(b-c)(b-a)(a+b)\le 0,\end{aligned}$$

ta có thể đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$(3a^2+bc+3b^2)(3b^2+ab+3c^2)(3c^2+ca+3a^2)\le 900.$$

Đến đây, ta thấy

$$\begin{aligned}&(3a^2+bc+3b^2)(3b^2+ab+3c^2)=\\=\;&9b^4+3(a+c)b^3+(9a^2+ac+9c^2)b^2+3(a^3+c^3)b+9a^2c^2\\=\;&9b^4+3(a+c)b^3+9(a+c)^2b^2+3(a+c)^3b+9ac(ac-ab-bc)-17b^2ac\\\le\;&9b^4+3(a+c)b^3+9(a+c)^2b^2+3(a+c)^3b\\=\;&3b(a+3b+c)\left[b^2+(a+c)^2\right],\end{aligned}$$

và

$$3c^2+ca+3a^2\le 3(a+c)^2,$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$9x^2b(x+3b)(x^2+b^2)\le 900,$$

với $x=a+c$.
Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$9x^2b(x+3b)(x^2+b^2)\le\frac{9}{10}\left[\frac{5xb+x(x+3b)+2(x^2+b^2)}{3}\right]^3,$$

mà

$$5xb+x(x+3b)+2(x^2+b^2)=\frac{10}{3}(x+b)^2-\frac{1}{3}(x-2b)^2\le\frac{10}{3}(x+b)^2=30,$$

nên từ trên, ta được

$$9x^2b(x+3b)(x^2+b^2)\le\frac{9}{10}\cdot 10^3=900.$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0, b=1, c=2$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 1 *Bằng cách tương tự, ta có thể giải được bài toán sau:*
Với a, b, c là các số không âm có tổng bằng 3 và k là một số cho trước $\left(\sqrt{2} \geq k \geq \frac{1}{3}\right)$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P(a,b,c) = (a^2 + kbc + b^2)(b^2 + kca + c^2)(c^2 + kab + a^2).$$

■

Không chỉ có các bất đẳng thức hoán vị ba biến mới sử dụng được phép chuyển vị này mà một phần đông các bất đẳng thức hoán vị bốn biến cũng có thể áp dụng được nó. Đầu tiên, chúng ta sẽ sử dụng phép chuyển vị để đưa về một bất đẳng thức hoán vị cho ba biến, rồi dùng những đánh giá thích hợp để chứng minh bài toán. Mời các bạn cùng đi đến ví dụ sau để rõ hơn ý tưởng này (đây là một bài toán rất khó)

Example 0.5 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng*

$$a^3b + b^3c + c^3d + d^3a + 23abcd \leq 27.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 0.1 *Nếu a, b, c là các số không âm thì*

$$a^3b + b^3c + c^3a + \frac{473}{256}abc(a+b+c) \leq \frac{27}{256}(a+b+c)^4.$$

Chứng minh. Bạn đọc có thể tự chứng minh lấy bằng cách sử dụng phép chuyển vị cho 3 biến. □

Quay trở lại bài toán. Do tính hoán vị vòng quanh nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử d là số hạng nhỏ nhất trong các số a, b, c, d. Khi đó, ta có

$$c^3d + d^3a - (c^3a + d^4) = -(c^3 - d^3)(a - d) \leq 0,$$

nên để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$a^3b + b^3c + c^3a + d^4 + 23abcd \leq 27.$$

Đến đây, áp dụng bổ đề trên, ta có thể đưa về chứng minh

$$\frac{27}{256}(4-d)^4 - \frac{473}{256}abc(4-d) + d^4 + 23abcd \leq 27,$$

hay là

$$\frac{1}{256}(6361d - 1892)abc + \frac{27}{256}(4-d)^4 + d^4 - 27 \leq 0.$$

Nếu $6361d - 1892 \leq 0$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên vì $\frac{27}{256}(4-d)^4 + d^4 \leq 27$. Nếu $6361d - 1892 \geq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{256}(6361d - 1892)abc + \frac{27}{256}(4-d)^4 + d^4 - 27 \\
\leq \ & \frac{1}{256}(6361d - 1892) \cdot \frac{(4-d)^3}{27} + \frac{27}{256}(4-d)^4 + d^4 - 27 \\
= \ & \frac{1}{27}(5d^2 + 270d - 473)(d-1)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$ hoặc $a = 3, b = 1, c = d = 0$ và các hoán vị tương ứng. ■

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{4abc}{a^2b + b^2c + c^2a + abc} \geq 2.$$
(Võ Quốc Bá Cẩn)

2. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh các bất đẳng thức sau
   (a) $a^2b + b^2c + c^2a \leq 2 + abc$;
   (b) $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \leq 3$.

   (Vasile Cirtoaje)

3. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c có tổng bằng 3, bất đẳng thức sau luôn đúng
$$\frac{a}{b + c^2} + \frac{b}{c + a^2} + \frac{c}{a + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$
(Phạm Kim Hùng)

4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c có tổng bằng 3, bất đẳng thức sau luôn đúng
$$\sqrt{\frac{a}{b^2 + 3}} + \sqrt{\frac{b}{c^2 + 3}} + \sqrt{\frac{c}{a^2 + 3}} \leq \frac{3}{2}.$$
(Võ Quốc Bá Cẩn)

5. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2a+b^3}+\sqrt{2b+c^3}+\sqrt{2c+a^3} \geq \sqrt{2}+1.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

6. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm tất cả các số thực không âm k sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$(ka+b)(kb+c)(kc+a) \geq (k+1)^3.$$

(Michael Rozenberg)

7. Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=3$. Chứng minh rằng

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b) \leq 4.$$

(Phạm Kim Hùng)

8. Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=3$. Chứng minh rằng

$$ab(a+2b+3c)+bc(b+2c+3d)+cd(c+2d+3a)+da(d+2a+3b) \leq 6\sqrt{3}.$$

(Phạm Kim Hùng)