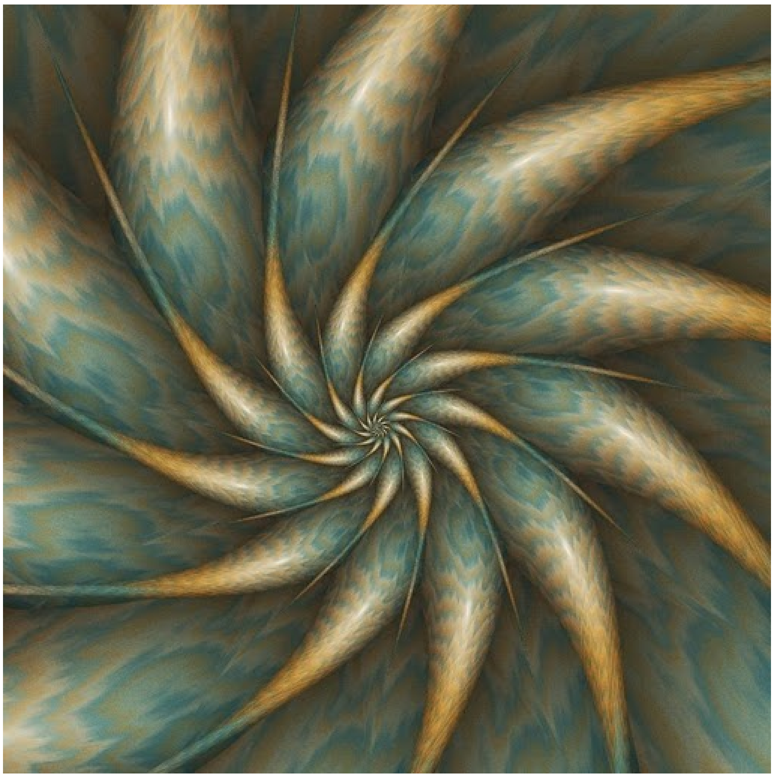
Tạ Minh Hoằng **Nguyễn Huy Tùng**

Tuyển tập các bài toán



Tháng 11 năm 2010

Mục lục

Lời cảm ơn

Chắc chắn tuyển tập này sẽ hoàn thành được nếu không có sự giúp đỡ từ những người bạn của chúng tôi. Họ đã trực tiếp động viên chúng tôi thực hiện, góp ý để có thể tuyển tập một cách tốt nhất các bài toán bất đẳng thức. Xin chân thành cảm ơn hai anh sau đã giúp chúng tôi rất nhiều trong việc thực hiện tuyển tập này

1. **Nguyễn Văn Dũng** - Giảng viên Học Viện Kỹ thuật Quân sự Hà Nội;

2. **Võ Quốc Bá Cẩn** - Sinh viên Đại học Y Dược Cần Thơ.

Chương 1

Một số kết quả và các ký hiệu

1.1 Một số kết quả

Trong phần này chúng tôi sẽ liệt kê ra các kết quả và các ký hiệu được sử dụng. Các chứng minh của các kết quả này các bạn có thể tìm thấy trong các tài liệu tham khảo mà chúng tôi ghi ở cuối tuyển tập.

1 (Bất đẳng thức *AM – GM*). Với các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2 (Bất đẳng thức *AM – GM* suy rộng). Với các số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và các số thực dương $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ có tổng bằng 1 thì ta luôn có

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

3 (Bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*). Cho hai bộ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Khi đó, ta luôn có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho $a_i = bk_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$.

4 (Bất đẳng thức *Hölder*). Với m dãy số không âm x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ và $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ thỏa mãn $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ ta có

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right)^{p_i} \geq \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{p_i}.$$

Đẳng thức xảy ra khi m dãy số đó tương ứng tỷ lệ.

5 (Bất đẳng thức *Chebyshev*). Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là hai bộ số thực bất kỳ.

(i) Nếu hai dãy trên đơn điệu cùng chiều thì

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

(ii) Nếu hai dãy trên đơn điệu ngược chiều thì

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

6 (Bất đẳng thức trung bình lũy thừa). Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm. Đặt

$$A_r = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} & r>0 \\ \sqrt[r]{a_1a_2\ldots a_n} & r=0 \end{cases}.$$

Khi đó A_r được gọi là trung bình lũy thừa bậc r của $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và nó có tính chất $A_r \geq A_s$ với $r \geq s \geq 0$.

7 (Bất đẳng thức *Schur*). Với mọi số thực không âm a, b, c, r, ta luôn có

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ cùng các hoán vị.

Có hai kết quả thường được sử dụng là $r=1$ và $r=2$.

Với $r=1$, ta có bất đẳng thức *Schur* bậc ba

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(c-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Các dạng tương đương của bất đẳng thức trên là

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$(a+b+c)^3+9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Với $r=2$, ta có bất đẳng thức *Schur* bậc bốn

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Dạng tương đương của bất đẳng thức trên là

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)$$

8 (Bất đẳng thức *Vornicu – Schur*). Cho $a \geq b \geq c$ là các số thực và x, y, z là các hàm số không âm. Xét bất đẳng thức sau

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên đúng nếu một trong các tiêu chuẩn sau được thỏa mãn

1. $x \geq y$ (hoặc $z \geq y$);
2. $x+z \geq y$;
3. $\sqrt{x}+\sqrt{z} \geq \sqrt{y}$;
4. $ax \geq by$ (hoặc $cz \geq by$) với $a \geq b \geq c \geq 0$;
5. $ax+cz \geq by$ với $a \geq b \geq c \geq 0$;
6. $\sqrt{ax}+\sqrt{cz} \geq \sqrt{by}$ với $a \geq b \geq c \geq 0$;
7. $bz \geq cy$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác;
8. $x^2+y^2+z^2 \leq 2(xy+yz+zx)$.

9 (Hàm lồi). Cho $\mathbb{I}$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Một hàm f xác định trên $\mathbb{I}$ được gọi là lồi khi và chỉ khi với mọi $a, b \in \mathbb{I}$ và $\alpha, \beta \geq 0$ thỏa mãn $\alpha+\beta=1$, ta có

$$\alpha f(a)+\beta f(b) \geq f(\alpha a+\beta b).$$

Nếu bất đẳng thức này ngược chiều thì f được gọi là một hàm lõm.

Nếu f khả vi trên $\mathbb{I}$ thì f lồi khi và chỉ khi đạo hàm f' của nó là một hàm tăng.

Nếu f liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm f'' trên (a,b), thì f lồi khi và chỉ khi $f'' \geq 0$.

10 (Bất đẳng thức *Jensen*). Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm sao cho $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực thì với mọi hàm f lồi trên $\mathbb{R}$ ta luôn có

$$a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2)+\ldots+a_n f(x_n) \geq f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

11 (Bất đẳng thức *Newton*). Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$, đặt

$$S_k=\frac{\sum\limits_{i_1<i_2<\ldots<i_k}^{n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}}{C_n^k},$$

thì khi đó ta luôn có $S_k^2 \geq S_{k-1}S_{k+1}$.

12. Với $a \geq b \geq c$ là các số thực không âm và $P(a,b,c)$ là một hàm đối xứng cho ba biến a, b, c.

1. Cố định $p=a+b+c, q=ab+bc+ca$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0,\infty)$ thỏa mãn $k(x)=f'(x)$ là hàm lồi thì

   $$P(a,b,c)=f(a)+f(b)+f(c)$$

   đạt giá trị lớn nhất (nếu có) khi $a \geq b=c$ và đạt giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi $a=b \geq c$ hoặc $c=0$.

2. Cố định $p = a+b+c, q = ab+bc+ca$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0,\infty)$ thỏa mãn $k(x) = f'(x)$ là hàm lõm thì
$$P(a,b,c) = f(a)+f(b)+f(c)$$
đạt giá trị lớn nhất (nếu có) khi $a = b \geq c$ hoặc $c = 0$ và đạt giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi $a \geq b = c$.

3. Cố định $p = a+b+c, r = abc$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0,\infty)$ thỏa mãn $k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$ là hàm lồi thì
$$P(a,b,c) = f(a)+f(b)+f(c)$$
đạt giá trị lớn nhất (nếu có) khi $a \geq b = c$ và đạt giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi $a = b \geq c$.

4. Cố định $p = a+b+c, r = abc$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0,\infty)$ thỏa mãn $k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$ là hàm lõm thì
$$P(a,b,c) = f(a)+f(b)+f(c)$$
đạt giá trị lớn nhất (nếu có) khi $a = b \geq c$ và đạt giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi $a \geq b = c$.

1.2 Các ký hiệu

1. Với mọi tam giác ABC, ta đặt $a = BC, b = CA, c = AB$. Ngoài ra, p, R, r, S lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp và diện tích của ΔABC.
(Đối với tam giác $A'B'C'$ các ký hiệu $a', b', c', p', R', r', S'$ cũng được hiểu theo nghĩa tương tự).

2. Cho f là một hàm n biến. Tổng hoán vị, ký hiệu là $\sum_{cyc}$, được định nghĩa là
$$\sum_{cyc} f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = f(a_1,a_2,\ldots,a_n) + f(a_2,a_3,\ldots,a_1) + \ldots + f(a_n,a_1,\ldots,a_{n-1}).$$

Trong tuyển tập, ký hiệu $\sum\limits_{cyc}$ tương đương với $\sum$. Ngoài ra, ký hiệu $\sum\limits_{a,b,c}$ còn để chỉ tổng hoán vị cho ba biến a, b, c.

Chương 2

Tuyển tập các bài toán

2.1 Đề toán

1. Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c>0$, ta luôn có

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\le\frac{1}{3}.$$

2. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+2c)(b+2a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+2a)(c+2b)}}\le\frac{3}{4}.$$

3. Chứng minh với mọi a,b,c dương

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge 1.$$

4. Nếu a,b,c là các số thực dương và $k=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ thì

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}+\frac{1}{a^2+ab+b^2}\le\frac{2(k^2+k+1)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

5. Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng khi đó

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}+\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

6. Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca>0$, ta luôn có

$$\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{5}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

7. Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Hãy chứng minh

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}+\frac{1}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{1}{3(ab+bc+ca)}+\frac{8}{(a+b+c)^2}.$$

8. Nếu $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ thì

$$\frac{a^3}{b^2+4bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2+4ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2+4ab+b^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2}.$$

9. Giả sử a,b,c là các số thực dương. Hãy chứng minh

$$\frac{a+b}{a^2+bc+c^2}+\frac{b+c}{b^2+ca+a^2}+\frac{c+a}{c^2+ab+b^2} \geq \frac{27(ab^2+bc^2+ca^2+3abc)}{(a+b+c)^4}.$$

10. Với mọi $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca > 0$ ta luôn có

$$\frac{a^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^3}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^3}{2a^2-ab+2b^2} \geq \frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3}.$$

11. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Chứng minh

$$\sum \frac{1}{4a+b+c}+\frac{4(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \leq \sum \frac{1}{b+c}.$$

12. Nếu a,b,c là các số thực dương thì

$$\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{ab}{(b+c)(c+a)} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}.$$

13. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{1}{2}.$$

14. Với mọi $a,b,c > 0$ thỏa mãn $3(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca = 12$ ta luôn có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

15. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca > 0$. Chứng minh

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{5}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

16. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Hãy chứng minh

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

(Iranian Mathematical Olympiad 1996)

17. Giả sử a,b,c là các số thực không âm, trong chúng không có hai số nào đồng thời bằng 0. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{5}{2}.$$

18. Với a,b,c là các số thực dương, hãy chứng minh

$$\frac{1}{(c+a)^2(a+b)^2}+\frac{1}{(a+b)^2(b+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2(c+a)^2}\le\frac{2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

19. Cho các số dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{2a^3+3a+2}+\frac{1}{2b^3+3b+2}+\frac{1}{2c^3+3c+2}\ge\frac{3}{7}.$$

20. Nếu $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=3$ thì

$$\frac{a+bc}{a^2+1}+\frac{b+ca}{b^2+1}+\frac{c+ab}{c^2+1}\le\frac{9}{2}-\frac{3abc}{2}.$$

21. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh

$$3+\frac{1}{2}\sum(a-b)^2\ge\frac{a+b^2c^2}{b+c}.$$

22. Nếu a,b,c là các số thực không âm thì

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\le\frac{3(a+b+c)}{2}.$$

23. Với mọi $a,b,c>0$ ta luôn có

$$a\sqrt{a^2+2bc}+b\sqrt{b^2+2ca}+c\sqrt{c^2+2ab}\ge\sqrt{3}(ab+bc+ca).$$

24. Nếu a,b,c là các số thực thuộc $[-1;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$1+2abc\ge a^2+b^2+c^2,$$

thì khi đó ta luôn có bất đẳng thức

$$1+2(abc)^n\ge a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

(Intennational Mathematical Competition 2010)

25. Cho các số thực a,b,c có tổng bằng 0. Chứng minh

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+6abc\ge -3.$$

26. Cho a,b,c là các số thực có tổng bằng 3. Chứng minh

$$a^4+b^4+c^4+2(a^3+b^3+c^3)+18\ge 9(a^2+b^2+c^2).$$

27. Chứng minh với mọi a,b,c thực

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

28. Nếu a,b,c là các số thực dương và $n\ge 2$ thỏa mãn $a^n+b^n+c^n=3$ thì

$$a^{n+1}b^n+b^{n+1}c^n+c^{n+1}a^n\le 3.$$

29. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực a,b,c

$$3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \geq a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3.$$

30. Giả sử $a,b,c>0$. Chứng minh

$$(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab) \geq (ab+bc+ca)^3.$$

31. Cho ba số không âm a,b,c. Chứng minh

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)^2 \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)(a^3+b^3+c^3+abc).$$

32. Nếu a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c>\max\{a,b,c\}$ thì

$$a^3+b^3+c^3+2abc+\frac{8a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

33. Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca>0$, ta luôn có

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}.$$

34. Cho a,b,c là các số thực không âm trong chúng không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}.$$

35. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6,$$

trong đó a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c>\max\{a,b,c\}$.

36. Nếu a,b,c là các số thực không âm sao cho $(a+b)(b+c)(c+a)>0$ thì

$$\frac{b^3+c^3}{a^2+bc}+\frac{c^3+a^3}{b^2+ca}+\frac{a^3+b^3}{c^2+ab} \geq 2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right).$$

37. Giả sử a,b,c là các số thực không âm và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\frac{8}{5}a^2+bc}+\frac{1}{\frac{8}{5}b^2+ca}+\frac{1}{\frac{8}{5}c^2+ab} \geq \frac{9}{4}.$$

38. Cho a,b,c là các số thực phân biệt. Hãy chứng minh

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2.$$

39. Với mọi số thực a,b,c thỏa mãn $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ta luôn có

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}\right)^2\geq 5.$$

40. Giả sử a,b,c là các số thực đôi một khác nhau, vậy ta có

$$\frac{(b-c)^4}{(c-a)^2(a-b)^2}+\frac{(c-a)^4}{(a-b)^2(b-c)^2}+\frac{(a-b)^4}{(b-c)^2(c-a)^2}\geq\frac{33}{2}.$$

(Mongolian Mathematical Olympiad 2010)

41. Cho tam giác ABC, ba đường trung tuyến m_a,m_b,m_c ứng với các cạnh a,b,c. Chứng minh

$$\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\left(\frac{m_a}{m_bm_c}+\frac{m_b}{m_cm_a}+\frac{m_c}{m_am_b}\right)\geq 6\sqrt{3}.$$

42. Cho tam giác nhọn ABC. Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2-c^2}\geq\left(\frac{R}{r}\right)^2-1.$$

43. Giả sử tam giác ABC có $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh

$$(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\leq a^4b^4c^4.$$

44. Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{a+b}}\geq a+b+c+\frac{3abc}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6})\sqrt[3]{a^6+b^6+c^6}}.$$

45. Chứng minh với mọi $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=2$

$$\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}}+\frac{ca}{\sqrt[4]{3b^2+4}}+\frac{ab}{\sqrt[4]{3c^2+4}}\leq\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}.$$

(International Mathematical Archimede Olympiad 2010)

46. Nếu $a,b,c>0$ thì

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(a+b+c)^2}\geq\frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2.$$

(Iranian IMO Summer Training Camp 2010)

47. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi 2. Chứng minh

$$\left|\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}-\frac{a^3}{c}-\frac{b^3}{a}-\frac{c^3}{b}\right|<3.$$

(Bosian Mathematical Olympiad 2010)

48. Gỉa sử x,y,z là các số thực dương và $xy+yz+zx=1$. Khi đó, ta có

$$3-\sqrt{3}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y}\geq (x+y+z)^2.$$

(Iranian Mathematical Olympiad 2010)

49. Chứng minh rằng

$$\sum\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\leq\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right),$$

trong đó a,b,c là các số thực dương.

(Turkish IMO Team Selection Test 2010)

50. Nếu a,b,c là các số thực dương thì

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}+2(a+b+c)\geq\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right).$$

51. Cho $a,b,c>0$ và $k=4(3\sqrt{2}-4)$. Chứng minh

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+2+\frac{k(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2}.$$

52. Nếu a,b,c là các số thực dương thì

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\geq 3.$$

53. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 4(a^3+b^3+c^3)+21.$$

54. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{25}{1+48abc}.$$

55. Chứng minh với mọi $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9\geq 10(a^2+b^2+c^2).$$

56. Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c>\max\{a,b,c\}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}\geq 4+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

57. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau với các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$

$$P(a,b,c)=\frac{bc}{3+a^2}+\frac{ca}{3+b^2}+\frac{ab}{3+c^2}.$$

58. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(a,b,c)=(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k,$$

với a,b,c,k là các số thực không âm tùy ý thỏa mãn $a+b+c=1$.

59. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P(a,b,c)=\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k,$$

trong đó a,b,c,k là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca>0$.

60. Cho các số nguyên dương lẻ a,b,c,d đôi một khác nhau. Chứng minh

$$abc+bcd+cda+dab+34\le 2abcd.$$

61. Với mọi số thực dương a,b,c,d ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{a^2-bc}{b+2c+d}+\frac{b^2-cd}{c+2d+a}+\frac{c^2-da}{d+2a+b}+\frac{d^2-ab}{a+2b+c}\ge 0.$$

62. Cho a,b,c,d là các số thực dương đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau đây

$$abcd=1; \qquad a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.$$

Hãy chứng minh rằng

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}>a+b+c+d.$$

(IMO Shortlist 2008)

63. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn

$$a+b+c+d=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}.$$

Hãy chứng minh

$$2(a+b+c+d)\ge\sqrt[3]{a^3+7}+\sqrt[3]{b^3+7}+\sqrt[3]{c^3+7}+\sqrt[3]{d^3+7}.$$

64. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1.$$

65. Với mọi $a,b,c,d>0$ ta luôn có

$$a\cdot\frac{a+b}{b+c}+b\cdot\frac{b+c}{c+d}+c\cdot\frac{c+d}{d+a}+d\cdot\frac{d+a}{a+b}\ge a+b+c+d.$$

66. Nếu a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=3$ thì

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b)\le 4.$$

67. Cho các số thực không âm a,b,c,d. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\ge a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2.$$

68. Với mọi số thực không âm a,b,c,d có tổng bằng 1 ta luôn có

$$4(a^3+b^3+c^3+d^3)+15(abc+bcd+cda+dab)\ge 1+48abcd.$$

69. Cho a,b,c,d là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$a^4+b^4+c^4+d^4+\frac{148}{27}abcd\ge\frac{1}{27}.$$

70. Giả sử a,b,c,d là các số thực dương có tổng bằng 4. Hãy chứng minh

$$abc+bcd+cda+dab+(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2\le 8.$$

71. Cho các số dương a,b,c,d có tích bằng 1. Khi đó, ta có

$$(a-1)(a-2)+(b-1)(b-2)+(c-1)(c-2)+(d-1)(d-2)\ge 0.$$

72. Cho a,b,c,d là các số thực không âm sao cho trong chúng không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3}\ge\frac{243}{2(a+b+c+d)^3}.$$

73. Với các số thực không âm a,b,c,d thỏa mãn $abc+bcd+cda+dab>0$ ta luôn có

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a^2+d^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{b^2+d^2}+\frac{1}{c^2+d^2}\ge\frac{81}{2(a+b+c+d)^2}.$$

74. Cho a,b,c,d,e là các số thực dương. Chứng minh

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\left(1+\frac{d}{b+c}\right)\left(1+\frac{e}{c+d}\right)\left(1+\frac{a}{d+e}\right)\left(1+\frac{b}{e+a}\right)\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5.$$

75. Giả sử a,b,c,d,e là các số thực không âm có tổng bằng 5. Chứng minh

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+d^2)(d^2+e^2)(e^2+a^2)\le\frac{729}{2}.$$

76. Với a,b,c,d,e là các số thực dương có tổng bằng 5, hãy chứng minh

$$abc+bcd+cde+dea+eab \le 5.$$

77. Cho sáu số thực dương a,b,c,x,y,z. Chứng minh

$$\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z} \ge \frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}.$$

78. Với hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bất kỳ ta có

$$a'(b+c-a)+b'(c+a-b)+c'(a+b-c) \ge \sqrt{48SS'}.$$

79. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\,(n\ge 3)$ là các số thực không âm có tổng bằng 1. Hãy chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i+1}} \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

(Chinese IMO Team Selection Test 2006)

80. Chứng minh với $k=n-1$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge n^2+k\left[\frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i<j}^{n}a_ia_j}-2\right],$$

trong đó $a_1,a_2,\ldots,a_n\,(n\ge 3)$ là các số thực dương.

81. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\,(n\ge 3)$ là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}-n+1\right).$$

82. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n\,(n\ge 3)$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=n$. Chứng minh

$$\frac{x_1^3}{x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2}+\frac{x_2^3}{x_3^2+x_4^2+\ldots+x_n^2}+\ldots+\frac{x_n^3}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-2}^2} \ge \frac{n}{n-2}.$$

(Mathematics and Youth Magazine)

83. Cho $a_0,a_1,\ldots,a_n\,(n\ge 1)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_{k+1}-a_k\ge 1$ với mọi $k=0,1,\ldots,n$. Chứng minh rằng khi đó

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right) \le \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

(International Mathematical Competition 2010)

2.2 Lời giải

1. *Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c>0$, ta luôn có*

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\le\frac{1}{3}.$$

Lời giải 1. Ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c}+\frac{4b(a+b+c)}{4b+4c+a}+\frac{4c(a+b+c)}{4c+4a+b}\le\frac{4(a+b+c)}{3},$$

$$a+\frac{3ca}{4a+4b+c}+b+\frac{3ab}{4b+4c+a}+c+\frac{3bc}{4c+4a+b}\le a+b+c+\frac{a+b+c}{3},$$

$$\frac{ca}{4a+4b+c}+\frac{ab}{4b+4c+a}+\frac{bc}{4c+4a+b}\le\frac{a+b+c}{9}.$$

Nhận xét rằng nếu $ab+bc+ca=0$ thì bất đẳng thức của ta là hiển nhiên. Dưới đây ta sẽ xét với $ab+bc+ca>0$. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}\frac{ca}{4a+4b+c}&=\frac{ca}{(2a+b)+(2a+b)+(2b+c)}\\&\le\frac{ca}{9}\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}\right)\\&=\frac{ca}{9}\left(\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}\right).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}VT&\le\frac{1}{9}\sum\left(\frac{2ca}{2a+b}+\frac{ca}{2b+c}\right)=\frac{1}{9}\left(\sum\frac{2ca}{2a+b}+\sum\frac{ca}{2b+c}\right)\\&=\frac{1}{9}\sum\left(\frac{2ca}{2a+b}+\frac{bc}{2a+b}\right)=\frac{1}{9}\sum\frac{c(2a+b)}{2a+b}=\frac{a+b+c}{9}=VP.\end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=2b, c=0$ cùng các hoán vị tương ứng.

Lời giải 2. Biến đổi tương đương và thu gọn lại, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(a,b,c)=4(a+b+c)^3-27(a^2b+b^2c+c^2a+abc)\ge 0.$$

Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c. Ta có

$$f(a,b,c)-f(a+c,b,0)=27c(b-c)(b-a)\ge 0,$$

nên ta chỉ cần chứng minh $f(a+c,b,0)\ge 0$ là đủ. Nhưng bất đẳng thức này lại hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức *AM – GM* ta có

$$\begin{aligned}27(a+c)^2b&=\frac{27}{2}\cdot(a+c)\cdot(a+c)\cdot 2b\\&\le\frac{27}{2}\cdot\left[\frac{(a+c)+(a+c)+2b}{3}\right]^3=4(a+b+c)^3.\end{aligned}$$

2. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh*

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+2c)(b+2a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+2a)(c+2b)}}\le\frac{3}{4}.$$

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}\le\frac{a}{4(a+b)}+\frac{a}{4(a+c)},$$

hay là

$$(2a+b+c)\left[a+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\right]\ge 4(a+b)(a+c).$$

Đặt $x=\frac{a+b}{a}, y=\frac{a+c}{a}$ thì hiển nhiên $x,y>1$. Khi đó bất đẳng thức này trở thành

$$(x+y)\left[1+\sqrt{(2x-1)(2y-1)}\right]\ge 4xy,$$

$$x+y-\frac{4xy}{x+y}\ge x+y-1-\sqrt{(2x-1)(2y-1)},$$

$$\frac{(x-y)^2}{x+y}\ge\frac{(x+y-1)^2-(2x-1)(2y-1)}{x+y-1+\sqrt{(2x-1)(2y-1)}},$$

$$(x-y)^2\left[\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y-1+\sqrt{(2x-1)(2y-1)}}\right]\ge 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì

$$x+y-1+\sqrt{(2x-1)(2y-1)}\ge x+y-1+\sqrt{(2-1)(2-1)}=x+y. \qquad (x,y>1)$$

Từ đây, bằng cách thiết lập hai bất đẳng thức tương tự, ta suy ra

$$\sum\frac{a}{a+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}\le\frac{1}{4}\sum\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\sum\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)=\frac{3}{4}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Lời giải 1 của bài toán trước và lời giải của bài toán này đều sử dụng đến đẳng thức. Có thể nói đó là những lời giải rất hay, nhưng nghĩ ra quả thật chả phải dễ dàng gì. Việc phát hiện ra những đẳng thức để tách và ghép có nhiều ý nghĩa trong chứng minh bất đẳng thức. Mời các bạn cùng làm một số bài toán sau để rèn luyện thêm kỹ thuật này

Bài toán 1. *Cho a,b,c là các số thực có tổng bằng 3. Chứng minh*

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{4b^2+c^2+a^2}+\frac{1}{4c^2+a^2+b^2}\le\frac{1}{2}.$$

Bài toán 2. *Với mọi số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2>0$ ta luôn có*

$$\frac{a^2-bc}{4a^2+4b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{4b^2+4c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{4c^2+4a^2+b^2}\ge 0.$$

3. *Chứng minh với mọi a,b,c dương*

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1.$$

Lời giải. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ và chú ý

$$\frac{a^2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{a^2+ab+b^2}=a^2+\frac{ca^2(a+b+c)}{a^2+ab+b^2},$$

ta sẽ đưa điều phải chứng minh trở thành

$$\sum\left[a^2+\frac{ca^2(a+b+c)}{a^2+ab+b^2}\right]\geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca,$$

hay là

$$\frac{ca^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{ab^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{bc^2}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.$$

Ta có thể thấy ngay bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\sum\frac{ca^2}{a^2+ab+b^2}=\sum\frac{c^2a^2}{c(a^2+ab+b^2)}\geq\frac{(\sum ca)^2}{\sum c(a^2+ab+b^2)}=\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.$$

Chứng minh hoàn tất tại đây. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
Nhận xét. Nếu đặt $\frac{b}{a}=x,\frac{c}{b}=y,\frac{a}{c}=z$, ta được $xyz=1$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\geq 1.$$

Đây là một kết quả có nhiều ứng dụng trong giải toán.

4. *Nếu a,b,c là các số thực dương và $k=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ thì*

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}+\frac{1}{a^2+ab+b^2}\leq\frac{2(k^2+k+1)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Lời giải 1. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ và chú ý

$$\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{b^2+bc+c^2}=1+\frac{a(a+b+c)}{b^2+bc+c^2},$$

ta có thể viết lại nó thành

$$(a+b+c)\sum\frac{a}{b^2+bc+c^2}+1\leq\frac{2(a^2+b^2+c^2)^2}{(ab+bc+ca)^2}+\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca},$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$(b^2+bc+c^2)(a^2+bc+a^2)\geq(ab+bc+ca)^2.$$

Suy ra
$$\frac{a}{b^2+bc+c^2}=\frac{a(2a^2+bc)}{(b^2+bc+c^2)(2a^2+bc)}\le\frac{2a^3+abc}{(ab+bc+ca)^2}.$$
Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự, ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn là
$$\frac{(a+b+c)(2a^3+2b^3+2c^3+3abc)}{(ab+bc+ca)^2}+1\le\frac{2(a^2+b^2+c^2)^2}{(ab+bc+ca)^2}+\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}.$$
Thực hiện biến đổi và rút gọn, ta thấy nó tương đương với
$$abc(a+b+c)\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$
là một kết quả cơ bản và quen thuộc. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Lời giải 2. Chú ý ta có đẳng thức sau
$$\sum\frac{1}{b^2+bc+c^2}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}.$$
Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\begin{aligned}&\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}\\&\le\frac{2(a^2+b^2+c^2)^2+2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)^2}{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(ab+bc+ca)^2},\end{aligned}$$
hay là
$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(ab+bc+ca)^2\\&\qquad\le 2(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2).\end{aligned}$$
Bằng phép khai triển trực tiếp, ta có thể viết lại bất đẳng thức trên thành
$$\sum a^4(b^2+c^2)+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ge abc\sum a^2(b+c)+3a^2b^2c^2.$$
Bất đẳng thức này đúng vì theo $AM-GM$ ta có
$$\begin{aligned}a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)&\ge 2abc(a^3+b^3+c^3)\\&\ge abc\sum a^2(b+c),\end{aligned}$$
và $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ge 3a^2b^2c^2$. Chứng minh hoàn tất.

5. *Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho trong chúng không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng khi đó*
$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}+\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

Lời giải. Ta có các phân tích sau đây

$$\begin{aligned}
\sum \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}-2 &= \sum \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}-\sum \frac{2a}{a+b+c}\\
&= \frac{1}{a+b+c}\sum \frac{a\left[(b+c)(a+b+c)-2(b^2+bc+c^2)\right]}{b^2+bc+c^2}\\
&= \frac{1}{a+b+c}\sum \frac{a[b(a-b)-c(c-a)]}{b^2+bc+c^2}\\
&= \frac{1}{a+b+c}\sum \frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2}-\sum \frac{ca(c-a)}{b^2+bc+c^2}\\
&= \frac{1}{a+b+c}\sum \frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2}-\sum \frac{ab(a-b)}{c^2+ca+a^2}\\
&= \frac{1}{a+b+c}\sum \frac{ab(a-b)^2(a+b+c)}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}\\
&= \sum \frac{ab(a-b)^2}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}+\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^2b+b^2c+c^2a}-2 &= \frac{(a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2)^2}{(ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)}\\
&= \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)},
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)-3(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\\
&\qquad = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.
\end{aligned}$$

Ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sum \frac{ab(a-b)^2}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)} \ge \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)},$$

$$\sum ab(a^2+ab+b^2)(a-b)^2 \ge \frac{A\prod(a^2+ab+b^2)}{(ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)},$$

$$\sum ab(a-b)^4+3\sum a^2b^2(a-b)^2-3A \ge \frac{A\prod(a^2+ab+b^2)}{(ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)}-3A,$$

$$\sum ab(a-b)^4+6abc\sum a(a-b)(a-c) \ge \frac{A^2}{(ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)},$$

trong đó $A=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$. Lẽ hiển nhiên, ta có $6abc\sum a(a-b)(a-c)\ge 0$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$ab(a-b)^4+bc(b-c)^4+ca(c-a)^4 \ge \frac{A^2}{(ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)}.$$

Với chú ý ở hai bất đẳng thức $\sum a^2b^2(a-b)^2 \ge A$ và $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \le (ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)$, bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* cho ta

$$\begin{aligned}\sum ab(a-b)^4 = \sum \frac{a^4b^4(a-b)^4}{a^3b^3} &\ge \frac{\left[\sum a^2b^2(a-b)^2\right]^2}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}\\ &\ge \frac{A^2}{(ab^2+bc^2+ca^2)(a^2b+b^2c+c^2a)}.\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $abc=0$.

Nhận xét. Có thể thấy kết quả này mạnh hơn kết quả sau (với cùng điều kiện)

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \ge 2.$$

Ngoài ra, kết quả trên còn có dạng tương đương là

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2} \ge \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

6. *Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca>0$, ta luôn có*

$$\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2} \ge \frac{5}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum \frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2} - \sum \frac{a^2+bc}{\sum a^2+\sum ab} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)},$$

hay là

$$\frac{a^3+abc}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^3+abc}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^3+abc}{a^2+ab+b^2}+\frac{a+b+c}{3} \ge \frac{(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}.$$

Có hai trường hợp xảy ra.

(i) $a^2+b^2+c^2 \ge 2(ab+bc+ca)$. Ta biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\sum \frac{a^3+abc}{b^2+bc+c^2}+\sum a \ge \frac{(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}+\frac{2(a+b+c)}{3},$$

$$3\sum a^2 \sum \frac{a}{b^2+bc+c^2}+6abc\sum \frac{1}{b^2+bc+c^2} \ge \frac{\sum a \sum a^2}{\sum ab}+4\sum a.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\sum \frac{a}{b^2+bc+c^2} = \sum \frac{a^2}{a(b^2+bc+c^2)} \ge \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a(b^2+bc+c^2)} = \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+3abc\sum\frac{1}{b^2+bc+c^2}\geq 2(a+b+c),$$

hay tương đương

$$\frac{(a+b+c)\left(\sum a^2-2\sum ab\right)}{ab+bc+ca}+3abc\sum\frac{1}{b^2+bc+c^2}\geq 0,$$

là một bất đẳng thức đúng theo giả thiết $a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$.

(ii) $2(ab+bc+ca)\geq a^2+b^2+c^2$. Sử dụng bất đẳng thức *Vornicu – Schur*, ta dễ dàng chứng minh được

$$\sum\frac{a^3+abc}{b^2+bc+c^2}-\sum\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}=\sum\frac{a(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2}\geq 0.$$

Mặt khác, theo một kết quả quen biết thì

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c},$$

nên kết hợp với trên, ta suy ra được

$$\frac{a^3+abc}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^3+abc}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^3+abc}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng tỏ được rằng

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}.$$

Đây là một bất đẳng thức thuần nhất với ba biến a,b,c nên ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca$, bất đẳng thức trên trở thành

$$2(1-2q)+\frac{1}{3}\geq\frac{1}{3q},$$

hay tương đương với $\frac{(4q-1)(1-3q)}{3q}\geq 0$, đúng theo giả thiết $4q\geq 1$.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị của bộ số $(t,t,0)$ với $t>0$.

7. *Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Hãy chứng minh*

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}+\frac{1}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{1}{3(ab+bc+ca)}+\frac{8}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $(a+b+c)^2$ và chú ý rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{b^2+bc+c^2}=\frac{a^2+2a(b+c)+(b+c)^2}{b^2+bc+c^2}=\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{2a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+1,$$

ta sẽ đưa điều phải chứng minh trở thành

$$\sum\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}+2\sum\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}\ge 5+\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\begin{aligned}\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2}&\ge\frac{5}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}\\&=1+\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)},\end{aligned}$$

theo kết quả bài toán trước, và

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\ge 2,$$

là một kết quả quen thuộc.

8. *Nếu $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)>0$ thì*

$$\frac{a^3}{b^2+4bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2+4ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2+4ab+b^2}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức *Hölder* thì

$$\sum\frac{a^3}{b^2+4bc+c^2}\sum a^2(b^2+4bc+c^2)\sum a\ge\left(\sum a^2\right)^3.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{a^3}{b^2+4bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2+4ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2+4ab+b^2}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(a+b+c)\sum a^2(b^2+4bc+c^2)},$$

tức là

$$\frac{a^3}{b^2+4bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2+4ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2+4ab+b^2}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ cùng các hoán vị.

9. *Giả sử a,b,c là các số thực dương. Hãy chứng minh*

$$\frac{a+b}{a^2+bc+c^2}+\frac{b+c}{b^2+ca+a^2}+\frac{c+a}{c^2+ab+b^2}\ge\frac{27(ab^2+bc^2+ca^2+3abc)}{(a+b+c)^4}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\sum \frac{a+b}{a^2+bc+c^2} \geq \frac{[\sum(a+b)]^2}{\sum(a+b)(a^2+bc+c^2)}$$
$$= \frac{4(a+b+c)^2}{\sum a^3+\sum a^2b+3\sum ab^2+3abc}.$$

Do đó bài toán được đưa về

$$4(a+b+c)^6 \geq 27\left(\sum a^3+\sum a^2b+3\sum ab^2+3abc\right)\left(\sum ab^2+3abc\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM – GM*, ta có

$$VT \leq 9\left[\frac{\left(\sum a^3+\sum a^2b+3\sum ab^2+3abc\right)+3\left(\sum ab^2+3abc\right)}{}\right]^2$$
$$= 9\left[\frac{(a+b+c)^3+ab^2+bc^2+ca^2+6abc}{2}\right]^2.$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4(a+b+c)^3 \geq 3[(a+b+c)^3+ab^2+bc^2+ca^2+6abc],$$

hay tương đương

$$(a+b+c)^3 \geq 3(ab^2+bc^2+ca^2+abc)+15abc.$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$3(ab^2+bc^2+ca^2+abc) \leq \frac{4(a+b+c)^3}{9},$$

là một kết quả đã biết, và

$$15abc \leq \frac{5(a+b+c)^3}{9}$$

theo *AM – GM*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

10. *Với mọi $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca>0$ ta luôn có*

$$\frac{a^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^3}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^3}{2a^2-ab+2b^2} \geq \frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\sum \frac{a^3}{2b^2-bc+2c^2} = \sum \frac{a^8}{a^5(2b^2-bc+2c^2)} \geq \frac{(a^4+b^4+c^4)^2}{\sum a^5(2b^2-bc+2c^2)}$$
$$= \frac{(a^4+b^4+c^4)^2}{2\sum a^5(b^2+c^2)-abc(a^4+b^4+c^4)}.$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{2\sum a^5(b^2+c^2)-abc(a^4+b^4+c^4)} \ge \frac{1}{a^3+b^3+c^3}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(a^4+b^4+c^4)(a^3+b^3+c^3) \ge 2\sum a^5(b^2+c^2)-abc(a^4+b^4+c^4),$$

hay là

$$a^7+b^7+c^7+abc(a^4+b^4+c^4)+\sum a^4(b^3+c^3) \ge 2\sum a^5(b^2+c^2).$$

Từ bất đẳng thức *Schur* bậc bảy

$$a^5(a-b)(a-c)+b^5(b-c)(b-a)+c^5(c-a)(c-b) \ge 0,$$

ta suy ra

$$a^7+b^7+c^7+abc(a^4+b^4+c^4) \ge a^6(b+c)+b^6(c+a)+c^6(a+b).$$

Sử dụng bất đẳng thức này, ta sẽ đưa bài toán về

$$\sum a^6(b+c)+\sum a^4(b^3+c^3) \ge 2\sum a^5(b^2+c^2),$$

tương đương với

$$ab(a^3+b^3)(a-b)^2+bc(b^3+c^3)(b-c)^2+ca(c^3+a^3)(c-a)^2 \ge 0,$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hoặc $a=b, c=0$ cùng các hoán vị.

11. *Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. Chứng minh*

$$\sum \frac{1}{4a+b+c}+\frac{4(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \le \sum \frac{1}{b+c}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum \left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{4a+b+c}\right) \ge \frac{4(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)},$$

hay là

$$\sum \frac{c}{(b+c)(4a+b+c)} \ge \frac{a+b+c}{(a+b+c)^2+ab+bc+ca}.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\sum \frac{c}{(b+c)(4a+b+c)} \ge \frac{(a+b+c)^2}{\sum(b+c)(4a+b+c)}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+b+c}{(b+c)(4a+b+c)+(c+a)(4b+c+a)+(a+b)(4c+a+b)} \ge \frac{1}{(a+b+c)^2+ab+bc+ca}.$$

Khai triển và thu gọn, ta được bất đẳng thức *Schur* bậc ba

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ cùng các hoán vị.

12. *Nếu a,b,c là các số thực dương thì*

$$\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{ab}{(b+c)(c+a)}\ge\frac{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}.$$

Lời giải. Ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau

$$\begin{aligned}\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}&\ge 1-\frac{ab+bc+ca}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)},\\ 1-\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}&\ge 1-\frac{ab+bc+ca}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)},\\ \frac{ab+bc+ca}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}&\ge\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},\\ (ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)&\ge 4abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Khai triển và thu gọn, ta thu được

$$a^3(b^2+c^2)+b^3(c^2+a^2)+c^3(a^2+b^2)\ge 2abc(a^2+b^2+c^2),$$

đúng theo $AM-GM$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

13. *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho có thể được viết lại thành

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}-1.$$

Sử dụng các đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\sum\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)},$$

và

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}-1=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2},$$

ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}\ge\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}.$$

Nếu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ thì bất đẳng thức này là hiển nhiên. Nếu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$, sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\sum\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}=\sum\frac{(a-b)^4}{2(a-b)^2(b+c)(c+a)}\ge\frac{\left[\sum(a-b)^2\right]^2}{2\sum(a-b)^2(b+c)(c+a)}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]^2}{2\sum(a-b)^2(b+c)(c+a)} \geq \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(a+b+c)^2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 2\sum(a-b)^2(b+c)(c+a),$$

hay là

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b) \geq 0,$$

chính là bất đẳng thức *Schur* bậc bốn. Với $a \geq b \geq c$, đẳng thức đạt được khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$.

Nhận xét. Bằng phương pháp tương tự, bạn đọc cũng có thể chứng minh được kết quả sau đây

Bài toán. *Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca>0$ ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq \frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

14. *Với mọi $a,b,c>0$ thỏa mãn $3(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=12$ ta luôn có*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Chú ý rằng từ bất đẳng thức *AM – GM* và điều kiện của bài toán ta dễ dàng suy ra được $3 \leq a^2+b^2+c^2 \leq 4$. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &= \left[\sum\frac{a\sqrt{a+c}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\right]^2\\ &\leq \sum a(a+c)\sum\frac{a}{(a+b)(a+c)}\\ &= \frac{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng kết quả quen thuộc

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a),$$

nên kết hợp với trên, ta suy ra

$$\begin{aligned}\left(\sum\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &\leq \frac{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\ &\leq \frac{9(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{4(a+b+c)}.\end{aligned}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{4(a+b+c)} \leq \frac{9}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $3(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=12$ ta có bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{6-(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{24-5(a^2+b^2+c^2)}}\le 1,$$

hay là

$$(3-a^2-b^2-c^2)(4-a^2-b^2-c^2)\le 0,$$

đúng do $3\le a^2+b^2+c^2\le 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

15. *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{5}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với từng bất đẳng thức trong dãy sau

$$(a+b)(b+c)(c+a)\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2}$$
$$\ge\frac{5}{4}\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca},$$

$$\sum\frac{a^2(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2}$$
$$\ge\frac{5(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{4}-\frac{5abc(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)},$$

$$\sum\frac{a^2(a-b)(a-c)}{b+c}+2(a^3+b^3+c^3)+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2}$$
$$\ge\frac{5(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{4}-\frac{5abc(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}.$$

Sử dụng các bất đẳng thức *Vornicu – Schur* và *AM – GM*, ta có $\sum\frac{a^2(a-b)(a-c)}{b+c}\ge 0$ và $\frac{5abc(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}\ge\frac{5abc}{4}$. Do đó, để chứng minh bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh được bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$2(a^3+b^3+c^3)+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2}\ge\frac{5(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{4}-\frac{5abc}{4}.$$

Sau khi thu gọn, ta thấy nó tương đương với

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b),$$

hiển nhiên đúng vì đây chính là bất đẳng thức *Schur* bậc ba. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hoặc $a=b,c=0$ cùng các hoán vị.

Lời giải 2. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2=\sum\frac{a^4}{a^2(b+c)^2}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2}+\frac{1}{2}\geq\frac{5}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Đây là một bất đẳng thức thuần nhất với ba biến a,b,c. Vì vậy ta hoàn toàn có thể giả sử một cách không giảm tổng quát rằng $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca$ và $r=abc$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1-2q)^2}{q^2-r}+6\geq\frac{5}{2q}.$$

Có hai trường hợp xảy ra.

(i) $0<q\leq\frac{1}{4}$. Trong trường hợp này, ta có

$$\frac{(1-2q)^2}{q^2-r}+6\geq\frac{(1-2q)^2}{q^2}+6=\frac{5}{2q}+\frac{(2-5q)(1-4q)}{2q^2}\geq\frac{5}{2q}.$$

(ii) $\frac{1}{4}\leq q\leq\frac{1}{3}$. Từ bất đẳng thức *Schur* bậc bốn

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b),$$

ta suy ra ngay $r\geq\frac{(4q-1)(1-q)}{6}$, và nó dẫn tới

$$\begin{aligned}\frac{(1-2q)^2}{q^2-r}+6&\geq\frac{(1-2q)^2}{q^2-\frac{(4q-1)(1-q)}{6}}+6=\frac{6(1-2q)^2}{10q^2-5q+1}+6\\&=\frac{5}{2q}+\frac{(5-14q)(1-3q)(4q-1)}{2q(10q^2-5q+1)}\geq\frac{5}{2q}.\end{aligned}$$

Vậy bài toán được giải quyết trọn vẹn.

16. *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. Hãy chứng minh*

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

Lời giải 1. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $(a+b+c)^2$, ta thấy nó tương đương với

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{9(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)},$$

hay là

$$2\sum\frac{a}{b+c}+\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\geq\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Theo kết quả bài toán trước thì

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\geq\frac{5(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}-\frac{1}{2}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$2\sum \frac{a}{b+c} + \frac{5}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - \frac{1}{2} \ge \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca},$$

tương đương với

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$VT = \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)} = VP.$$

Bài toán được chứng minh xong. Với giả thiết $a \ge b \ge c$, ta có đẳng thức đạt được khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$.

Lời giải 2. Ta có

$$\begin{aligned}\sum a^3 + \sum ab(a+b) + 3abc &= \sum a(a+b)(a+c)\\ &= \sum a\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)(a+b)(a+c)\\ &= \sum \frac{ca(c+a)(a+b)}{b+c} + \sum \frac{ab(c+a)(a+b)}{b+c}\\ &= \sum \frac{ca(c+a)(a+b)}{b+c} + \sum \frac{ca(b+c)(c+a)}{a+b}\\ &= \sum ca(c+a)\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\right).\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}\sum a(a-b)(a-c) &= \sum a(a+b)(a+c) - 2\sum ab(a+b)\\ &= \sum ca(c+a)\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}\right) - 2\sum ca(c+a)\\ &= \sum ca(c+a)\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}-2\right) = \sum \frac{ca(c+a)(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}.\end{aligned}$$

Quay trở lại bài toán của ta. Nhân cả hai vế với $ab+bc+ca$, ta có thể viết lại nó thành

$$\sum \frac{a}{b+c} + \sum \frac{ab}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4}, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\sum \frac{a}{b+c} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 2\\ \ge \frac{1}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \sum \frac{ab}{(a+b)^2}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Từ phân tích ở trên, ta có

$$\sum \frac{a}{b+c} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 2 = \frac{\sum a(a-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{\sum ab(a+b)^2(a-b)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}.$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-\sum\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{4(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}.$$

Do đó ta có bất đẳng thức (2.2) tương đương

$$4\sum ab(a+b)^2(a-b)^2\geq(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$VT\geq 4\sum ab\cdot 4ab(a-b)^2=16\sum a^2b^2(a-b)^2\geq\sum a^2b^2(a-b)^2.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được

$$a^2b^2(a-b)^2+b^2c^2(b-c)^2+c^2a^2(c-a)^2\geq(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2,$$

hay tương đương

$$2abc\left[a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\right]\geq 0,$$

đúng theo bất đẳng thức *Schur* bậc ba.

Nhận xét. Chắc hẳn bạn đọc ai cũng biết đến bất đẳng thức nổi tiếng này. Không những nổi tiếng vì vẻ đẹp và độ khó, nó còn nổi tiếng vì tầm ứng dụng quan trọng trong việc chứng minh các bất đẳng thức khác. Sau đây sẽ là một ví dụ minh họa cho điều này. Mà đáng ngạc nhiên hơn, bài toán dưới đây còn mạnh hơn cả chính bất đẳng thức *Iran 96*.

Bài toán. *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Chứng minh*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{2bc}{(b+c)^2}+\frac{2ca}{(c+a)^2}+\frac{2ab}{(a+b)^2}\geq\frac{5}{2}.$$

Chúng ta hãy cùng lý giải một chút tại sao bất đẳng thức này lại mạnh hơn bất đẳng thức *Iran 96*. Thật vậy, để bất đẳng thức *Iran 96* ở dạng (2.1) và sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta được

$$\sum\frac{a}{b+c}+\sum\frac{ab}{(a+b)^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}+\sum\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}+\sum\frac{ab}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4},$$

hay là

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{2bc}{(b+c)^2}+\frac{2ca}{(c+a)^2}+\frac{2ab}{(a+b)^2}\geq\frac{5}{2}.$$

Đây chính là bất đẳng thức ở bài toán trên. Bây giờ ta sẽ chứng minh nó sử dụng bất đẳng thức *Iran 96*.

Lời giải. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a+b+c$, ta thấy nó tương đương với

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{ab+bc+ca}+2\sum\frac{bc}{b+c}+2abc\sum\frac{1}{(b+c)^2}\geq\frac{5(a+b+c)}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Iran 96*, ta có

$$\begin{aligned}VT&\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{ab+bc+ca}+2\sum\frac{bc}{b+c}+2abc\cdot\frac{9}{4(ab+bc+ca)}\\&=\frac{2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+9abc}{2(ab+bc+ca)}+2\sum\frac{bc}{b+c}.\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+9abc}{2(ab+bc+ca)}+2\sum\frac{bc}{b+c}\geq\frac{5(a+b+c)}{2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với từng bất đẳng thức trong dãy sau

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+9abc}{ab+bc+ca}-3(a+b+c)\geq\sum(b+c)-4\sum\frac{bc}{b+c},$$

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)-\sum ab(a+b)}{ab+bc+ca}\geq\sum\frac{(b-c)^2}{b+c},$$

$$\frac{\sum(2a+b+c)(a-b)(a-c)}{ab+bc+ca}\geq\sum(a-b)(a-c)\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right),$$

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\geq 0,$$

với

$$x=(2a+b+c)\left[\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(c+a)(a+b)}\right]=\frac{a^2(2a+b+c)}{(ab+bc+ca)(c+a)(a+b)}\geq 0,$$

và các biểu thức y,z tương tự. Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$ thì ta dễ thấy $x\geq y$, và nó dẫn tới

$$\begin{aligned}x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)&\geq y(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)\\&=y(a-b)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn chỉnh.

17. *Giả sử a,b,c là các số thực không âm, trong chúng không có hai số nào đồng thời bằng 0. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{5}{2}.$$

Lời giải. Dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+2\sum\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{5}{2}.$$

Theo một kết quả quen biết thì

$$\frac{2bc}{(b+c)^2}+\frac{2ca}{(c+a)^2}+\frac{2ab}{(a+b)^2}\geq\frac{5}{2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này cho $(a+b)(b+c)(c+a)$ và để ý rằng

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{b+c}=\frac{a^2(a-b)(a-c)}{b+c}+2a^3,$$

và

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}=(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}.$$

ta có thể viết lại nó thành

$$\sum\frac{a^2(a-b)(a-c)}{b+c}+2(a^3+b^3+c^3)+2abc$$
$$\geq(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}.$$

Dễ thấy $\sum\frac{a^2(a-b)(a-c)}{b+c}\geq 0$ và $\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\geq abc$ theo các bất đẳng thức *Vornicu – Schur* và *AM – GM* nên bài toán được đưa về

$$2(a^3+b^3+c^3)+2abc\geq(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-abc,$$

hay tương đương

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0.$$

Đây chính là bất đẳng thức *Schur* bậc ba.

Nhận xét. Từ kết quả này chúng ta suy ra kết quả sau

Bài toán. *Với $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)>0$ ta có*

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}+\frac{6abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{9}{4}.$$

18. *Với a,b,c là các số thực dương, hãy chứng minh*

$$\frac{1}{(c+a)^2(a+b)^2}+\frac{1}{(a+b)^2(b+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2(c+a)^2}\leq\frac{2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Lời giải. Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(ab+bc+ca)^2 \le (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

Lấy $(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$ trừ đi cho cả hai vế rồi thực hiện biến đổi, ta được

$$\left(\sum a\sum ab\right)^2 - \left(\sum a^2+\sum ab\right)\left(\sum ab\right)^2 \ge \left(\sum a\sum ab\right)^2 - \prod(a+b)^2,$$

$$\left(\sum ab\right)^3 \ge \left[\sum a\sum ab - \prod(a+b)\right]\left[\sum a\sum ab + \prod(a+b)\right],$$

$$(ab+bc+ca)^3 \ge abc\left[(a+b+c)(ab+bc+ca)+(a+b)(b+c)(c+a)\right].$$

Sử dụng bất đẳng thức hiển nhiên $(a+b)(b+c)(c+a) \le (a+b+c)(ab+bc+ca)$, ta sẽ đưa điều phải chứng minh trở thành

$$(ab+bc+ca)^3 \ge 2abc(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

hay tương đương với $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 0$, hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b\to 0, c>0$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự như trên, ta chứng minh được

Bài toán. *Với các số thực dương a,b,c ta có*

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2} \le \left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2.$$

19. *Cho các số dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh*

$$\frac{1}{2a^3+3a+2}+\frac{1}{2b^3+3b+2}+\frac{1}{2c^3+3c+2} \ge \frac{3}{7}.$$

Lời giải. Do $abc=1$ và $a,b,c>0$ nên tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\frac{yz}{x^2}, b=\frac{zx}{y^2}, c=\frac{xy}{z^2}$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\sum \frac{x^6}{2x^6+2y^3z^3+3x^4yz} \ge \frac{3}{7}.$$

Theo *Cauchy – Schwarz* thì

$$\sum \frac{x^6}{2x^6+2y^3z^3+3x^4yz} \ge \frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{2\sum x^6+2\sum x^3y^3+3xyz\sum x^3}.$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{2\sum x^6+2\sum x^3y^3+3xyz\sum x^3} \ge \frac{3}{7},$$

hay là

$$x^6+y^6+z^6+8(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3) \ge 9xyz(x^3+y^3+z^3).$$

Chuẩn hóa $xyz=1$ và thay x,y,z lần lượt bởi x^3,y^3,z^3, bất đẳng thức trên trở thành

$$P(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - 9(x+y+z) \ge 0.$$

Ta sẽ chứng minh $P(x,y,z) \geq P\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy},z\right)$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
P(x,y,z) - P\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy},z\right) &= (x-y)^2 + \frac{8\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{xy} - 9\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 + \frac{8}{xy} - 9\right] \\
&\geq \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \left(2\sqrt{xy}+2\sqrt{xy}+\frac{8}{xy}-9\right) \\
&\geq \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \left(3\sqrt[3]{32}-9\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta đã có $P(x,y,z) \geq P\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy},z\right)$. Bây giờ chỉ cần chứng minh $P\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy},z\right) \geq 0$. Thay $\sqrt{xy} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ rồi thực hiện biến đổi, ta được

$$\left(\sqrt{z}-1\right)^2\left(z^2+2z\sqrt{z}-6z+2\sqrt{z}+10\right) \geq 0,$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

20. *Nếu $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=3$ thì*

$$\frac{a+bc}{a^2+1}+\frac{b+ca}{b^2+1}+\frac{c+ab}{c^2+1} \leq \frac{9}{2}-\frac{3abc}{2}.$$

Lời giải. Ta thực hiên biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{bc(a^2+1)+a-a^2bc}{a^2+1} \leq \frac{9}{2}-\frac{3abc}{2} \\
&\sum bc + (1-abc)\sum \frac{a}{a^2+1} \leq \sum bc + \frac{3}{2} - \frac{3abc}{2} \\
&(1-abc)\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{a^2+1}-\frac{b}{b^2+1}-\frac{c}{c^2+1}\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{a}{2a}+\frac{b}{2b}+\frac{c}{2c} = \frac{3}{2},$$

và $abc \leq \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{3/2} = 1$ theo $AM-GM$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Qua lời giải trên, chúng ta có thể thấy nếu thay điều kiện $ab+bc+ca=3$ bởi $a+b+c=3$ hay $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$ thì bất đẳng thức vẫn đúng. Ngoài ra, nếu $abc=1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

21. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh*

$$3+\frac{1}{2}\sum(a-b)^2 \geq \frac{a+b^2c^2}{b+c}.$$

Lời giải. Với điều kiện $ab+bc+ca=3$, ta có thể viết lại bất đẳng thức đã cho thành

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sum \frac{a}{b+c}+\sum \frac{b^2c^2}{b+c}.$$

Cũng từ $ab+bc+ca=3$, ta dễ dàng có $a+b+c \geq 3$. Bây giờ với chú ý rằng

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a(ab+bc+ca)}{3(b+c)}=\frac{a^2}{3}+\frac{abc}{3(b+c)} \leq \frac{a^2}{3}+\frac{a(b+c)}{12},$$

và $\frac{b^2c^2}{b+c} \leq \frac{bc(b+c)}{4}$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3} \geq \frac{1}{2}+\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{4},$$

tương đương với

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}+\frac{3abc}{4} \geq \frac{1}{2}+\frac{3(a+b+c)}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Schur*, ta có

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+3abc &\geq a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c} \\ &\geq 2(ab+bc+ca)=6. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}+\frac{3abc}{4} &= \frac{5(a^2+b^2+c^2)}{12}+\frac{a^2+b^2+c^2+3abc}{4} \\ & \frac{5(a^2+b^2+c^2)}{12}+\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{5(a^2+b^2+c^2)}{12}+1 \geq \frac{3(a+b+c)}{4},$$

hay là $5(a^2+b^2+c^2)+12 \geq 9(a+b+c)$. Theo *Cauchy – Schwarz* thì $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$. Do đó bài toán được đưa về

$$\frac{5(a+b+c)^2}{3}+12 \geq 9(a+b+c),$$

tương đương với $(a+b+c-3)\left(a+b+c-\frac{12}{5}\right) \geq 0$, hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

22. *Nếu a,b,c là các số thực không âm thì*

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \leq \frac{3(a+b+c)}{2}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát của bài toán, giả sử $a \geq b \geq c$. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \leq \sqrt{2(b^2+c^2+ca+ab)}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{2(b^2+c^2+ca+ab)} \leq \frac{3(a+b+c)}{2}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $b+c=1$. Đặt $s=bc \geq 0$, bất đẳng thức trên trở thành

$$f(s)=\frac{3(a+1)}{2}-\sqrt{a^2+s}-\sqrt{2(1+a-2s)} \geq 0.$$

Ta có

$$f'(s)=\frac{2}{\sqrt{2(1+a-2s)}}-\frac{1}{2\sqrt{a^2+s}} \geq \frac{2}{\sqrt{2(2a+a)}}-\frac{1}{2a}=\frac{1}{\sqrt{6a}}-\frac{1}{2a}>0, \qquad \left(a \geq \frac{1}{2}\right)$$

nên $f(s)$ là hàm đồng biến. Suy ra $f(s) \geq f(0)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh $f(0) \geq 0$, tức là

$$\frac{3(a+1)}{2}-a-\sqrt{2(1+a)} \geq 0,$$

hay

$$\frac{a+1}{2}+1-\sqrt{2(1+a)} \geq 0,$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *AM – GM*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ cùng các hoán vị.

23. *Với mọi $a,b,c>0$ ta luôn có*

$$a\sqrt{a^2+2bc}+b\sqrt{b^2+2ca}+c\sqrt{c^2+2ab} \geq \sqrt{3}(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có hai trường hợp cần xét.

(i) $a \geq 2(b+c)$. Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM*, ta có

$$\begin{aligned} VT &\geq a^2+b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+b^2+c^2 \\ &\geq \frac{a^2}{2}+2(b+c)^2+b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+3b^2+3c^2+4bc \\ &\geq \frac{a^2}{4}+3b^2+\frac{a^2}{4}+3c^2+\sqrt{3bc} \geq \sqrt{3}(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

(ii) $a<2(b+c)$. Bình phương hai vế bất đẳng thức đã cho, ta thu được

$$a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c)+2\sum bc\sqrt{(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 3(ab+bc+ca)^2.$$

Ta có $bc\sqrt{(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq bc(ab+bc+ca)$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với $(b-c)^2(2b+2c-a) \geq 0$, hiển nhiên đúng. Tương tự, ta cũng có

$$ab\sqrt{(a^2+2bc)(b^2+2ca)} \geq ab(ab+bc+ca),$$
$$ca\sqrt{(c^2+2ab)(a^2+2bc)} \geq ca(ab+bc+ca).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại và sử dụng $a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, ta có ngay

$$\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c)+2\sum bc\sqrt{(b^2+2ca)(c^2+2ab)}\\
&\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)+2\sum bc(ab+bc+ca)\\
&= 3(ab+bc+ca)^2.
\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

24. *Nếu a,b,c là các số thực thuộc $[-1;1]$ thỏa mãn điều kiện*

$$1+2abc \geq a^2+b^2+c^2,$$

thì với mọi n nguyên dương ta luôn có bất đẳng thức

$$1+2(abc)^n \geq a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $(a-bc)^2 \leq (1-b^2)(1-c^2)$. Một cách tương tự, ta cũng có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$(a^n-b^nc^n)^2 \leq (1-b^{2n})(1-c^{2n}).$$

Với chú ý ở $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có hằng đẳng thức cơ bản sau

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Vì thế bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned}
&(a-bc)^2(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\ldots+ab^{n-2}c^{n-2}+b^{n-1}c^{n-1})^2\\
&\leq (1-b^2)(1+b^2+\ldots+b^{2n-4}+b^{2n-2})(1-c^2)(1+c^2+\ldots+c^{2n-4}+c^{2n-2}).
\end{aligned}$$

Sử dụng giả thiết $(a-bc)^2 \leq (1-b^2)(1-c^2)$, ta sẽ đưa điều phải chứng minh trở thành

$$\begin{aligned}
&(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\ldots+ab^{n-2}c^{n-2}+b^{n-1}c^{n-1})^2\\
&\leq (1+b^2+\ldots+b^{2n-4}+b^{2n-2})(1+c^2+\ldots+c^{2n-4}+c^{2n-2}).
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* và bất đẳng thức về dấu giá trị tuyệt đối, ta có

$$\begin{aligned}
&(1+b^2+\ldots+b^{2n-4}+b^{2n-2})(1+c^2+\ldots+c^{2n-4}+c^{2n-2})\\
&\geq (1+|bc|+\ldots+|bc|^{n-2}+|bc|^{n-1})^2\\
&\geq (|a|^{n-1}+|a|^{n-2}|bc|+\ldots+|a||bc|^{n-2}+|bc|^{n-1})^2\\
&\geq (a^{n-1}+a^{n-2}bc+\ldots+ab^{n-2}c^{n-2}+b^{n-1}c^{n-1})^2.
\end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

25. *Cho các số thực a,b,c có tổng bằng 0. Chứng minh*

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+6abc \geq -3.$$

Lời giải. Do $a^2b^2c^2 = ab\cdot bc\cdot ca \geq 0$ nên trong ba số ab,bc,ca tồn tại ít nhất một số không âm. Giả sử $ab \geq 0$. Khi đó, từ $a+b+c=0$ ta suy ra $c=-(a+b)$, và do đó bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$(a^2+b^2)(a+b)^2+a^2b^2-6ab(a+b)+3 \geq 0,$$

hay là

$$(a^2+ab+b^2)^2-6ab(a+b)+3 \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
VT &\geq (a^2+ab+b^2)^2-\frac{3ab[(a+b)^2+4]}{2}+3\\
&= \frac{(a^2+ab+b^2)^2}{3}+\frac{2(a^2+ab+b^2)^2}{3}-\frac{3ab(a+b)^2}{2}-6ab+3\\
&\geq \frac{9a^2b^2}{3}+2ab(a^2+ab+b^2)-\frac{3ab(a+b)^2}{2}-6ab+3\\
&\geq 3a^2b^2+\frac{3ab(a+b)^2}{2}-\frac{3ab(a+b)^2}{2}-6ab+3=3(ab-1)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=-2$ cùng các hoán vị.

26. *Cho a,b,c là các số thực có tổng bằng 3. Chứng minh*

$$a^4+b^4+c^4+2(a^3+b^3+c^3)+18 \geq 9(a^2+b^2+c^2).$$

Lời giải. Thuần nhất hóa bất đẳng thức đã cho, ta cần chứng minh

$$9(a^4+b^4+c^4)+6(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)+2(a+b+c)^4 \geq 9(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2),$$

hay là

$$8(a^4+b^4+c^4)-6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-4\sum a^3(b+c)+6abc(a+b+c) \geq 0.$$

Ta có các phân tích sau

$$8\sum a^4-8\sum a^2b^2=4\sum(a^2-b^2)^2,$$
$$2\sum a^2b^2-2abc\sum a=\sum c^2(a-b)^2,$$

và

$$4\sum a^3(b+c)-8abc\sum a=4\sum c(a-b)(a^2-b^2),$$

nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$4\sum(a^2-b^2)^2-4\sum c(a-b)(a^2-b^2)+\sum c^2(a-b)^2 \geq 0,$$

tương đương với

$$\sum(a-b)^2(2a+2b-c)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc a,b,c là một hoán vị của bộ số $(-1,2,2)$.

27. *Chứng minh với mọi a,b,c thực*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\sum a^4 - \sum a^2b^2 + 3\sum a^2b^2 - 3abc\sum a \geq 3\sum a^3b - 3abc\sum a.$$

Sử dụng các phân tích

$$\sum a^4 - \sum a^2b^2 = \frac{1}{2}\sum(a^2-b^2)^2,$$

$$3\sum a^2b^2 - 3abc\sum a = \frac{1}{2}\sum(2bc-ca-ab)^2,$$

và

$$\begin{aligned} 3\sum a^3b - 3abc\sum a &= -3\sum bc(a^2-b^2) + \sum(ab+bc+ca)(a^2-b^2) \\ &= -\sum(2bc-ca-ab)(a^2-b^2), \end{aligned}$$

ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{2}\sum(a^2-b^2)^2 - \sum(2bc-ca-ab)(a^2-b^2) + \frac{1}{2}\sum(2bc-ca-ab)^2 \geq 0,$$

hay là

$$\frac{1}{2}\sum(a^2-b^2-2bc+ca+ab)^2 \geq 0,$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc a,b,c là một hoán vị tương ứng của bộ số $\left(\sin^2\frac{4\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{\pi}{7}\right)$.

Nhận xét. Ta có kết quả tổng quát hơn là

Bài toán. *Với mọi số thực a,b,c,m,n,p,g thỏa mãn $m \geq 0$ và $3m(m+n) \geq p^2+pg+g^2$ ta luôn có*

$$m\sum a^4 + n\sum a^2b^2 + p\sum a^3b + g\sum ab^3 - (m+n+p+g)abc\sum a \geq 0.$$

28. *Nếu a,b,c là các số thực dương và $n \geq 2$ thỏa mãn $a^n+b^n+c^n = 3$ thì*

$$a^{n+1}b^n + b^{n+1}c^n + c^{n+1}a^n \leq 3.$$

Lời giải. Để chứng minh bài toán này, chúng ta cần có kết quả sau

Bổ đề. *Với các số thực dương x,y,z có tổng bằng 3 ta có bất đẳng thức*

$$(x^2y+y^2z+z^2x)(xy+yz+zx) \leq 9.$$

Chứng minh. Bạn đọc có thể tự chứng minh lấy dựa vào kết quả bài toán vừa rồi.

Quay trở lại bài toán của ta. Đặt $x=a^n, y=b^n$ và $z=c^n$ với $x,y,z>0$. Từ giả thiết, ta có $x+y+z=3$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$xy\sqrt[n]{x} + yz\sqrt[n]{y} + zx\sqrt[n]{z} \leq 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Hölder*, ta có

$$\left(xy\sqrt[n]{x}+yz\sqrt[n]{y}+zx\sqrt[n]{z}\right)^n \le (xy+yz+zx)^{n-1}(x^2y+y^2z+z^2x).$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức cơ bản $xy+yz+zx \le 3$ cùng với bổ đề trên (chú ý $n \ge 2$)

$$\begin{aligned}&(xy+yz+zx)^{n-1}(x^2y+y^2z+z^2x)\\ &\qquad = (xy+yz+zx)^{n-2}\cdot(xy+yz+zx)(x^2y+y^2z+z^2x)\\ &\qquad \le 3^{n-2}\cdot 9 = 3^n,\end{aligned}$$

nên kết hợp với trên, ta suy ra được

$$\left(xy\sqrt[n]{x}+yz\sqrt[n]{y}+zx\sqrt[n]{z}\right)^n \le 3^n,$$

hay

$$xy\sqrt[n]{x}+yz\sqrt[n]{y}+zx\sqrt[n]{z} \le 3.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$, tức là $a=b=c=1$.

29. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực a,b,c*

$$3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \ge a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3.$$

Lời giải 1. Do $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \le |a|^3|b|^3+|b|^3|c|^3+|c|^3|a|^3$, và

$$\begin{aligned}&(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\\ &\qquad \ge \left(|a|^2-|ab|+|b|^2\right)\left(|b|^2-|bc|+|c|^2\right)\left(|c|^2-|ca|+|a|^2\right),\end{aligned}$$

nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đã cho với $a,b,c \ge 0$. Bây giờ, ta có các đẳng thức sau

$$4(a^2-ab+b^2) = (a+b)^2-3(a-b)^2,$$

$$4(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = (2c^2-bc-ca+2ab)^2+3c^2(a-b)^2,$$

nên bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* cho ta

$$\begin{aligned}&16(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\\ &\qquad \ge \left[(a+b)(2c^2-bc-ca+2ab)+3c(a-b)^2\right]^2\\ &\qquad = 4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-4abc]^2.\end{aligned}$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-4abc]^2 \ge \frac{16(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{3}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với từng bất đẳng thức trong dãy sau

$$\left[\sum ab(a+b)-4abc\right]^2-4a^2b^2c^2 \ge \frac{4}{3}\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-3a^2b^2c^2\right),$$

$$\left[\sum ab(a+b)-2abc\right]\left[\sum ab(a+b)-6abc\right] \ge \frac{2}{3}(ab+bc+ca)\sum a^2(b-c)^2,$$

$$\left[\sum ab(a+b)-2abc\right]\sum a(b-c)^2 \ge \frac{2}{3}(ab+bc+ca)\sum a^2(b-c)^2.$$

Do $[\sum ab(a+b)-2abc]\sum a(b-c)^2 \geq \frac{2}{3}\sum ab(a+b)\sum a(b-c)^2$ nên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\sum ab(a+b)\sum a(b-c)^2 \geq (ab+bc+ca)\sum a^2(b-c)^2,$$

tương đương với

$$abc(a+b+c)\sum a(b-c)^2+\sum a^2(b-c)^4 \geq 0,$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=0$.

Lời giải 2. Lập luận tương tự lời giải trước, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $a,b,c>0$. Khi đó, với chú ý ở đánh giá

$$2(x^2-xy+y^2)^2-(x^4+y^4)=(x-y)^4 \geq 0,$$

ta có thể đưa về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$9(a^4+b^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4) \geq 8(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)^2.$$

Sử dụng các kết quả quen thuộc $9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx), x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ và bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} VT &\geq 8(a^4+b^4+c^4)(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4) \\ &\geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4) \\ &\geq 8(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)^2 = VP. \end{aligned}$$

Chứng minh kết thúc tại đây.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự như lời giải 1 và lời giải 2 ở trên, ta cũng chứng minh được
Bài toán. *Nếu $a,b,c \in \mathbb{R}$ thì*

$$3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \geq abc(a^3+b^3+c^3).$$

30. *Giả sử $a,b,c>0$. Chứng minh*

$$(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab) \geq (ab+bc+ca)^3.$$

Lời giải. Cách làm thường được sử dụng cho bài toán này là khai triển với nhiều tính toán phức tạp và dễ mắc sai lầm. Sau đây, chúng ta sẽ đến với một lời giải sơ cấp hơn.
Đặt $x^3=\frac{a}{b}, y^3=\frac{b}{c}, z^3=\frac{c}{a}$ thì $xyz=1$ bất đẳng thức đã cho trở thành

$$(x^3+y^3+1)(y^3+z^3+1)(z^3+x^3+1) \geq (xy^2+yz^2+zx^2)^3.$$

Giả sử y nằm giữa x và z. Theo bất đẳng thức *Hölder* thì

$$VT=(x^3+y^3+1)(y^3+z^3+1)(x^3+z^3+1) \geq (x^2y+yz^2+1)^3.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $x^2y+yz^2+1 \geq xy^2+yz^2+zx^2$. Thật vậy, sử dụng $xyz=1$ ta có thể viết lại nó thành $z(x-y)(y-z) \geq 0$, hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$.

31. *Cho ba số không âm a,b,c. Chứng minh*

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)^2 \ge (a+b+c)(ab+bc+ca)(a^3+b^3+c^3+abc).$$

Lời giải. Lấy $(a^3+b^3+c^3+abc)(a^3+b^3+c^3+6abc)$ trừ đi cho cả hai vế, ta được

$$abc(a^3+b^3+c^3)-3a^2b^2c^2 \le (a^3+b^3+c^3+abc)\left[\sum a^3+3abc-\sum a^2(b+c)\right].$$

Từ các hằng đẳng thức quen thuộc

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\sum(a-b)(a-c),$$

và

$$a^3+b^3+c^3+3abc-\sum a^2(b+c)=\sum a(a-b)(a-c),$$

ta có thể viết lại bất đẳng thức trên thành

$$ax(a-b)(a-c)+by(b-c)(b-a)+cz(c-a)(c-b)\ge 0,$$

với

$$x=a^3+b^3+c^3+abc-bc(a+b+c)=a^3+(b+c)(b-c)^2\ge 0$$

và các biểu thức y,z tương tự. Dễ thấy nếu $a\ge b\ge c$ thì $x\ge y$, suy ra $ax\ge by$. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}&ax(a-b)(a-c)+by(b-c)(b-a)+cz(c-a)(c-b)\\&\qquad\ge by(a-b)(a-c)+by(b-c)(b-a)=by(a-b)^2\ge 0.\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Với $a\ge b\ge c$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$.

32. *Nếu a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c>\max\{a,b,c\}$ thì*

$$a^3+b^3+c^3+2abc+\frac{8a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

Lời giải. Bất đẳng thức trên là một sự làm mạnh của bất đẳng thức *Schur* bậc ba.
Ta sử dụng các hằng đẳng thức sau

$$a^3+b^3+c^3+3abc-\sum a^2(b+c)=\sum a(a-b)(a-c),$$

$$abc-\frac{8a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=abc\sum\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}.$$

Suy ra bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum a(a-b)(a-c)\ge abc\sum\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)},$$

hay là

$$a^2(b+c)(a-b)(a-c)+b^2(c+a)(b-a)(b-c)+c^2(a+b)(c-a)(c-b)\ge 0.$$

Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có $a^2(b+c) - b^2(c+a) = (a-b)(ab+bc+ca) \geq 0$, nên

$$\begin{aligned} &a^2(b+c)(a-b)(a-c) + b^2(c+a)(b-a)(b-c) + c^2(a+b)(c-a)(c-b) \\ &\quad \geq b^2(c+a)(a-b)(a-c) + b^2(c+a)(b-c)(b-a) = b^2(c+a)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Xin gửi tới các bạn một số kết quả cùng dạng với bài toán trên, chúng đều là những kết quả đã được làm mạnh từ các bất đẳng thức *Schur* bậc ba và bậc bốn

Bài toán. *Nếu $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn không có hai số nào cùng bằng 0 thì*

(i)
$$\sum a(a-b)(a-c) \geq \frac{4abc(a^2-b^2)^2}{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)};$$

(ii)
$$\sum a(a-b)(a-c) \geq \frac{(a+b+c)^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)};$$

(iii)
$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab\sqrt{2(a^2+b^2)} + bc\sqrt{2(b^2+c^2)} + ca\sqrt{2(c^2+a^2)};$$

$(iiii)$
$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\cdot\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq \sum a^3(b+c).$$

33. *Với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca>0$, ta luôn có*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Trước tiên, ta có đánh giá sau

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq \frac{b^2+ca}{b(c+a)} + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}.$$

Thật vậy, ta có nhận xét sau

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} - \frac{b^2+ca}{b(c+a)} = -\frac{c(a+b)(a-b)^2}{b(c+a)(a^2+bc)} \geq -\frac{c(a+b)(a-b)^2}{(a^2+bc)(c^2+ab)}.$$

Từ nhận xét này, ta thấy chỉ cần chứng minh

$$\frac{c(a+b)}{c^2+ab} - \frac{c(a+b)(a-b)^2}{(a^2+bc)(c^2+ab)} \geq \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)},$$

hay tương đương với

$$c(a+b)(2ab+bc-b^2) \geq \frac{8a^2b^2c^2}{b^2+ca}.$$

Ta có thể thấy bất đẳng thức này là đúng vì

$$8a^2b^2c^2 = c\cdot 2ab\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2b\sqrt{ca} \leq abc(c+a)(b^2+ca),$$

theo bất đẳng thức $AM-GM$, và

$$c(a+b)(2ab+bc-b^2) - abc(c+a) = bc(a-b)(b-c) \geq 0,$$

do giả thiết $a \geq b \geq c$. Đánh giá của ta được chứng minh. Sử dụng nó, ta sẽ đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{b^2+ca}{b(c+a)}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca} \geq 2.$$

Thế nhưng bất đẳng thức này lại hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$. Ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ cùng các hoán vị.

34. *Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho trong chúng không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh*

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{9}{(a^2+bc)+(b^2+ca)+(c^2+ab)}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{9}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2) \geq 0.$$

Do $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$ nên nếu $2ab+2bc+2ca \geq a^2+b^2+c^2$ thì bài toán được giải quyết. Nếu $a^2+b^2+c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$ thì lúc này ta có $2(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$, và điều này dẫn đến

$$\frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)} \leq \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{3}{ab+bc+ca},$$

hay tương đương

$$\sum \frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\sum \frac{bc}{a^2+bc} \geq 3.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)},$$

là kết quả bài toán trước, và

$$\frac{bc}{a^2+bc}+\frac{ca}{b^2+ca}+\frac{ab}{c^2+ab} \geq 1,$$

là một bất đẳng thức đúng theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\sum \frac{bc}{a^2+bc} \geq \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum bc(a^2+bc)} = 1 + \frac{abc(a+b+c)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)} \geq 1.$$

35. *Chứng minh rằng*

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6,$$

trong đó a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c > \max\{a,b,c\}$.

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\sum \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} = \sum \frac{(b+c)^4}{(b+c)^2(a^2+bc)} \geq \frac{\left[\sum (b+c)^2\right]^2}{\sum (b+c)^2(a^2+bc)}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\left[(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2\right]^2 \geq 6\sum (b+c)^2(a^2+bc),$$

hay là

$$2\sum a^2(a-b)(a-c) + 3\sum ab(a-b)^2 \geq 0,$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *Schur* bậc bốn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $(a,b,c) \sim (1,1,0)$.

Lời giải 2. Ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum (b+c)^2(b^2+ca)(c^2+ab) \geq 6(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab).$$

Bằng tính toán và khai triển trực tiếp, ta có thể viết lại bất đẳng thức này thành

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 + \sum ab(a+b)^2(a-b)^2 \geq 0,$$

là một kết quả hiển nhiên.

Lời giải 3. Giả sử $c = \min\{a,b,c\}$. Khi đó ta có hai đánh giá sau

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq \frac{(a+b)^2}{c^2+\frac{(a+b)^2}{4}}, \tag{2.3}$$

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} \geq \frac{(a+b+2c)^2}{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}. \tag{2.4}$$

Do (2.3) đúng theo *AM – GM* nên ta chỉ cần xét (2.4) là đủ. Bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$(a^2+bc+b^2+ca)\left[\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca}\right] \geq \frac{(a+b+2c)^2(a^2+bc+b^2+ca)}{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
&(a^2+bc+b^2+ca)\left[\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}\right]-(a+b+2c)^2\\
&\qquad=\frac{(b+c)^2(b^2+ca)}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2(a^2+bc)}{b^2+ca}-2(b+c)(c+a)\\
&\qquad=\frac{(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca-c^2)^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\ge\frac{(a-b)^2(a^2+bc+b^2+ca)^2}{(a^2+bc)(c^2+ca)},
\end{aligned}
$$

và

$$\frac{(a+b+2c)^2(a^2+bc+b^2+ca)}{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}-(a+b+2c)^2=\frac{(a+b+2c)^2(a-b)^2}{2\left[\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)\right]}.$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a-b)^2(a^2+bc+b^2+ca)^2}{(a^2+bc)(c^2+ca)}\ge\frac{(a+b+2c)^2(a-b)^2}{2\left[\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)\right]},$$

đúng do $(a-b)^2\ge 0$ và

$$\frac{(a^2+bc+b^2+ca)^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\ge 4>\frac{(a+b+2c)^2}{2\left[\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)\right]}.$$

Bây giờ,sử dụng (2.3) và (2.4), ta sẽ đưa điều phải chứng minh trở thành

$$\frac{(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}+c^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}\ge 6.$$

Đặt $x=\frac{2c}{a+b}\ge 0$ thì nó tương đương với $\frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\ge 0$ là một bất đẳng thức đúng.

36. *Nếu a,b,c là các số thực không âm sao cho $(a+b)(b+c)(c+a)>0$ thì*

$$\frac{b^3+c^3}{a^2+bc}+\frac{c^3+a^3}{b^2+ca}+\frac{a^3+b^3}{c^2+ab}\ge 2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right).$$

Lời giải. Ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau

$$\sum\frac{b^3+c^3}{a^2+bc}+\sum(b+c)\ge 2\sum\frac{a^2}{b+c}+2\sum a,$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\sum\frac{b+c}{a^2+bc}\ge 2(a+b+c)\sum\frac{a}{b+c}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$
\begin{aligned}
\sum\frac{b+c}{a^2+bc}=\sum\frac{(b+c)^2}{(b+c)(a^2+bc)}&\ge\frac{\left[\sum(b+c)\right]^2}{\sum(b+c)(a^2+bc)}\\
&=\frac{2(a+b+c)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}.
\end{aligned}
$$

Vậy bài toán được đưa về

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} \geq \sum \frac{a}{b+c},$$

hay tương đương

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+2abc\sum\frac{a}{b+c} \geq \sum a(a+b)(a+c).$$

Lại sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có điều phải chứng minh

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)&+2abc\sum\frac{a}{b+c}\\ &\geq (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+2abc\cdot\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\\ &\geq (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+3abc=\sum a(a+b)(a+c).\end{aligned}$$

Với $a \geq b \geq c$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$.

37. *Giả sử a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh*

$$\frac{1}{\frac{8}{5}a^2+bc}+\frac{1}{\frac{8}{5}b^2+ca}+\frac{1}{\frac{8}{5}c^2+ab} \geq \frac{9}{4}.$$

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau

$$\frac{1}{\frac{8}{5}a^2+bc}-\frac{5}{8}+\frac{1}{\frac{8}{5}b^2+ca}-\frac{5}{8}+\frac{1}{\frac{8}{5}c^2+ab}-1 \geq 0,$$

$$\frac{8-8a^2-5bc}{8a^2+5bc}+\frac{8-8b^2-5ca}{8b^2+ca}+\frac{5-8c^2-5ab}{8c^2+5ab} \geq 0,$$

$$\frac{8a(b+c-a)+3bc}{8a^2+5bc}+\frac{8b(c+a-b)+3ca}{8b^2+5ca}+\frac{c(5a+5b-8c)}{8c^2+5ab} \geq 0. \qquad \left(\sum ab=1\right)$$

Từ biến đổi này dễ thấy bất đẳng thức của ta đúng nếu $b+c \geq a$. Xét $a \geq b+c$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{8b}{8b^2+5ca} \geq \frac{8a}{8a^2+5bc}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với $(a-b)(8ab-5bc-5ca) \geq 0$, đúng đắn do $8ab = 3ab+5ab \geq 3(b+c)b+5ca \geq 6bc+5ca \geq 5bc+5ca$. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}\frac{8a(b+c-a)}{8a^2+5bc}+\frac{8b(c+a-b)}{8b^2+5ca} &\geq \frac{8a(b+c-a)}{8a^2+5bc}+\frac{8a(c+a-b)}{8b^2+5ca}\\ &= \frac{16ca}{(8a^2+5bc)(8b^2+5ca)} \geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này cho ta điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Chúng ta có kết quả tổng quát hơn là
Bài toán. *Với mọi $a,b,c,k \geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ ta có*

$$\frac{1}{ka^2+bc}+\frac{1}{kb^2+ca}+\frac{1}{kc^2+ab} \geq \min\left\{\frac{9}{k+1}, \frac{2}{k}+1, 4\right\}.$$

38. *Cho a,b,c là các số thực phân biệt. Hãy chứng minh*

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2.$$

Lời giải 1. Ta dễ dàng kiểm tra được hằng đẳng thức sau

$$\frac{a}{b-c}\cdot\frac{b}{c-a}+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{a}{b-c}=-1.$$

Và do đó

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{a}{b-c}\right)^2-2&=\sum\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+2\sum\left(\frac{a}{b-c}\cdot\frac{b}{c-a}\right)\\&=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $abc=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, chẳng hạn $a=-b, c=0$.

Lời giải 2. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{a}{b-c}\right)^2=\sum\frac{a^2(2a-b-c)^2}{(b-c)^2(2a-b-c)^2} &\geq \frac{\left[\sum a(2a-b-c)\right]^2}{\sum(b-c)^2(2a-b-c)^2}\\&=\frac{\left[\sum(b-c)^2\right]^2}{\sum(b-c)^2(2a-b-c)^2}.\end{aligned}$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]^2 \geq 2\sum(b-c)^2(2a-b-c)^2.$$

Nhưng đây là một hằng đẳng thức. Thật vậy, đặt $x=b-c, y=c-a, z=a-b$, ta có $x+y+z=0$ và đẳng thức này được viết lại thành

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2\left[x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2\right].$$

Ta có

$$\begin{aligned}VP&=2\sum(x^2y^2-2x^2yz+2z^2x^2)\\&=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-4xyz(x+y+z)=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2),\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}VT-4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)&=(x^2+y^2+z^2)^2-4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\&=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2\\&=(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2\\&=(x^2+y^2-z^2-2xy)(x^2+y^2-z^2-2xy)\\&=\left[(x-y)^2-z^2\right]\left[(x+y)^2-z^2\right]\\&=(x-y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x+y-z)=0\end{aligned}$$

nên ta có điều phải chứng minh.

39. *Với mọi số thực a,b,c thỏa mãn $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ta luôn có*

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}\right)^2\geq 5.$$

Lời giải. Đặt $x=b-c, y=c-a, z=a-b$ thì ta cũng có $x+y+z=0$, và bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq 5.$$

Chú ý rằng ta có hằng đẳng thức sau đây

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=-3.$$

Thật vậy,

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3=-3.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2&=1+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right)+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\\&=1+(-6)+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-5.\end{aligned}$$

Mặt khác, vì $\left(1+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\geq 0$ nên hiển nhiên $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq 5$. Đây chính là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra với $1+\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{c-a}+\frac{c-a}{a-b}=0$.

Nhận xét. Từ lời giải này, chúng ta rút ra đẳng thức rất đẹp sau

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}\right)^2=5+\left(1+\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{c-a}+\frac{c-a}{a-b}\right)^2.$$

40. *Giả sử a,b,c là các số thực đôi một khác nhau, vậy ta có*

$$\frac{(b-c)^4}{(c-a)^2(a-b)^2}+\frac{(c-a)^4}{(a-b)^2(b-c)^2}+\frac{(a-b)^4}{(b-c)^2(c-a)^2}\geq\frac{33}{2}.$$

Lời giải. Tương tự như bài toán trước, ta cũng đưa bất đẳng thức về

$$\frac{x^4}{y^2z^2}+\frac{y^4}{z^2x^2}+\frac{z^4}{x^2y^2}\geq\frac{33}{2},$$

với $x=b-c, y=c-a, z=a-b$ và $x+y+z=0$. Để ý ta có hằng đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}&=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}\\&=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz}{xyz}=3.\end{aligned}$$

Do vậy

$$\frac{x^4}{y^2z^2}+\frac{y^4}{z^2x^2}+\frac{z^4}{x^2y^2}=\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}\right)^2-2\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}\right)$$
$$=9-2\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}\right).$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$9-2\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}\right)\ge\frac{33}{2},$$

hay tương đương với

$$\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}\le-\frac{15}{4}.$$

Đây là một bất đẳng thức đã khá cũ và có nhiều cách để giải. Xin giới thiệu với các bạn một cách làm mới. Ta biết rằng, theo nguyên lý *Dirichlet*, trong ba số x,y,z luôn tồn tại ít nhất hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử x và y cùng dấu, thế thì $xy\ge0$. Mặt khác, do $x+y+z=0$ nên ta có $z=-(x+y)$. Vì thế

$$\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}=\frac{xy}{(x+y)^2}-\frac{y(x+y)}{x^2}-\frac{x(x+y)}{y^2}$$
$$=\frac{xy}{(x+y)^2}-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$
$$\le\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}.$$

Bài toán được chứng minh xong. Ta có đẳng thức xảy ra khi $b=\frac{c+a}{2}$ với $a>b>c$.

Nhận xét. Điều kiện dấu bằng của bài toán này cho ta hằng đẳng thức thú vị sau

$$\sum\frac{(b-c)^4}{(c-a)^2(a-b)^2}-\frac{33}{2}=\frac{(a+b-2c)^2(b+c-2a)^2(c+a-2b)^2}{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}.$$

41. *Cho tam giác ABC, ba đường trung tuyến m_a,m_b,m_c ứng với các cạnh a,b,c. Chứng minh*

$$\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\left(\frac{m_a}{m_bm_c}+\frac{m_b}{m_cm_a}+\frac{m_c}{m_am_b}\right)\ge6\sqrt{3}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\frac{m_a}{m_bm_c}+\frac{m_b}{m_cm_a}+\frac{m_c}{m_am_b}\ge\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}$$
$$\ge\frac{3}{\sqrt{3m_am_bm_c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)}}$$
$$\ge\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Từ đây suy ra

$$\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\left(\frac{m_a}{m_bm_c}+\frac{m_b}{m_cm_a}+\frac{m_c}{m_am_b}\right) \geq \left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq \sqrt{3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)},$$

là bất đẳng thức quen thuộc $xy+yz+zx \geq 3\sqrt{xyz(x+y+z)}$ áp dụng cho $x=a^2, y=b^2, z=c^2$. Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay ABC là một tam giác đều.

42. *Cho tam giác nhọn ABC. Khi đó, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2-c^2} \geq \left(\frac{R}{r}\right)^2-1.$$

Lời giải. Ta có công thức thức quen thuộc sau, bạn đọc có thể tự chứng minh lấy

$$\frac{r}{R}+1=\cos A+\cos B+\cos C.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}\left(\frac{R}{r}\right)^2 &= \frac{1}{(\cos A+\cos B+\cos C-1)^2}\\ &= \frac{1}{\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1\right)^2}\\ &= \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sum\frac{a^2}{b^2+c^2-a^2} &\geq \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}-1,\\ \sum\frac{a^2}{b^2+c^2-a^2}+1 &\geq \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2},\\ \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} &\geq \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2},\\ (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 &\geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).\end{aligned}$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối được suy ra trực tiếp bằng cách nhân bất đẳng thức sau với hai bất đẳng thức tương tự

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2).$$

Không mấy khó khăn, ta có thể viết lại nó thành $(a-c)^2(c^2+a^2-b^2) \geq 0$, hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, tức là tam giác ABC đều.

43. *Giả sử tam giác ABC có* $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$. *Chứng minh*

$$(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \le a^4b^4c^4.$$

Lời giải. Sử dụng các công thức quen thuộc $abc = 4RS$ và

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4) = 16S^2,$$

ta có

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}}.$$

Mặt khác, từ giả thiết $R = \sqrt{3}3$, ta suy ra được

$$\frac{abc\sqrt{3}}{\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}} = 1.$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{abc\sqrt{3}}{\sqrt{2\sum a^2b^2-\sum a^4}}\right)^6 \prod(b^2+c^2-a^2) \le a^4b^4c^4,$$

hay là

$$\left[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\right]^3 \ge 27a^2b^2c^2\prod(b^2+c^2-a^2).$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó $c^2+a^2-b^2 \ge 0$ và $a^2+b^2-c^2 \ge 0$. Do đó, nếu $b^2+c^2-a^2 \le 0$ thì hiển nhiên bất đẳng thức trên là đúng do

$$2\sum a^2b^2 - \sum a^4 = (a+b+c)\prod(b+c-a) \ge 0.$$

Bây giờ xét $b^2+c^2-a^2 \ge 0$. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}\left(2\sum a^2b^2-\sum a^4\right)^3 &= \left[\sum a^2(b^2+c^2-a^2)\right]^3\\ &\ge 27\prod a^2(b^2+c^2-a^2) = 27a^2b^2c^2\prod(b^2+c^2-a^2).\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

44. *Với* a,b,c *là các số thực không âm thỏa mãn* $ab+bc+ca=1$. *Chứng minh*

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{a+b}} \ge a+b+c+\frac{3abc}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6})\sqrt[3]{a^6+b^6+c^6}}.$$

Lời giải. Do

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2(ab+bc+ca)}{b+c}} = \sqrt[3]{a^3+\frac{a^2bc}{b+c}},$$

nên

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}-a=\sqrt[3]{a^3+\frac{a^2bc}{b+c}}-a=\frac{\frac{a^2bc}{b+c}}{\left(a^3+\frac{a^2bc}{b+c}\right)^{2/3}+a\left(a^3+\frac{a^2bc}{b+c}\right)+a^2}$$

$$=\frac{a^2bc}{(b+c)\left[\left(\frac{a^2}{b+c}\right)^{2/3}+a\left(\frac{a^2}{b+c}\right)^{1/3}+a^2\right]}$$

$$=\frac{a^2bc}{\sqrt[3]{a^4(b+c)}+a\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+a^2(b+c)}$$

$$=\frac{abc}{a(b+c)+\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+\sqrt[3]{a(b+c)}}.$$

Vậy ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum\frac{abc}{a(b+c)+\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+\sqrt[3]{a(b+c)}}\ge\frac{3abc}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6})\sqrt[3]{a^6+b^6+c^6}},$$

hay là

$$\sum\frac{1}{a(b+c)+\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+\sqrt[3]{a(b+c)}}\ge\frac{3}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6})\sqrt[3]{a^6+b^6+c^6}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\sum\frac{1}{a(b+c)+\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+\sqrt[3]{a(b+c)}}\ge\frac{9}{\sum\left[a(b+c)+\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+\sqrt[3]{a(b+c)}\right]}$$

$$=\frac{9}{2+\sum\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+\sum\sqrt[3]{a(b+c)}}.$$

Mà theo bất đẳng thức *Hölder* thì

$$\sum\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}\le\sqrt[3]{3\left[\sum a(b+c)\right]^2}=\sqrt[3]{12},$$

và

$$\sum\sqrt[3]{a(b+c)}\le\sqrt[3]{9\sum a(b+c)}=\sqrt[3]{18}.$$

Nên từ đây suy ra

$$\sum\frac{1}{a(b+c)+\sqrt[3]{a^2(b+c)^2}+\sqrt[3]{a(b+c)}}\ge\frac{9}{2+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18}}>\frac{9}{7}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM – GM*,

$$\frac{3}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6})\sqrt[3]{a^6+b^6+c^6}}<\frac{3}{5\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt[3]{9}}}\le\frac{3\sqrt[3]{9}}{5}<\frac{9}{7},$$

kết hợp với trên, ta suy ra ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi trong ba số a,b,c có một số bằng 0, hai số còn lại có tích bằng 1.

45. *Chứng minh với mọi* $a,b,c>0$ *thỏa mãn* $a+b+c=2$

$$\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}}+\frac{ca}{\sqrt[4]{3b^2+4}}+\frac{ab}{\sqrt[4]{3c^2+4}}\le\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* và bổ đề quen thuộc $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}}$ (chỉ cần bình phương hai vế) với mọi $x,y>0$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}}&=\frac{bc\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{9a^2+(a+b+c)^2+(a+b+c)^2+(a+b+c)^2}}\\&\le\frac{bc\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3(2a+b+c)}}=\frac{bc\sqrt[4]{12}}{\sqrt{24}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(c+a)+(a+b)}\\&\le\frac{bc\sqrt[4]{12}}{2\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{c+a}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}}&\le\sum\frac{bc\sqrt[4]{12}}{2\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{c+a}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\sum\frac{c(a+b)}{\sqrt{a+b}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\sum c\sqrt{a+b}.\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo *Cauchy – Schwarz* thì

$$\begin{aligned}\sum c\sqrt{a+b}&\le\sqrt{(a+b+c)(ca+bc+ab+ca+bc+ab)}\\&=2\sqrt{ab+bc+ca}\le\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Nên kết hợp với trên, ta có ngay

$$\sum\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}}\le\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\sum c\sqrt{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\cdot4\sqrt{3}=\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}.$$

Đây là điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

46. *Nếu* $a,b,c>0$ *thì*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(a+b+c)^2}\ge\frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}VT&=\frac{9}{28}\left(1+1+1+\frac{1}{9}\right)\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(a+b+c)^2}\right]\\&\ge\frac{9}{28}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{3(a+b+c)}\right]^2.\end{aligned}$$

Vậy bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{3(a+b+c)} \geq \frac{14}{15}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right),$$

tương đương với $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, hiển nhiên đúng theo *Cauchy – Schwarz*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

47. *Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi 2. Chứng minh*

$$\left|\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}-\frac{a^3}{c}-\frac{b^3}{a}-\frac{c^3}{b}\right| < 3.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$|ab^4+bc^4+ca^4-a^4b-b^4c-c^4a| < 3abc,$$

hay là

$$|(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)| < 3abc.$$

Do a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tồn tại $x,y,z>0$ để $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Khi đó, $x+y+z=1$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$|(x-y)(y-z)(z-x)[3(a^2+b^2+c^2)+5(ab+bc+ca)]| < 3(x+y+z)^2(x+y)(y+z)(z+x).$$

Sử dụng bất đẳng thức hiển nhiên $|(x-y)(y-z)(z-x)| < (x+y)(y+z)(z+x)$, ta cần chứng minh

$$3(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx) < 3(x+y+z)^2,$$

tương đương với $xy+yz+zx>0$, hiển nhiên đúng.

48. *Giả sử x,y,z là các số thực dương và $xy+yz+zx=1$. Khi đó, ta có*

$$3-\sqrt{3}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y} \geq (x+y+z)^2.$$

Lời giải. Chứng minh được nhiều người biết đến cho bất đẳng thức này là sử dụng phương pháp S.O.S. Dưới đây chúng tôi xin được giới thiệu một lời giải sơ cấp hơn chỉ sử dụng *AM – GM*.

Đầu tiên, ta cần kết quả sau

Bổ đề. *Nếu a,b,c là các số thực dương thì*

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{xy+yz+zx}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right) \geq (x+y+z)(x^2+y^2+z^2),$$

hay là

$$\frac{x^3z}{y}+\frac{y^3x}{z}+\frac{z^3y}{x}\ge x^2y+y^2z+z^2x.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có các bất đẳng thức sau

$$\frac{x^3z}{y}+\frac{y^3x}{z}\ge 2x^2y\quad \frac{y^3x}{z}+\frac{z^3y}{x}\ge 2y^2z,\quad \frac{z^3y}{x}+\frac{x^3z}{y}\ge 2z^2x.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=y=z$.

Trở lại bài toán của ta. Sử dụng bổ đề trên kết hợp với điều kiện $xy+yz+zx=1$, ta thấy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau là bài toán được giải quyết

$$3-\sqrt{3}+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2,$$
$$3-\sqrt{3}+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\ge x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx),$$
$$(x^2+y^2+z^2)(x+y+z-1)\ge\sqrt{3}-1.$$

Bất đẳng thức này đúng do $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx=1$ và $x+y+z\ge\sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sqrt{3}$ theo $AM-GM$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

49. *Chứng minh rằng*

$$\sum\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right),$$

trong đó a,b,c là các số thực dương.

Lời giải. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức này và bất đẳng thức $AM-GM$, ta lại có

$$\begin{aligned}\sum\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}&\le\sum\sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+(a^2-ab+b^2)}{2}}\\&=\sum\sqrt{\frac{3a^2-2ab+3b^2}{4}}\\&\le\sqrt{\frac{3\left[\sum(3a^2-2ab+3b^2)\right]}{4}}=\sqrt{\frac{9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)}{4}}.\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2\ge(a+b+c)\sqrt{\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}{6}},$$

tương đương với

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{\sqrt{2(a+b+c)^2[9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)]}}{6},$$

hiển nhiên đúng theo *AM – GM*

$$VP \leq \frac{2(a+b+c)^2+9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)}{12} \leq a^2+b^2+c^2.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$.

50. *Nếu a,b,c là các số thực dương thì*

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}+2(a+b+c) \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right).$$

Đây là một bài toán khá chặt vì ngoài đẳng thức tầm thường là $a=b=c$ thì ta còn có một điểm "nhạy cảm" nữa là $a=b, c\to 0$ (cùng các hoán vị). Cho nên nhiều người sẽ nghĩ đến phương pháp S.O.S. Tuy nhiên, bay giờ chúng tôi xin được trình bày hai lời giải chỉ sử dụng *Cauchy – Schwarz* và *Schur*.

Lời giải 1. Đầu tiên ta đưa bất đẳng thức về dạng

$$\frac{(b-c)^2}{a}+\frac{(c-a)^2}{b}+\frac{(a-b)^2}{c} \geq \frac{2\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]}{a+b+c}.$$

Nếu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ thì bất đẳng thức này trở thành đẳng thức. Xét $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$, sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\frac{(b-c)^2}{a}+\frac{(c-a)^2}{b}+\frac{(a-b)^2}{c} \geq \frac{\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]^2}{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]^2}{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2} \geq \frac{2\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]}{a+b+c},$$

tương đương với

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

chính là bất đẳng thức *Schur* bậc ba.

Lời giải 2. Tương tự như lời giải trước, ta cũng sẽ chứng minh

$$\frac{(b-c)^2}{a}+\frac{(c-a)^2}{b}+\frac{(a-b)^2}{c} \geq \frac{2\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]}{a+b+c}.$$

Giả sử $a\geq b\geq c$. Theo *Cauchy – Schwarz* thì

$$VT \geq \frac{[(b-c)+(a-c)+(a-b)]^2}{a+b+c}=\frac{4(a-c)^2}{a+b+c}.$$

Do đó bài toán được đưa về
$$\frac{4(a-c)^2}{a+b+c} \geq \frac{2\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]}{a+b+c}.$$
Sau khi thu gọn ta được bất đẳng thức hiển nhiên đúng $(a-b)(b-c) \geq 0$.

51. *Cho $a,b,c>0$ và $k=4(3\sqrt{2}-4)$. Chứng minh*
$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+2+\frac{k(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lời giải. Sử dụng các đẳng thức
$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}-6=\frac{\sum(b+c)(a-b)(a-c)}{abc},$$
và
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-1=\frac{\sum(a-b)(a-c)}{ab+bc+ca},$$
ta có thể viết lại bát đẳng thức cần chứng minh dưới dạng
$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geq 0,$$
trong đó
$$x=\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}-\frac{4}{ab+bc+ca}-\frac{k}{a^2+b^2+c^2},$$
và các biểu thức y,z tương tự. Giả sử $a \geq b \geq c$ thì dễ thấy $x \leq y \leq z$. Do đó, nếu $x \geq 0$ thì $z \geq y \geq x \geq 0$, và nó dẫn tới
$$\begin{aligned}x(a-b)(a-c)&+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\\&\geq y(b-c)(b-a)+y(c-a)(c-b)=y(b-c)^2 \geq 0.\end{aligned}$$
Như vậy ta sẽ chứng minh $x \geq 0$. Ta có
$$x=\frac{bc(b+c)+a(b-c)^2}{abc(ab+bc+ca)}-\frac{k}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{b+c}{a(ab+bc+ca)}-\frac{k}{a^2+b^2+c^2}.$$
Do đó chỉ cần chứng minh
$$\frac{b+c}{a(ab+bc+ca)}-\frac{k}{a^2+b^2+c^2} \geq 0,$$
hay là
$$(1-k)a^2(b+c)+(b+c)(b^2+c^2) \geq kabc,$$
đúng theo $AM-GM$
$$VT \geq 2(1-k)a^2\sqrt{bc}+4bc\sqrt{bc} \geq 2abc\sqrt{8(1-k)}=kabc.$$
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$, và lặp lại khi $a=b=(3\sqrt{2}+4)c$ cùng các hoán vị.

52. *Nếu a,b,c là các số thực dương thì*

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\geq 3.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c. Ta có đánh giá sau

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\geq\left(b+\frac{1}{b}-1\right)\left(a+\frac{1}{c}-1\right).$$

Đánh giá này là đúng đắn do

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)-\left(b+\frac{1}{b}-1\right)\left(a+\frac{1}{c}-1\right)=\frac{(a-b)(b-c)}{bc}\geq 0.$$

Sử dụng đánh giá này, suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(a+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\geq 3,$$

hay tương đương với

$$\left(a+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(b+\frac{1}{b}-1\right)\left(a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-2\right)\geq 3.$$

Do $b+\frac{1}{b}-1=\frac{(b-1)^2}{b}+1\geq 1$ và $a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-2=\frac{(a-1)^2}{a}+c+\frac{1}{c}>0$ nên ta có

$$\left(b+\frac{1}{b}-1\right)\left(a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-2\right)\geq a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-2.$$

Mặt khác, vì

$$\left(a+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-2=3+\frac{(ca-1)^2}{ca}\geq 3$$

nên kết hợp với trên, ta dễ dàng có được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

53. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh*

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 4(a^3+b^3+c^3)+21.$$

Lời giải. Giả sử $a\leq b\leq c$. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành $P(a,b,c)\geq 0$, trong đó

$$P(a,b,c)=12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{12}{c}-4(a^3+b^3)-4c^3-21.$$

Xét hiệu $P(a,b,c)-P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$, ta có

$$\begin{aligned}P(a,b,c)-P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)&=12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\right)+(a+b)^3-4(a^3+b^3)\\&=\frac{12(a-b)^2}{ab(a+b)}-3(a+b)(a-b)^2\\&=3(a-b)^2\left[\frac{4}{ab(a+b)}-(a+b)\right].\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{4}{ab(a+b)}\geq\frac{16(a+b)}{(a+b)^4}\geq\frac{16(a+b)}{16}=a+b.$$

Do đó $3(a-b)^2\left[\frac{4}{ab(a+b)}-(a+b)\right]\geq 0$, tức là $P(a,b,c)\geq P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh $P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\geq 0$, tức là

$$\frac{48}{a+b}+\frac{12}{c}-(a+b)^3-4c^3-21\geq 0.$$

Thay $3-c=a+b$ vào bất đẳng thức trên rồi thực hiện biến đổi, ta được

$$\frac{3(2-c)^2(c^3+4c^2-6c+3)}{c(3-c)}\geq 0,$$

hiển nhiên đúng. Với $a\leq b\leq c$ đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}, c=2$.

54. *Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng* 1. *Chứng minh*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{25}{1+48abc}.$$

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$(1+48abc)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 25,$$

hay là

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)\geq 25.$$

Đặt $q=ab+bc+ca$ và $abc=r$ thì bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{q}{r}+48q\geq 25.$$

Chú ý tới bất đẳng thức sau

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geq 0.$$

Khai triển ra, đổi biến theo q,r và để ý $a+b+c=1$, ta thấy nó tương đương với

$$q^2-q^3+(9q-2)r-27r^2\geq 0.$$

Coi đây là một tam thức bậc hai theo r và giải ra, ta có

$$27r \le 9q - 2 + 2(1-3q)\sqrt{1-3q}.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta thu được

$$\begin{aligned}
9q - 2 + 2(1-3q)\sqrt{1-3q} &= 9q - 2 + \frac{2(1-3q)\left(1-\frac{12q}{5}\right)\sqrt{1-3q}}{1-\frac{12q}{5}} \\
&\le 9q - 2 + \frac{(1-3q)\left[\left(1-\frac{12q}{5}\right)^2 + 1 - 3q\right]}{1-\frac{12q}{5}} \\
&= \frac{27q^2(7-16q)}{5(5-12q)}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với trên, ta suy ra ngay $r \le \frac{q^2(7-16q)}{5(5-12q)}$. Sử dụng đánh giá này vào bất đẳng thức, ta được

$$\frac{q}{r} + 48q \ge \frac{q}{\frac{q^2(7-16q)}{5(5-12q)}} + 48q = 25 + \frac{(1-3q)(5-16q)^2}{q(7-16q)} \ge 25,$$

do $1 \ge 3q$ theo bất đẳng thức $AM - GM$. Vậy bài toán được chứng minh xong. Với giả thiết $a \ge b \ge c$, ta có đẳng thức đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = \frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{4}$.

55. *Chứng minh với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$*

$$8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 9 \ge 10(a^2 + b^2 + c^2).$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho có dạng thuần nhất là

$$\frac{8(a+b+c)}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 9 \ge \frac{90(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}.$$

Và do đây là một bất đẳng thức thuần nhất với ba biến a, b, c nên ta có thể bỏ qua giả thiết $a + b + c = 3$ mà chuẩn hóa cho $a + b + c = 1$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{8q}{3r} + 9 \ge 90(1-2q),$$

với $q = ab + bc + ca, r = abc$. Tương tự như bài toán trước, ta cũng có

$$27r \le 9q - 2 + 2(1-3q)\sqrt{1-3q}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$,

$$\begin{aligned}
9q - 2 + 2(1-3q)\sqrt{1-3q} &= 9q - 2 + \frac{2(1-3q)(1-2q)\sqrt{1-3q}}{1-2q} \\
&\le 9q - 2 + \frac{(1-3q)\left[(1-2q)^2 + (1-3q)\right]}{1-2q} \\
&= \frac{q^2(7-12q)}{1-2q},
\end{aligned}$$

ta có $r \le \frac{q^2(7-12q)}{27(1-2q)}$. Sử dụng đánh giá này, ta được

$$\frac{8q}{3r}+9 \ge \frac{8q}{\frac{3q^2(7-12q)}{27(1-2q)}}+9 = 90(1-2q)+\frac{9(8-15q)(1-4q)^2}{q(7-12q)(1-2q)} \ge 90(1-2q).$$

Phép chứng minh của ta hoàn tất tại đây. Đẳng thức xảy ra với $a=2, b=c=\frac{1}{2}$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Trong hai lời giải trên, mặc dù đều sử dụng

$$27r \le 9q-2+2(1-3q)\sqrt{1-3q},$$

thế nhưng mỗi lời giải lại dẫn đến hai kết quả rất khác nhau, đó là $r \le \frac{q^2(7-16q)}{5(5-12q)}$ và $r \le \frac{q^2(7-12q)}{27(1-2q)}$. Tại sao lại có sự khác biệt đó? Và nếu ta chỉ "cố định" một kết quả thôi thì điều gì sẽ xảy ra? Câu hỏi này xin dành cho bạn đọc. Với nhiều người, hai lời giải này còn khá "nặng nề" về mặt tính toán, tuy nhiên theo quan điểm cá nhân, chúng tôi lại cho rằng chúng rất đặc sắc. Mặt khác, chúng giúp ta "rèn luyện" kỹ năng biến đổi và phân tích thành nhân tử. Để luyện tập thêm với cách làm này, mời các bạn cùng thử sức với bài toán khá "lạ lùng" như sau

Bài toán. *Với mọi $a,b,c \in \left[0;\sqrt{3}-1\right]$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ ta luôn có*

$$3(a+b+c) \ge 4(1+abc).$$

Điều kiện của bài toán này khác hẳn với hai bài toán trước. Vậy chúng ta sẽ phải xử lý sao đây? Bạn đọc thử suy nghĩ xem!

56. *Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c > \max\{a,b,c\}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh*

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} \ge 4+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Lời giải. Thuần nhất hóa cả hai vế, ta sẽ đưa bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\sum \frac{b+c}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \ge 4+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $4 \le \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\sum \frac{b+c}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Bất đẳng thức này là hệ quả trực tiếp của hai bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}, \tag{2.5}$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{c+a}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}+\frac{a+b}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} \ge \frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}+\frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{2.6}$$

Với bất đẳng thức (2.5), áp dụng bất đẳng thức *Hölder*, ta có

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}\right)^2 \sum a(b^2+bc+c^2) \ge (a+b+c)^3.$$

Vậy

$$\sum \frac{a}{b^2+bc+c^2} \ge \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{\sum a(b^2+bc+c^2)}} = \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (2.6). Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a,b,c\}$. Ta có đánh giá sau

$$\frac{b+c}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{c+a}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \ge \frac{2(a+b+2c)}{\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}}.$$

Đánh giá trên là đối xứng cho a và b, vì vậy ta có thể giả sử $a \ge b$. Bây giờ, ta có

$$b^2+bc+c^2-c^2-ca-a^2 = (b-a)(a+b+c) \le 0,$$

và

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+bc+c^2} - \frac{(c+a)^2}{c^2+ca+a^2} = \frac{c(ab-c^2)(a-b)}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)} \ge 0.$$

Do đó hai bộ số sau đây đơn điệu ngược chiều

$$\sqrt{b^2+bc+c^2}, \qquad \sqrt{c^2+ca+a^2};$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}, \qquad \frac{c+a}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}.$$

Vậy từ bất đẳng thức *Chebyshev* ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\right)\left(\frac{b+c}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{c+a}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}\right)\\
&\ge 2\left(\sqrt{b^2+bc+c^2}\cdot\frac{b+c}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\cdot\frac{c+a}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}\right)\\
&= 2(a+b+2c).
\end{aligned}$$

Đánh giá của ta được chứng minh. Sử dụng nó, ta sẽ đưa bất đẳng thức (2.6) về

$$\frac{2(a+b+2c)}{\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}} - \frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \ge \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{a+b}{\sqrt{a^2+ab+b^2}},$$

$$\frac{2\left[(\sqrt{b^2+bc+c^2}-\sqrt{ab+bc+ca})^2+(\sqrt{ab+bc+ca}-\sqrt{c^2+ca+a^2})^2\right]}{(\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2})(a+b+c)}$$

$$\ge \frac{(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}[2\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{3}(a+b)]}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}
&2\left[\left(\sqrt{b^2+bc+c^2}-\sqrt{ab+bc+ca}\right)^2+\left(\sqrt{ab+bc+ca}-\sqrt{c^2+ca+a^2}\right)^2\right]\\
&\geq \left(\sqrt{b^2+bc+c^2}-\sqrt{ab+bc+ca}+\sqrt{ab+bc+ca}-\sqrt{c^2+ca+a^2}\right)^2\\
&=\left(\sqrt{b^2+bc+c^2}-\sqrt{c^2+ca+a^2}\right)^2\\
&=\frac{(a+b+c)^2(a-b)^2}{(\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2})^2}.
\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{(\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2})^3}\geq\frac{(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}[2\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{3}(a+b)]}.$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\right)^3\\
&\leq\left(\sqrt{b^2+bc+ab}+\sqrt{ab+ca+a^2}\right)^2\cdot 2\sqrt{a^2+ab+b^2}\\
&=2(a+b+c)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\sqrt{a^2+ab+b^2}\\
&\leq 4(a+b+c)(a+b)\sqrt{a^2+ab+b^2}.
\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}\left[2\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{3}(a+b)\right]&\geq\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}\cdot 2\sqrt{3}(a+b)\\
&=6(a+b)\sqrt{a^2+ab+b^2}>4(a+b)\sqrt{a^2+ab+b^2}.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{(\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2})^3}&\geq\frac{(a-b)^2}{4(a+b)\sqrt{a^2+ab+b^2}}\\
&\geq\frac{(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}[2\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{3}(a+b)]}.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (2.6) đã được chứng minh. Bất đẳng thức được chứng minh hoàn chỉnh. Với $c=\min\{a,b,c\}$ ta có đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}, c=0$.

Nhận xét. Mời bạn đọc thử sức với kết quả tổng quát hơn sau đây

Bài toán. *Với các số thực không âm a,b,c,k, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c)=\frac{1}{\sqrt{kb^2+bc+kc^2}}+\frac{1}{\sqrt{kc^2+ca+ka^2}}+\frac{1}{\sqrt{ka^2+ab+kb^2}}.$$

57. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau với các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$*

$$P(a,b,c)=\frac{bc}{3+a^2}+\frac{ca}{3+b^2}+\frac{ab}{3+c^2}.$$

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$P(a,b,c) = abc\left(\frac{1}{3a+a^3} + \frac{1}{3b+b^3} + \frac{1}{3c+c^3}\right).$$

Cố định $p = a+b+c = 3$ và $r = abc$, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3x+x^3}$, ta thu được

$$f'(x) = -\frac{3x+3x^2}{x^2(3+x^2)^2} \Rightarrow k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{3x^4(1+x^2)}{(1+3x^2)^2}$$

$$\Rightarrow k''(x) = -\frac{18x^2(2-x^2+4x^4+3x^6)}{(1+3x^2)^4} < 0.$$

Từ đây suy ra $P(a,b,c)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $a = b \geq c$. Khi đó $a \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$

$$P(a,b,c) = \frac{a^2}{3+c^2} + \frac{2ca}{3+a^2} = \frac{a^2}{3+(3-2a)^2} + \frac{2a(3-2a)}{3+a^2} = g(a).$$

Tính đạo hàm của $g(a)$, ta có

$$g'(a) = \frac{27(4-3a+a^2)(6-3a-a^2)(1-a)^2}{4(3-3a+a^2)^2(3+a^2)^2}.$$

Do đó $g'(a)$ có ba nghiệm phân biệt là $-\frac{\sqrt{33}+3}{2}, 1, \frac{\sqrt{33}-3}{2}$. Trong ba nghiệm này chỉ có hai nghiệm là 1 và $a_0 = \frac{\sqrt{33}-3}{2}$ thỏa mãn $a \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$. Mặt khác, dễ thấy rằng qua a_0 thì $g'(a)$ đổi dấu từ dương sang âm. Suy ra $g(a)$ đồng biến khi $a \in [1, a_0]$ và nghịch biến khi $a \in \left[a_0, \frac{3}{2}\right]$. Từ những lập luận trên, ta có

$$g(a) \leq g(a_0) = g\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right) = \frac{11\sqrt{33}-45}{24}.$$

Do đẳng thức xảy ra tại $a = b = \frac{\sqrt{33}-3}{2}$ và $c = 6-\sqrt{33}$ nên ta kết luận $\frac{11\sqrt{33}-45}{24}$ chính là giá trị lớn nhất của $P(a,b,c)$.

58. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c) = (ab)^k + (bc)^k + (ca)^k,$$

với a,b,c,k là các số thực không âm tùy ý thỏa mãn $a+b+c = 1$.

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có hai trường hợp cần xét.

(i) $0 \leq k \leq 2$. Cố định $r = abc$ và $p = a+b+c = 1$. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^k}$, ta có

$$f'(x) = -\frac{k}{x^{k+1}} \Rightarrow k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = -kx^{k+1} \Rightarrow k''(x) = -k^2(k+1)x^{k-1} \leq 0.$$

Suy ra $k(x)$ là hàm lõm, vậy $P(a,b,c)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $a = b \geq c$. Khi đó

$$P(a,b,c) = a^{2k} + 2(ca)^k = \frac{a^{2k}+2(ca)^k}{(a+b+c)^{2k}} = \frac{2t^k+1}{(t+2)^{2k}} = g(t). \qquad \left(t = \frac{c}{a} \in [0,1]\right)$$

Ta có
$$g'(t) = -\frac{2k(t^k - 2t^{k-1} + 1)}{(t+2)^{2k+1}}$$
có cùng dấu với hàm số $h(t) = -t^k + 2t^{k-1} - 1$. Lại có $h'(t) = t^{k-2}[2(k-1) - kt]$, suy ra $h'(t)$ có nghiệm $t = t_0 = \frac{2(k-1)}{k} < 1$. Ngoài ra, qua t_0 thì $h'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm. Điều này chứng tỏ $h(t)$ đồng biến khi $t \in [0, t_1)$ và nghịch biến khi $t \in (t_1, 1)$. Do $\lim_{t\to 0} h(t) = -1$ và $h(1) = 0$ nên $h(t)$ còn có một nghiệm nữa là $t_1 \in [t_0, 1]\,, h(t) < 0$ với $t \in (0, t_1)$ và $h(t) > 0$ với $t \in (t_1, 1)$. Suy ra $g'(t_1) = 0, g'(t) < 0$ với $t \in (0, t_1)$ và $g'(t) > 0$ với $t \in (t_1, 1)$. Do đó $g(t)$ nghịch biến khi $t \in [0, t_1]$ và đồng biến khi $t \in [t_1, 1]$. Từ những lập luận trên, ta có $g(t) \le \max\{g(0), g(1)\} = \max\left\{\frac{1}{4^k}, \frac{3}{9^k}\right\}$.

(ii) $k \ge 2$. Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, ta có
$$P(a,b,c) = (ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \le (ab)^k + (bc)^k + a^{k-2}bc \le (ab + ca)^k.$$
Mà theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì
$$(ab + ca)^k = [a \cdot (b + c)]^k \le \left(\frac{a + b + c}{2}\right)^{2k} = \frac{1}{4^k}.$$
Nên kết hợp trên, ta suy ra được $P(a,b,c) \le \frac{1}{4^k}$.

Từ tất cả các trường hợp trên, ta đi đến kết luận $\max P(a,b,c) = \max\left\{\frac{1}{4^k}, \frac{3}{9^k}\right\}$. Do $\frac{1}{4^k} = \frac{3}{9^k} \iff k = k_0 = \frac{\ln 3}{\ln 9 - \ln 4}$ nên với $k = k_0$ thì đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ cùng các hoán vị; với $k > k_0$ thì đẳng thức chỉ xảy ra tại $a = b, c = 0$ cùng các hoán vị; còn với $k < k_0$, đẳng thức đạt được khi cả ba biến a, b, c bằng nhau.

59. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*
$$P(a,b,c) = \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k,$$
trong đó a, b, c, k là các số thực không âm sao cho $ab + bc + ca > 0$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng kết quả sau là đúng
$$P(a,b,c) = \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \ge \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}.$$
Để chứng minh kết quả này, ta sẽ xét ba trường hợp

(i) $0 \le k \le \frac{1}{2}$. Trước hết, ta có kết quả sau
$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \ge 2.$$
Thật vậy, theo bất đẳng thức $AM - GM$,
$$\sum \sqrt{\frac{x}{y+z}} = \sum \frac{x}{\sqrt{x \cdot (y+z)}} \ge 2 \sum \frac{x}{x+y+z} = 2.$$

Sử dụng kết quả này với $x=a^{2k}, y=b^{2k}, z=c^{2k}$, ta được

$$\frac{a^k}{\sqrt{b^{2k}+c^{2k}}}+\frac{b^k}{\sqrt{c^{2k}+a^{2k}}}+\frac{c^k}{\sqrt{a^{2k}+b^{2k}}}\ge 2.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k \ge \frac{a^k}{\sqrt{b^{2k}+c^{2k}}}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $b^{2k}+c^{2k}\ge (b+c)^{2k}$, hay là

$$\left(\frac{b}{b+c}\right)^{2k}+\left(\frac{c}{b+c}\right)^{2k}\ge 1,$$

hiển nhiên đúng. Từ đây, bằng cách thiết lập hai bất đẳng thức tương tự, ta có

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\ge \frac{a^k}{\sqrt{b^{2k}+c^{2k}}}+\frac{b^k}{\sqrt{c^{2k}+a^{2k}}}+\frac{c^k}{\sqrt{a^{2k}+b^{2k}}}.$$

Kết hợp với trên ta suy ra

$$P(a,b,c)=\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\ge 2.$$

(ii) $\frac{1}{2}\le k\le 1$. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Ta sẽ chứng minh

$$P(a,b,c)\ge P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\ge \min\left\{2,\frac{3}{2^k}\right\}.$$

Bất đẳng thức bên trái tương đương với

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k\ge 2\left(\frac{a+b}{a+b+2c}\right)^k.$$

Với chú ý ở $k\ge \frac{1}{2}$, áp dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k}{2}}\ge \left[\frac{\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}}{2}\right]^k.$$

Suy ra

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k\ge 2\left[\frac{\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}}{2}\right]^{2k}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}.$$

Ta có

$$a^2(b+c)+b^2(c+a) = \frac{(a+b)^3}{4}+\frac{c(a+b)^2}{2}-\frac{(a-b)^2(a+b-2c)}{4}$$
$$\le \frac{(a+b)^3}{4}+\frac{c(a+b)^2}{2},$$

nên áp dụng bất đẳng thức *Hölder*, ta được

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)^2 \ge \frac{(a+b)^3}{a^2(b+c)+b^2(c+a)}$$
$$= \frac{(a+b)^3}{\frac{(a+b)^3}{4}+\frac{c(a+b)^2}{2}} = \frac{4(a+b)}{a+b+2c}.$$

Bất đẳng thức bên trái đã được chứng minh. Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Đặt $t=\frac{2c}{a+b}\le 1$ thì ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$f(t) = 2\left(\frac{1}{t+1}\right)^k+\left(\frac{t}{2}\right)^k \ge \min\left\{2,\frac{3}{2^k}\right\}.$$

Ta có

$$f'(t) = \frac{kt^{k-1}}{2^k}-k\left(\frac{1}{t+1}\right)^k$$

$$f'(t)=0 \iff \frac{kt^{k-1}}{2^k}=k\left(\frac{1}{t+1}\right)^k \iff (k-1)\ln t-k\ln 2=(r+1)\ln\frac{1}{t+1}.$$

Tiếp tục xét hàm số $g(t)=(k-1)\ln t-\ln 2-(k+1)\ln\frac{1}{t+1}$, ta có

$$g'(t) = \frac{2kt+k-1}{t(t+1)}$$

$$g'(t)=0 \iff t=t_0=\frac{1-k}{2k}<1. \qquad \left(k\ge\frac{1}{2}\right)$$

Dễ thấy qua t_0 thì $g'(t)$ đổi dấu từ âm sang dương. Suy ra $g(t)$ nghịch biến khi $t\in(0,t_0]$ và đồng biến khi $t\in[t_0,1]$. Do $\lim_{t\to 0}g(t)=+\infty$ và $g(1)=0$ nên tồn tại $t_1\in(0,t_0)$ để $g(t_1)=0, g(t)>0$ với $t\in(0,t_1)$ và $g(t)<0$ với $t\in(t_1,1)$. Do đó $f'(t_1)=0, f'(1)=0, f'(t)>0$ với $t\in(0,t_1)$ và $f'(t)<0$ với $t\in(t_1,1)$. Vậy $f(t)$ đồng biến khi $t\in[0,t_1]$ và nghịch biến khi $t\in[t_1,1]$. Từ những lập luận trên, ta có $f(t)\ge\min\{f(0),f(1)\}=\min\left\{2,\frac{3}{2^k}\right\}$.

(iii) $k\ge 1$. Áp dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa và bất đẳng thức *Nesbitt*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2},$$

ta thu được

$$\frac{1}{3}\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^k \ge \left(\frac{1}{3}\sum\frac{a}{b+c}\right)^k \ge \frac{1}{2^k}.$$

Từ đây suy ra

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k \ge \frac{3}{2^k}.$$

Từ tất cả các trường hợp trên, ta kết luận $\min P(a,b,c) = \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}$. Do $2 = \frac{3}{2^k} \iff k = k_0 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$ nên với $k < k_0$, đẳng thức đạt được khi $a = b, c = 0$ cùng các hoán vị; với $k > k_0$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$; với $k = k_0$, đẳng thức có được tại cả hai trường hợp trên.

60. *Cho các số nguyên dương lẻ a,b,c,d đôi một khác nhau. Chứng minh*

$$abc + bcd + cda + dab + 34 \le 2abcd.$$

Lời giải. Giả sử $a \ge b \ge c \ge d$. Từ giả thiết, ta dễ dàng suy ra được $a \ge 7, b \ge 5, c \ge 3, d \ge 1$ và $2 \le \min\{a-b, b-c, c-d\}$. Vậy suy ra

$$\begin{aligned}
VP - VT &= abc(d-1) + abcd - bcd - cda - dab - 34 \\
&\ge d(abc - bc - ca - ab) - 34 \\
&= d[ab(c-1) - bc - ca] - 34 \ge d(2ab - bc - ca) - 34 \\
&\ge 2ab - bc - ca - 34 = b(a-c) + ab - a(b-2) - 34 \\
&\ge b(a-b) + b(b-c) + 2a - 34 \ge 4b + 2a - 34 \ge 20 + 14 - 34 = 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 7, b = 5, c = 3, d = 1$ cùng các hoán vị.

61. *Với mọi số thực dương a,b,c,d ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{b^2 - ca}{c + 2d + a} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + \frac{d^2 - ac}{a + 2b + c} \ge 0.$$

Lời giải. Có thể thấy bất đẳng thức đã cho được suy ra trực tiếp từ hai bất đẳng thức dưới đây

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} \ge \frac{a + c - b - d}{2},$$

$$\frac{b^2 - ca}{c + 2d + a} + \frac{d^2 - ac}{a + 2b + c} \ge \frac{b + d - a - c}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ nhất, bất đẳng thức thứ hai được chứng minh tương tự. Ta thực hiện biến đổi như sau

$$\left(\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{b + d}{2}\right) + \left(\frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + \frac{b + d}{2}\right) \ge \frac{a + b + c + d}{2},$$

$$\frac{2a^2 + b^2 + d^2 + 2c(b + d)}{2(b + 2c + d)} + \frac{2c^2 + d^2 + b^2 + 2a(d + b)}{2(d + 2a + b)} \ge \frac{a + b + c + d}{2},$$

$$\frac{(a-b)^2 + (a-d)^2 + 2(a+c)(b+d)}{b + 2c + d} + \frac{(c-b)^2 + (c-d)^2 + 2(a+c)(b+d)}{d + 2a + b} \ge a + b + c + d,$$

$$\left[\frac{(a-b)^2}{b + 2c + d} + \frac{(c-d)^2}{d + 2a + b}\right] + \left[\frac{(a-d)^2}{b + 2c + d} + \frac{(c-b)^2}{d + 2a + b}\right] + \frac{2(a+c)(b+d)}{b + 2c + d} + \frac{2(a+c)(b+d)}{d + 2a + b} \ge a + b + c + d.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\frac{(a-b)^2}{b+2c+d}+\frac{(c-d)^2}{d+2a+b}\ge\frac{(a-b+c-d)^2}{(b+2c+d)+(d+2a+b)},$$

$$\frac{(a-d)^2}{b+2c+d}+\frac{(c-b)^2}{d+2a+b}\ge\frac{(a-d+c-b)^2}{(b+2c+d)+(d+2a+b)},$$

$$\frac{2(a+c)(b+d)}{b+2c+d}+\frac{2(a+c)(b+d)}{d+2a+b}\ge\frac{8(a+c)(b+d)}{(b+2c+d)+(d+2a+b)}.$$

Công ba bất đẳng thức trên lại và chú ý rằng

$$(a-b+c-d)^2+(a-d+c-b)^2+8(a+c)(b+d)=2(a+b+c+d)^2,$$

ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=c$ và $b=d$.

62. *Cho a,b,c,d là các số thực dương đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau đây*

$$abcd=1; \qquad a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.$$

Hãy chứng minh rằng

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}>a+b+c+d.$$

Lời giải. Ta có, theo các bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* và *AM – GM* thì

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)&=(a+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\\&=(a+c)(b+d)\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}\right)\\&\ge\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\left(\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bd}}\right)^2\\&\ge\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\left(\frac{2}{a+c}+\frac{2}{b+d}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{ac}\sqrt{bd}}}\\&=2(a+b+c+d).\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)\ge2(a+b+c+d).$$

Thế mà $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ nên ta bắt buộc phải có $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}>a+b+c+d$. Chứng minh hoàn tất.

63. *Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn*

$$a+b+c+d=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}.$$

Hãy chứng minh

$$2(a+b+c+d)\ge\sqrt[3]{a^3+7}+\sqrt[3]{b^3+7}+\sqrt[3]{c^3+7}+\sqrt[3]{d^3+7}.$$

Lời giải. Từ điều kiện bài toán ta có

$$\frac{a^3-1}{a^2}+\frac{b^3-1}{b^2}+\frac{c^3-1}{c^2}+\frac{d^3-1}{d^2}=0.$$

Một cách tương tự, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(2a-\sqrt[3]{a^3+7}\right)+\left(2b-\sqrt[3]{b^3+7}\right)+\left(2c-\sqrt[3]{c^3+7}\right)+\left(2d-\sqrt{d^3+7}\right)\ge 0,$$

$$\sum\frac{8a^3-(a^3+7)}{4a^2+2a\sqrt[3]{a^3+7}+(a^3+7)^{2/3}}\ge 0,$$

$$\sum\frac{a^3-1}{4a^2+2a\sqrt[3]{a^3+7}+(a^3+7)^{2/3}}\ge 0,$$

$$\sum\frac{\frac{a^3-1}{a^2}}{4+2\sqrt[3]{1+\frac{7}{a^3}}+\left(1+\frac{7}{a^3}\right)^{2/3}}\ge 0.$$

Tới đây, bạn đọc có thể thấy rõ ngay sự *tương đồng* của điều kiện và điều phải chứng minh ở các đại lượng $\frac{a^3-1}{a^2},\frac{b^3-1}{b^2},\frac{c^3-1}{c^2},\frac{d^3-1}{d^2}$. Như thế, ý nghĩ đơn giản của ta lúc này là sử dụng một đánh giá để đưa các đại lượng này về một tổng. Với ý nghĩ như vậy, bất đẳng thức *Chebyshev* là sự lựa chọn tối ưu hơn cả. Giả sử $a\ge b\ge c\ge d$, khi đó ta có thể dễ dàng nhận thấy hai bộ số sau đây đơn điệu ngược chiều

$$\frac{a^3-1}{a^2},\quad \frac{b^3-1}{b^2},\quad \frac{c^3-1}{c^2},\quad \frac{d^3-1}{d^2};$$

$$4+2\sqrt[3]{1+\frac{7}{a^3}}+\left(1+\frac{7}{a^3}\right)^{2/3},\qquad 4+2\sqrt[3]{1+\frac{7}{b^3}}+\left(1+\frac{7}{b^3}\right)^{2/3},$$

$$4+2\sqrt[3]{1+\frac{7}{c^3}}+\left(1+\frac{7}{c^3}\right)^{2/3},\qquad 4+2\sqrt[3]{1+\frac{7}{d^3}}+\left(1+\frac{7}{d^3}\right)^{2/3}.$$

Và theo đó bất đẳng thức *Chebyshev* cho ta

$$4\sum\frac{\frac{a^3-1}{a^2}}{4+2\sqrt[3]{1+\frac{7}{a^3}}+\left(1+\frac{7}{a^3}\right)^{2/3}}\ge\sum\frac{a^3-1}{a^2}\sum\frac{1}{4+2\sqrt[3]{1+\frac{7}{a^3}}+\left(1+\frac{7}{a^3}\right)^{2/3}}=0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

64. *Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh*

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\ge d$. Đặt $x=bcd,y=cda,z=dab,t=abc$ thì hiển nhiên $0<x\le y\le z\le t$. Ngoài ra, bất đẳng thức đã cho có thể được viết lại thành

$$\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5-y}+\frac{1}{5-z}+\frac{1}{5-t}\le 1,$$

hay tương đương với
$$\frac{1-x}{5-x}+\frac{1-y}{5-y}+\frac{1-z}{5-z}+\frac{1-t}{5-t}\geq 0.$$
Do $x\leq y$ nên $2-x-x^2\geq 2-y-y^2$, tức là $(1-x)(2+x)\geq(1-y)(2+y)$. Mặt khác, theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $x+y=cd(a+b)\leq\left(\frac{c+d+a+b}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<3$ nên
$$(5-x)(2+x)-(5-y)(2+y)=(x-y)(3-x-y)\leq 0.$$
Do đó hai bộ số sau đây đơn điệu ngược chiều
$$\begin{array}{llll}(1-x)(2+x), & (1-y)(2+y), & (1-z)(2+z), & (1-t)(2+t);\\ (5-x)(2+x), & (5-y)(2+y), & (5-z)(2+z), & (5-t)(2+t).\end{array}$$
Vậy từ bất đẳng thức *Chebyshev* ta suy ra
$$\sum\frac{1-x}{5-x}=\sum\frac{(1-x)(2+x)}{(5-x)(2+x)}\geq\frac{1}{4}\sum(1-x)(2+x)\sum\frac{1}{(5-x)(2+x)}.$$
Như vậy ta chỉ cần chứng minh
$$(1-x)(2+x)+(1-y)(2+y)+(1-z)(2+z)+(1-t)(2+t)\geq 0.$$
Khai triển và đổi biến lại $bcd=x,cda=y,dab=z,abc=t$, ta thấy nó tương đương với
$$abc+bcd+cda+dab+(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2\leq 8.$$
Áp dụng kết quả bài toán 70 ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

65. *Với mọi $a,b,c,d>0$ ta luôn có*
$$a\cdot\frac{a+b}{b+c}+b\cdot\frac{b+c}{c+d}+c\cdot\frac{c+d}{d+a}+d\cdot\frac{d+a}{a+b}\geq a+b+c+d.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c,d\}$. Khi đó, ta thực biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau
$$a\left(\frac{a+b}{b+c}-1\right)+b\left(\frac{b+c}{c+d}-1\right)+c\left(\frac{c+d}{d+a}-1\right)+d\left(\frac{d+a}{a+b}-1\right)\geq 0,$$
$$\frac{a(a-c)}{b+c}+\frac{b(b-d)}{c+d}+\frac{c(c-a)}{d+a}+\frac{d(d-b)}{a+b}\geq 0,$$
$$(a-c)\left(\frac{a}{b+c}-\frac{c}{d+a}\right)+(b-d)\left(\frac{b}{c+d}-\frac{d}{a+b}\right)\geq 0,$$
$$\frac{(a-c)(a^2+ad-bc-c^2)}{(b+c)(d+a)}+\frac{(b-d)(b^2+ab-cd-d^2)}{(a+b)(c+d)}\geq 0,$$
$$\frac{(a-c)^2(a+c+d)}{(b+c)(d+a)}+\frac{(b-d)^2(b+d+a)}{(a+b)(c+d)}$$
$$+(a-c)(b-d)\left[\frac{d}{(a+b)(c+d)}-\frac{c}{(b+c)(d+a)}\right]\geq 0.$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned}(a-c)(b-d)&\left[\frac{d}{(a+b)(c+d)}-\frac{c}{(b+c)(d+a)}\right]\\&\geq -|(a-c)(b-d)|\left[\frac{d}{(a+b)(c+d)}+\frac{c}{(b+c)(d+a)}\right],\end{aligned}$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned}&\frac{(a-c)^2(a+c+d)}{(b+c)(d+a)}+\frac{(b-d)^2(b+d+a)}{(a+b)(c+d)}\\&\qquad\geq |(a-c)(b-d)|\left[\frac{d}{(a+b)(c+d)}+\frac{c}{(b+c)(d+a)}\right].\end{aligned}$$

Theo $AM-GM$ ta có

$$VT \geq 2|(a-c)(b-d)|\sqrt{\frac{(a+c+d)(b+d+a)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}}.$$

Do đó ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn là

$$2\sqrt{\frac{(a+c+d)(b+d+a)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}} \geq \frac{d}{(a+b)(c+d)}+\frac{c}{(b+c)(d+a)}.$$

Ta có

$$\sqrt{\frac{(a+c+d)(b+d+a)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}} \geq \frac{d}{(a+b)(c+d)}. \tag{2.7}$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$(a+c+d)(b+d+a)(a+b)(c+d) \geq d^2(b+c)(d+a),$$

đúng vì $a+c+d \geq b+c, b+d+a \geq d+a, a+b \geq d, c+d \geq d$.
Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{\frac{(a+c+d)(b+d+a)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}} \geq \frac{c}{(b+c)(d+a)}. \tag{2.8}$$

Cộng (2.7) và (2.8) lại ta thu được ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=c$ và $b=d$.

Nhận xét. Ngoài ra, chúng ta còn có kết quả sau
Bài toán. *Nếu $a,b,c,d>0$ thì*

$$\frac{a(a-c)}{b+2c}+\frac{b(b-d)}{c+2d}+\frac{c(c-a)}{d+2a}+\frac{d(d-b)}{a+2b} \geq 0.$$

66. *Nếu a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=3$ thì*

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b) \leq 4.$$

Lời giải. Đặt $P(a,b,c,d)$ là vế trái của bất đẳng thức đã cho. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}P(a,b,c,d)-P(a+c,b+d,0,0)&=b^2c+d^2a+bcd+dab-bc^2-da^2-abc-cda\\&=(b+d-c-a)(ad+bc),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(a,b,c,d)-P(0,b+d,a+c,0)&=a^2b+c^2d+abc+cda-ab^2-cd^2-dab-bcd\\&=(a+b-c-d)(ab+cd).\end{aligned}$$

Rõ ràng có một trong hai số $(b+d-c-a)(ad+bc),(a+c-b-d)(ab+cd)$ là không âm nên

$$P(a,b,c,d)\le\max\{P(a+c,b+d,0,0),P(0,b+d,a+c,0)\}.$$

Mặt khác, ta lại có, theo bất đẳng thức $AM-GM$,

$$\begin{aligned}P(a+c,b+d,0,0)=(a+c)(b+d)^2&=4\cdot(a+c)\cdot\frac{b+d}{2}\cdot\frac{b+d}{2}\\&\le4\left(\frac{a+c+\frac{b+d}{2}+\frac{b+d}{2}}{3}\right)^3=4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(0,b+d,a+c,0)=(b+d)(a+c)^2&=4\cdot(b+d)\cdot\frac{a+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\\&\le4\left(\frac{b+d+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=4.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\max\{P(a+c,b+d,0,0),P(0,b+d,a+c,0)\}\le4.$$

Bất đẳng thức này cho ta điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1,b=2,c=d=0$ cùng các hoán vị tương ứng.

Nhận xét. Bằng phương pháp tương tự như trên, ta cũng chứng minh được

Bài toán. *Với mọi số thực không âm a,b,c,d có tổng bằng 3 ta luôn có*

$$ab(a+2b+3c)+bc(b+2c+3d)+cd(c+2d+3a)+da(d+2a+3b)\le6\sqrt{3}.$$

67. *Cho các số thực không âm a,b,c,d. Chứng minh rằng*

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\ge a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $d=\min\{a,b,c,d\}$. Đặt

$$\begin{aligned}P(a,b,c,d)&=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)\\&=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-d^2(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $P(a,b,c,d)\ge P(t,t,t,d)$ với $t=\frac{a+b+c}{3}$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2-2d(t^3-abc)-d^2(a^2+b^2+c^2-3t^2)\ge0.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $t^3-abc \geq 0$ và $a^2+b^2+c^2-3t^2 \geq 0$. Suy ra $d(t^3-abc) \leq t(t^3-abc)$ và $d^2(a^2+b^2+c^2-3t^2) \leq t^2(a^2+b^2+c^2-3t^2)$. Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2-2t(t^3-abc)-t^2(a^2+b^2+c^2-3t^2) \geq 0.$$

Giả sử $t=1$. Đặt $q=ab+bc+ca \leq 3$ và $abc=r \leq 1$ thì ta có thể viết lại bất đẳng thức trên thành

$$q^2-34q+73+20r \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức *Schur* bậc ba, ta có

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Kết hợp với $t=1$, ta dễ dàng suy ra được $r \geq \frac{4q-9}{3}$. Và điều này dẫn đến

$$q^2-34q+73+20r \geq q^2-34q+73+\frac{20(4q-9)}{3}=\frac{(3-q)(13q-3)}{3} \geq 0.$$

Vậy là ta đã có $P(a,b,c,d) \geq P(t,t,t,d)$. Công việc của ta bây giờ chỉ là chứng minh $P(t,t,t,d) \geq 0$. Rất đơn giản, ta có thể viết lại nó thành

$$d^4+t^3d+t^3d \geq 3t^2d^2,$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo $AM-GM$. Chứng minh hoàn tất tại đây. Với $d=\min\{a,b,c,d\}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d$ và lặp lại khi $a=b=c, d=0$.

68. *Với mọi số thực không âm a,b,c,d có tổng bằng 1 ta luôn có*

$$4(a^3+b^3+c^3+d^3)+15(abc+bcd+cda+dab) \geq 1+48abcd.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Lúc này, chúng ta có đánh giá sau

$$4\sum_{a,b,c} a^3+15\sum abc+\frac{16d(a+b+c)^3}{9(a+b+c+d)} \geq (a+b+c)^3+5d(a+b+c)^2+\frac{48abcd}{a+b+c+d}.$$

Thật vậy, sử dụng các hằng đẳng thức quen thuộc

$$4(a^3+b^3+c^3)+15abc-(a+b+c)^3=3\sum_{a,b,c} a(a-b)(a-c),$$

$$15d(ab+bc+ca)-5d(a+b+c)^2=-5d\sum_{a,b,c}(a-b)(a-c),$$

$$\frac{16d(a+b+c)^3}{9}-48abcd=\frac{16d\sum\limits_{a,b,c}(a+4b+4c)(a-b)(a-c)}{9},$$

ta có thể dễ dàng viết lại bất đẳng thức trên thành

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geq 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} x &= 27a(a+b+c+d) - 45d(a+b+c+d) + 16d(a+4b+4c) \\ &= (9a+7d)(a-d) + 19d(b+c-2d) + 9a(2a+2b+2c) \ge 0, \end{aligned}$$

và các biểu thức y, z tương tự. Ta có

$$\begin{aligned} x - y &= 27(a-b)(a+b+c+d) - 48d(a-b) \\ &\ge 108d(a-b) - 48d(a-b) = 60d(a-b) \ge 0, \end{aligned}$$

và $z(c-a)(c-b) \ge 0$, nên

$$\begin{aligned} &x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \\ &\qquad \ge y(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) = y(a-b)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

Đánh giá của ta được chứng minh. Sử dụng nó kết hợp với $a+b+c+d = 1$, ta sẽ đưa điều phải chứng minh trở thành

$$(1-d)^3 + 5d(1-d)^2 + 4d^3 \ge 1 + \frac{16d(1-d)^3}{9}.$$

Ta có

$$(1-d)^3 + 5d(1-d)^2 + 4d^3 - 1 - \frac{16d(1-d)^3}{9} = \frac{d(1-4d)^2(2+d)}{9} \ge 0$$

nên bất đẳng thức trên là hiển nhiên và phép chứng minh của ta được hoàn tất. Với $a \ge b \ge c \ge d$, ta có đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$, lặp lại khi $a = b = c, d = 0$ và lặp lại lần nữa khi $a = b, c = d = 0$.

69. *Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng* 1. *Chứng minh*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \frac{148}{27}abcd \ge \frac{1}{27}.$$

Lời giải. Đặt $P(a,b,c,d)$ là vế trái của bất đẳng thức đã cho. Do tính đối xứng, giả sử $d = \min\{a,b,c,d\}$. Ta sẽ chứng minh $P(a,b,c,d) \ge P(t,t,t,d)$ với $t = \frac{a+b+c}{3} \ge d$, và bất đẳng thức này tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3t^4 - \frac{148d(t^3 - abc)}{27} \ge 0.$$

Do $t^3 - abc \ge 0$ theo bất đẳng thức $AM-GM$ nên ta có $d(t^3 - abc) \le t(t^3 - abc)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3t^4 - \frac{148t(t^3 - abc)}{27} \ge 0.$$

Do tính thuần nhất, giả sử $t = 1$ và đặt $q = ab + bc + ca \le 3, r = abc \le 1$, bất đẳng thức trên trở thành

$$1958 - 972q + 54q^2 + 472r \ge 0.$$

Theo kết quả bài toán trước thì $r \ge \frac{4q-9}{3}$. Suy ra

$$\begin{aligned} 1958 - 972q + 54q^2 + 472r &\ge 1958 - 972q + 54q^2 + \frac{472(4q-9)}{3} \\ &= \frac{2(3-q)(271-81q)}{3} \ge 0. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng $P(a,b,c,d) \geq P(t,t,t,d)$. Mặt khác, vì $t \leq \frac{1}{3}$ nên

$$\begin{aligned} P(t,t,t,d) - \frac{1}{27} &= 3t^4 + d^4 + \frac{148t^3 d}{27} - \frac{1}{27} = 3t^4 + (1-3t)^4 + \frac{148t^3(1-3t)}{27} - \frac{1}{27} \\ &= \frac{2(1-3t)(13-19t)(1-4t)^2}{27} \geq 0. \end{aligned}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{4}$ hoặc $a=b=c=\frac{1}{3}, d=0$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Ngoài ta, chúng ta còn có một số kết quả cùng dạng

Bài toán. *Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Khi đó*

(i)
$$(1+3a)(1+3b)(1+3c)(1+3d) \leq 8 + 353abcd;$$

(ii)
$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd;$$

(iii)
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq \frac{1}{3} + \frac{32}{3}abcd;$$

$(iiii)$
$$9(abc+bcd+cda+dab) \leq ab+ac+ad+bc+bd+cd+48abcd.$$

Bạn đọc hãy thử sức với chúng nhé!

70. *Giả sử a,b,c,d là các số thực dương có tổng bằng 4. Hãy chứng minh*

$$abc+bcd+cda+dab+(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2 \leq 8.$$

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ và đặt $t = \frac{a+b+c}{3}$. Ta sẽ chứng minh hai bất đẳng thức sau là đúng

$$abc+bcd+cda+dab \leq t^3 + 3dt^2, \tag{2.9}$$

$$(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2 \leq t^6 + 3d^2t^4. \tag{2.10}$$

Bất đẳng thức (2.9) hiển nhiên đúng theo $AM-GM$. Vậy ta chỉ cần xét bất đẳng thức (2.10) là đủ. Bất đẳng thức này tương đương với

$$(t^3-abc)(t^3+abc) + 3d^2t(t^3-abc) \geq d^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-3tabc).$$

Ta có các hằng đẳng thức sau

$$t^3 - abc = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 - abc = \frac{\sum\limits_{a,b,c}(a+4b+4c)(a-b)(a-c)}{27},$$

và

$$\begin{aligned} a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-3tabc &= a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c) \\ &= bc(a-b)(a-c)+ca(b-c)(b-a)+ab(c-a)(c-b), \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geq 0,$$

với

$$\begin{aligned} x &= (t^3+abc+3d^2t)(a+4b+4c)-27bcd^2 \\ &= (t^3-abc)(a+4b+4c)+d^2(a^2+7bc)+4d^2(b-c)^2+2bc(a^2+4ab+4ac-9d^2) \\ &\ge 0, \end{aligned}$$

và các biểu thức y,z tương tự. Ta có

$$ax-by=(t^3+abc+3d^2t)(a^2-b^2+4ac-4bc)\ge 0,$$

nên kết hợp với $a-c\ge \frac{a(b-c)}{b}$, ta được

$$\begin{aligned} x(a-b)(a-c)&+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \\ &=(a-b)[x(a-c)-y(b-c)]+z(c-a)(c-b) \\ &\ge \frac{(a-b)(b-c)(ax-by)}{b}+z(c-a)(c-b)\ge 0. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (2.10) đã được chứng minh. Sử dụng (2.9) và (2.10), ta sẽ đưa điều phải chứng minh trở thành

$$t^3+3dt^2+t^6+3d^2t^4\le 8.$$

Thay $d=4-3t$ rồi thực biến biến đổi, ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$(4t^3+3t^2+4t+2-7t^4)(t-1)^2\ge 0,$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $t<\frac{4}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

71. *Cho các số dương a,b,c,d có tích bằng 1. Khi đó, ta có*

$$(a-1)(a-2)+(b-1)(b-2)+(c-1)(c-2)+(d-1)(d-2)\ge 0.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\ge d$. Lúc này, ta có $abc\ge 1\ge d$. Để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta cần có bất đẳng thức sau

$$(a-1)(a-2)+(b-1)(b-2)+(c-1)(c-2)\ge 3\left(\sqrt[3]{abc}-1\right)\left(\sqrt[3]{abc}-2\right). \tag{2.11}$$

Thay a,b,c lần lượt bởi a^3,b^3,c^3, ta có bất đẳng thức này tương đương với

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2\ge 3(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

Sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\sum(x-y)(x-z),$$

ta có thể viết lại bất đẳng thức trên thành

$$S=x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} x &= (a^2+b^2+c^2)(a+b)(a+c) - 3(a+b+c) \\ &\ge a^2(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) \ge 0, \end{aligned}$$

và các biểu thức y, z tương tự. Dễ thấy $y \ge z$, do đó

$$S \ge y(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) = y(a-b)^2 \ge 0.$$

Vậy (2.11) đã được chứng minh. Sử dụng nó, ta sẽ đưa bài toán về

$$3\left(\sqrt[3]{abc}-1\right)\left(\sqrt[3]{abc}-2\right) + (d-1)(d-2) \ge 0.$$

Đặt $\sqrt[3]{abc} = t$ rồi thay $d = \frac{1}{t^3}$ vào, ta cần chứng minh

$$3(t-1)(t-2) + \left(\frac{1}{t^3}-1\right)\left(\frac{1}{t^3}-2\right) \ge 0.$$

Không mấy khó khăn, ta có thể viết lại nó thành

$$(t-1)^2(3t^6 - 3t^5 - t^4 + t^3 + 3t^2 + 2t + 1) \ge 0,$$

đúng do $3t^6 - 3t^5 - t^4 + t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = t^3(3t^2-1)(t-1) + 3t^2 + 2t + 1 > 0$ (vì $t \ge 1$). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

72. *Cho a, b, c, d là các số thực không âm sao cho trong chúng không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh*

$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3+c^3} + \frac{1}{a^3+d^3} + \frac{1}{b^3+c^3} + \frac{1}{b^3+d^3} + \frac{1}{c^3+d^3} \ge \frac{243}{2(a+b+c+d)^3}.$$

Lời giải. Đặt $P(a,b,c,d) = VT - VP$. Giả sử $d = \min\{a,b,c,d\}$, ta sẽ chứng minh $P(a,b,c,d)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $d = 0$. Để chứng minh điều này, ta cần có bất đẳng thức sau đây

$$P(a,b,c,d) \ge P\left(a+\frac{d}{3}, b+\frac{d}{3}, c+\frac{d}{3}, 0\right). \tag{2.12}$$

Ta có

$$\frac{1}{a^3+d^3} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3}, \qquad \frac{1}{b^3+d^3} \ge \frac{1}{\left(b+\frac{d}{3}\right)^3}, \qquad \frac{1}{c^3+d^3} \ge \frac{1}{\left(c+\frac{d}{3}\right)^3},$$

$$\frac{1}{a^3+b^3} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3 + \left(b+\frac{d}{3}\right)^3}, \qquad \frac{1}{a^3+c^3} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3 + \left(c+\frac{d}{3}\right)^3},$$

$$\frac{1}{b^3+c^3} \ge \frac{1}{\left(b+\frac{d}{3}\right)^3 + \left(c+\frac{d}{3}\right)^3}, \qquad \frac{243}{2(a+b+c+d)^3} = \frac{243}{2\left(a+\frac{d}{3}+b+\frac{d}{3}+c+\frac{d}{3}\right)^3}.$$

Cộng tất cả các đánh giá trên lại ta thu được ngay (2.12). Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{b^3+c^3} + \frac{1}{c^3+a^3} + \frac{1}{a^3+b^3} \ge \frac{243}{2(a+b+c)^3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
2VT &= \sum\left(\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{2}{b^3+c^3}\right)\\
&\ge 3\sum\sqrt[3]{\frac{2}{b^3c^3(b^3+c^3)}} = 3\sum\sqrt[3]{\frac{2}{b^3c^3(b^2-bc+c^2)(b+c)}}\\
&\ge 3\sum\sqrt[3]{\frac{2}{\left(\frac{3bc+b^2-bc+c^2}{4}\right)^4(b+c)}} = 24\sum\frac{1}{(b+c)^3},
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
24\sum\frac{1}{(b+c)^3} &\ge 24\cdot\frac{3}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&\ge 24\cdot\frac{3}{\left(\frac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3} = \frac{243}{(a+b+c)^3}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{2}{a^3}+\frac{2}{b^3}+\frac{2}{c^3}+\frac{2}{b^3+c^3}+\frac{2}{c^3+a^3}+\frac{2}{a^3+b^3} \ge \frac{243}{(a+b+c)^3}.$$

Từ đây, chia cả hai vế cho 2, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Với giả thiết như trên, đẳng thức có được khi $a=b=c$ và $d=0$.

Nhận xét. Chú ý rằng hằng số k tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3} \ge \frac{k}{(a+b+c+d)^3}$$

là $k=\frac{243}{2}$. Đây là một bất đẳng thức rất chặt và khó.

73. *Với các số thực không âm a,b,c,d thỏa mãn $abc+bcd+cda+dab>0$ ta luôn có*

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a^2+d^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{b^2+d^2}+\frac{1}{c^2+d^2} \ge \frac{81}{2(a+b+c+d)^2}.$$

Lời giải. Tương tự như bài toán trước, đặt $P(a,b,c,d)=VT-VP$, ta cũng sẽ chứng minh $P(a,b,c,d)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $d=0$ với $a\ge b\ge c\ge d$. Khi đó, chúng ta sẽ đánh giá như sau

$$P(a,b,c,d) \ge P\left(a, b+\frac{d}{2}, c+\frac{d}{2}, 0\right).$$

Thật vậy, sau một vài biến đổi, ta có thể viết lại nó như sau

$$\begin{aligned}
&\frac{d(4b+d)}{(a^2+b^2)(4a^2+4b^2+4bd+d^2)}+\frac{d(4c+d)}{(a^2+c^2)(4a^2+4c^2+4cd+d^2)}\\
&+\frac{d(2b+2c+d)}{(b^2+c^2)(2b^2+2c^2+2bd+2cd+d^2)}-\frac{d^2}{a^2(a^2+d^2)}\\
&+\frac{2d^2}{(b^2+d^2)(2b+d)^2}+\frac{2d^2}{(c^2+d^2)(2c+d)^2}\ge 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này thực chất chỉ là hệ quả của các bất đẳng thức sau

$$\frac{4b+d}{(a^2+b^2)(4a^2+4b^2+4bd+d^2)} \geq \frac{d}{4a^2(a^2+d^2)},$$
$$\frac{4c+d}{(a^2+c^2)(4a^2+4c^2+4cd+d^2)} \geq \frac{d}{4a^2(a^2+d^2)},$$
$$\frac{2b+2c+d}{(b^2+c^2)(2b^2+2c^2+2bd+2cd+d^2)} \geq \frac{d}{2a^2(a^2+d^2)}.$$

Bất đẳng thức thứ nhất đúng vì nó tương đương với

$$8a^2bd(b-d)+4bd^2(a^2-bd)+d^3(a^2-b^2)+4b(a^4-b^3d)+2a^2(d^3+6a^2b) \geq 0.$$

Hoàn toàn tương tự với bất đẳng thức thứ hai

$$8a^2cd(c-d)+4cd^2(a^2-cd)+d^3(a^2-c^2)+4c(a^4-c^3d)+2a^2(d^3+6a^2c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức thứ ba cũng đúng do dạng tương đương của nó là

$$\begin{aligned}2b(a^4-b^3d)+2c(a^4-c^3d)+2b(a^3-bc^2d)+2c(a^3-b^2cd)+2d^2(a^2-bc)(b+c)\\ +d^2(2b+d)(a^2-b^2)+d^2(2c+d)(a^2-c^2)+2a^4d \geq 0.\end{aligned}$$

Các đánh giá trên chứng tỏ rằng ta chỉ cần chúng minh $P(a,b,c,d) \geq 0$ với $d=0$. Khi đó, bất đẳng thức này trở thành

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{81}{2(a+b+c)^2}.$$

Sử dụng các bất đẳng thức *AM – GM* và *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a^2}+\sum\frac{1}{b^2+c^2} &\geq \sum\left(\frac{1}{2bc}+\frac{1}{b^2+c^2}\right)\\ &\geq \sum\frac{4}{2bc+b^2+c^2}=4\sum\frac{1}{(b+c)^2}\\ &\geq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2\\ &\geq \frac{4}{3}\left[\frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}\right]^2=\frac{27}{(a+b+c)^2},\end{aligned} \tag{2.13}$$

và

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{6}\left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2=\frac{27}{2(a+b+c)^2}. \tag{2.14}$$

Cộng (2.13) và (2.14) lại, ta có ngay điều phải chứng minh.Với $a \geq b \geq c \geq d$, đẳng thức có được khi $a=b=c$ và $d=0$.

74. *Cho a,b,c,d,e là các số thực dương. Chứng minh*

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\left(1+\frac{d}{b+c}\right)\left(1+\frac{e}{c+d}\right)\left(1+\frac{a}{d+e}\right)\left(1+\frac{b}{e+a}\right)\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c+d+e=1$. Khi đó, ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau

$$\frac{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+e)(d+e+a)(e+a+b)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5,$$

$$\frac{a+b+c}{d+e}\cdot\frac{b+c+d}{e+a}\cdot\frac{c+d+e}{a+b}\cdot\frac{d+e+a}{b+c}\cdot\frac{e+a+b}{c+d}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5,$$

$$\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right)\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+d}-1\right)\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5.$$

Để ý rằng với mọi $x,y>0$ thỏa mãn $x+y\le 1$ ta có

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)-\left(\frac{2}{x+y}-1\right)^2=\frac{(x-y)^2(1-x-y)}{xy(x+y)^2}\ge 0.$$

Từ đánh giá này ta suy ra

$$\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\ge\left(\frac{2}{d+e+a+b}-1\right)^2=\left(\frac{2}{1-c}-1\right)^2.$$

Một cách tương tự thì

$$\left(\frac{1}{e+a}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\ge\left(\frac{2}{1-d}-1\right)^2,$$
$$\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{c+d}-1\right)\ge\left(\frac{2}{1-e}-1\right)^2,$$
$$\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\ge\left(\frac{2}{1-a}-1\right)^2,$$
$$\left(\frac{1}{c+d}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right)\ge\left(\frac{2}{1-b}-1\right)^2.$$

Nhân năm bất đẳng thức cùng chiều trên cho ta

$$\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right)\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+d}-1\right)$$
$$\ge\left(\frac{2}{1-a}-1\right)\left(\frac{2}{1-b}-1\right)\left(\frac{2}{1-c}-1\right)\left(\frac{2}{1-d}-1\right)\left(\frac{2}{1-e}-1\right).$$

Vậy để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\frac{2}{1-a}-1\right)\left(\frac{2}{1-b}-1\right)\left(\frac{2}{1-c}-1\right)\left(\frac{2}{1-d}-1\right)\left(\frac{2}{1-e}-1\right)\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5.$$

Lấy logarith nêpe cả hai vế rồi xét hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{2}{1-x} - 1\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ với mọi $x \in [0,1]$, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$
$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \geq \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} = 0.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi, vậy bất đẳng thức *Jensen* cho ta

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) + f(e) \geq 5f\left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right) = 5f\left(\frac{1}{5}\right) = 5\ln\frac{3}{2}.$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = e$.

Nhận xét. Chúng ta có kết quả tổng quát hơn là

Bài toán. *Nếu $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ thì*

$$\left(1 + \frac{a_3}{a_1+a_2}\right)\left(1 + \frac{a_4}{a_2+a_3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_2}{a_n+a_1}\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

75. *Giả sử a,b,c,d,e là các số thực không âm có tổng bằng* 5. *Chứng minh*

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+d^2)(d^2+e^2)(e^2+a^2) \leq \frac{729}{2}.$$

Lời giải. Do vai trò hoán vị vòng quanh giữa các biến a,b,c,d,e nên ta có thể giả sử $e = \min\{a,b,c,d,e\}$. Đặt $P(a,b,c,d,e)$ là vế trái của bất đẳng thức đã cho. Ta có

$$d^2+e^2 \leq \left(d+\frac{e}{2}\right)^2, \qquad e^2+a^2 \leq \left(a+\frac{e}{2}\right)^2,$$

$$a^2+b^2 \leq \left(a+\frac{e}{2}\right)^2 + b^2, \qquad c^2+d^2 \leq c^2 + \left(d+\frac{e}{2}\right)^2,$$

nên

$$P(a,b,c,d,e) \leq P\left(a+\frac{e}{2}, b, c, d+\frac{e}{2}, 0\right).$$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu với $e = 0$. Khi đó, ta có $a+b+c+d = 5$ và bất đẳng thức này trở thành

$$Q(a,b,c,d) = a^2d^2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+d^2) \leq \frac{729}{2}. \tag{2.15}$$

Do vai trò b,c là như nhau, giả sử $b \leq c$. Bây giờ, ta lại có

$$a^2(a^2+b^2) \leq \left(a^2+ab+\frac{b^2}{4}\right)^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2, \qquad b^2+c^2 \leq \left(c+\frac{b}{2}\right)^2,$$

nên

$$Q(a,b,c,d) \leq Q\left(a+\frac{b}{2}, 0, c+\frac{b}{2}, d\right).$$

Từ đây suy ra (2.15) sẽ được chứng minh nếu $b=0$. Lúc này $a+c+d=5$ và ta cần có

$$a^4c^2d^2(c^2+d^2) \le \frac{729}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
2a^4c^2d^2(c^2+d^2) &= a^4\cdot cd\cdot 2cd(c^2+d^2)\\
&\le a^4\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\left(\frac{2cd+c^2+d^2}{2}\right)^2 = 4a^4\left(\frac{c+d}{2}\right)^6\\
&= 729\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{c+d}{3}\right)^3\right]^2\\
&\le 729\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{c+d}{3}+\frac{c+d}{3}+\frac{c+d}{3}}{5}\right)^{10}\\
&= 729\left(\frac{a+c+d}{5}\right)^{10} = 729.
\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d,e)=\left(2,0,\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$ cùng các hoán vị tương ứng.

76. *Với a,b,c,d,e là các số thực dương có tổng bằng 5, hãy chứng minh*

$$abc+bcd+cde+dea+eab \le 5.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c,d,e\}$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
abc+bcd+cde+dea+eab &= cd(b+e-a)+a(b+d)(c+e)\\
&\le \left(\frac{c+d+b+e-a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{b+d+c+e}{2}\right)^4\\
&= \left(\frac{5-2a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{5-a}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$5-\left(\frac{5-2a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{5-a}{2}\right)^2 = \frac{5(1-a)^2(2+a)}{108} \ge 0,$$

nên kết hợp với trên, ta suy ra ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến a,b,c,d,e đều bằng 1.

77. *Cho sáu số thực dương a,b,c,x,y,z. Chứng minh*

$$\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z} \ge \frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}.$$

Lời giải. Ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau

$$\frac{a+b+c+x+y+z}{4}-\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$$
$$\le \left(\frac{a+x}{4}-\frac{ax}{a+x}\right)+\left(\frac{b+y}{4}-\frac{by}{b+y}\right)+\left(\frac{c+z}{4}-\frac{c+z}{cz}\right),$$

$$\frac{(a+b+c-x-y-z)^2}{a+b+c+x+y+z}\le\frac{(a-x)^2}{a+x}+\frac{(b-y)^2}{b+y}+\frac{(c-z)^2}{c+z},$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$VP=\frac{[(a-x)+(b-y)+(c-z)]^2}{(a+x)+(b+y)+(c+z)}\le\frac{(a-x)^2}{a+x}+\frac{(b-y)^2}{b+y}+\frac{(c-z)^2}{c+z}=VT.$$

Bài toán được giải quyết.

78. *Với hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bất kỳ ta có*

$$a'(b+c-a)+b'(c+a-b)+c'(a+b-c)\ge 4\sqrt{3SS'}.$$

Lời giải. Đặt $x=p-a, y=p-b, z=p-c, x'=p'-a', y'=p'-b', z'=p'-c'$ thì ta có x,y,z,x',y',z' là các số dương và bát đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2x(y'+z')+2y(z'+x')+2z(x'+y')\ge 4\sqrt[4]{9xyz(x+y+z)x'y'z'(x'+y'+z')},$$

hay là

$$x(y'+z')+y(z'+x')+z(x'+y')+x'(y+z)+y'(z+x)+z'(x+y)$$
$$\ge 4\sqrt[4]{9xyz(x+y+z)x'y'z'(x'+y'+z')}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$x(y'+z')+y(z'+x')+z(x'+y')\ge 3\sqrt[3]{xyz(x'+y')(y'+z')(z'+x')},$$

$$x'(y+z)+y'(z+x)+z'(x+y)\ge 3\sqrt[3]{x'y'z'(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Sử dụng hai kết quả này, ta được

$$x(y'+z')+y(z'+x')+z(x'+y')+x'(y+z)+y'(z+x)+z'(x+y)$$
$$\ge 3\sqrt[3]{xyz(x'+y')(y'+z')(z'+x')}+3\sqrt[3]{x'y'z'(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$\ge 6\sqrt[6]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)x'y'z'(x'+y')(y'+z')(z'+x')}.$$

Mặt khác, từ $9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$ và $ab+bc+ca\ge\sqrt{3abc(a+b+c)}$ ta suy ra $3\sqrt{3}(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8\sqrt{abc}(a+b+c)^{3/2}$, và như thế

$$xyz(x+y)(y+z)(z+x)x'y'z'(x'+y')(y'+z')(z'+x')$$
$$\ge\frac{64(xyz)^{3/2}(x+y+z)^{3/2}(x'y'z')^{3/2}(x'+y'+z')^{3/2}}{27}.$$

Kết hợp với trên, ta dễ dàng suy ra được

$$\begin{aligned}
&x(y'+z')+y(z'+x')+z(x'+y')+x'(y+z)+y'(z+x)+z'(x+y)\\
&\quad\geq 6\sqrt[6]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)x'y'z'(x'+y')(y'+z')(z'+x')}\\
&\quad\geq 6\sqrt[6]{\frac{64(xyz)^{3/2}(x+y+z)^{3/2}(x'y'z')^{3/2}(x'+y'+z')^{3/2}}{27}}\\
&\quad= 4\sqrt[4]{9xyz(x+y+z)x'y'z'(x'+y'+z')}.
\end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các tam giác ABC và $A'B'C'$ đều.

79. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ là các số thực không âm có tổng bằng 1. Hãy chứng minh*

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i+1}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n} &\leq \sqrt{n\left(a_1+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+a_2+\ldots+a_n\right)}\\
&= \sqrt{n\left(a_1+\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+1-a_1\right)}\\
&= \sqrt{\frac{(na_1+n-1)(n+1-na_1)}{n}}.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}}{\sqrt{1+a_1}} &\leq \sqrt{\frac{(na_1+n-1)(n+1-na_1)}{n(1+a_1)}}\\
&= \sqrt{n+2-na_1-\frac{2n+1}{n(1+a_1)}}.
\end{aligned}$$

Thiết lập các đánh giá tương tự, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n+2-na_i-\frac{2n+1}{n(1+a_i)}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

Lại sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n+2-na_i-\frac{2n+1}{n(1+a_i)}} &\le \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left[n+2-na_i-\frac{2n+1}{n(1+a_i)}\right]}\\
&= \sqrt{n^2(n+1)-(2n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}}\\
&\le \sqrt{n^2(n+1)-\frac{n^2(2n+1)}{n+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}}\\
&= \sqrt{n^2(n+1)-\frac{n^2(2n+1)}{n+1}}=\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i=\frac{1}{n}, \forall i=1,2,\ldots,n.$

80. *Chứng minh với $k=n-1$*

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\ge n^2+k\left[\frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i<j}^{n}a_ia_j}-2\right],$$

trong đó $a_1,a_2,\ldots,a_n\,(n\ge 3)$ là các số thực dương.

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với từng bất đẳng thức trong dãy sau

$$\sum_{i<j}^{n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)+n\ge n^2-2n+2+\frac{(n-1)^2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i<j}^{n}a_ia_j},$$

$$\sum_{i<j}^{n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}+2\right)+2n-n^2\ge n^2-2n+2+\frac{(n-1)^2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i<j}^{n}a_ia_j},$$

$$\sum_{i<j}^{n}\frac{(a_i+a_j)^2}{a_ia_j}\ge 2(n-1)^2+\frac{(n-1)^2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i<j}^{n}a_ia_j},$$

$$\sum_{i<j}^{n}\frac{(a_i+a_j)^2}{a_ia_j}\ge\frac{(n-1)^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum\limits_{i<j}^{n}a_ia_j}.$$

Ta có thể thấy bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo *Cauchy – Schwarz*

$$VT \geq \frac{\left[\sum\limits_{i<j}^{n}(a_i+a_j)\right]^2}{\sum\limits_{i<j}^{n} a_ia_j} = \frac{(n-1)^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum\limits_{i<1}^{n} a_ia_j} = VP.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

81. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n\,(n \geq 3)$ là các số thực dương. Chứng minh*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} - n + 1\right).$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}} + \sqrt{2\sum_{i<j}^{n} a_ia_j \cdot 2\sum_{i<j}^{n} \frac{1}{a_ia_j}} \\
&\qquad \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_ia_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} + 2\sum_{i<j}^{n} \frac{1}{a_ia_j}\right)} \qquad (2.16)\\
&\qquad = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức *Newton*, ta lại có

$$\begin{aligned}
4\sum_{i<j}^{n} a_ia_j \sum_{i<j}^{n} \frac{1}{a_ia_j} &= \frac{4\sum\limits_{i<j}^{n} a_ia_j \sum\limits_{i_1<i_2<\ldots<i_{n-2}}^{n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{n-2}}}{a_1a_2\ldots a_n} \\
&\geq \frac{(n-1)^2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i_1<i_2<\ldots<i_{n-1}}^{n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{n-1}}}{a_1a_2\ldots a_n} \qquad (2.17)\\
&= (n-1)^2\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.16) và (2.17) lại, ta thu được

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}} + (n-1)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Ta có điều cần chứng minh. Với $n = 3$, đẳng thức xảy ra khi $a_1^2 = a_2a_3$, hoặc $a_2^2 = a_3a_1$, hoặc $a_3^2 = a_1a_2$. Với $n \geq 4$, đẳng thức chỉ xảy ra tại $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

82. *Giả sử* $a_1, a_2, \ldots, a_n\,(n \geq 3)$ *là các số thực dương thỏa mãn* $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n$. *Chứng minh*

$$\frac{x_1^3}{x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2} + \frac{x_2^3}{x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2} + \ldots + \frac{x_n^3}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-2}^2} \geq \frac{n}{n-2}.$$

Lời giải. Gọi S là vế trái của biểu thức đã cho. Đặt $x_0 = x_n$, khi đó ta có

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^3}{n - x_{i-1}^2 - x_i^2}.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$S \sum_{i=1}^{n-1} x_i(n - x_{i-1}^2 - x_i^2) \geq \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^2 = n^2.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$n(n-2) \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_i(n - x_{i-1}^2 - x_i^2).$$

Lại áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i(n - x_{i-1}^2 - x_i^2) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2(n - x_{i-1}^2 - x_i^2) \sum_{i=1}^{n-1} (n - x_{i-1}^2 - x_i^2)}.$$

Mặt khác,

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n - x_{i-1}^2 - x_i^2) = n^2 - 2n,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2(n - x_{i-1}^2 - x_i^2) &= n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 x_{i-1}^2 - x_i^4 \\ &= n^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^4 + 2x_i^2 x_{i-1}^2 + x_{i-1}^4) \\ &= n^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i-1}^2)^2. \end{aligned}$$

Do đó bài toán được đưa về

$$n^2(n-2)^2 \geq n(n-2)\left[n^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i-1}^2)^2 \right],$$

hay tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i-1}^2)^2 \geq 4n.$$

Bất đẳng thức này cũng đúng theo *Cauchy – Schwarz*

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i-1}^2)^2 \geq \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i-1}^2)\right]^2 = \frac{1}{n}\cdot 4n^2 = 4n.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_k = 1, \forall k = 1,2,\ldots,n$.

83. *Cho $a_0, a_1, \ldots, a_n\,(n \geq 1)$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_{k+1}-a_k \geq 1$ với mọi $k = 0,1,\ldots,n$. Chứng minh rằng khi đó*

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right) \leq \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Lời giải. Ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh bài toán này. Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng tới n, ta cũng sẽ chứng minh nó đúng cho $n+1$. Điều giả sử của ta là

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right) \leq \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right),$$

và điều cần chứng minh là

$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right) \leq \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ở trên, ta có

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\left[1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\right]\\ &\qquad\leq \left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Do đó, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là đúng

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\right)\\ &\qquad\leq \left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\left[1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\right].\end{aligned}$$

Ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_0(a_{n+1}-a_0)}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_2-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right)\\ &\qquad\leq \frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_0a_{n+1}}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_2-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right),\end{aligned}$$

hay là

$$\frac{1}{a_{n+1}-a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_2-a_0}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n-a_0}\right) \leq 1.$$

Từ giả thiết $a_{k+1}-a_k \geq 1, \forall k = 0,1,...,n$ ta suy ra ngay

$$VT \leq \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 = VP.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $n = 1$ là phép chứng minh sẽ được hoàn tất. Xin dành cho bạn đọc hoàn chỉnh.

Tài liệu tham khảo

[1] Vasile Cîrtoaje, *Algebraic Inequalities – Old and New Methods*, GIL Publishing House, 2006.

[2] E. Beckenbach, R. Bellman, *An Introdution to Inequalities*, The L. W. Singer Company, 1960.

[3] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1967.

[5] J. M. Steele, *The Cauchy – Schwarz Master Class*, Cambridge University Press, 2004.

[6] Võ Quốc Bá Cẩn, *Chuyên đề bất đẳng thức Hiện đại*, 2008.

[7] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2009.

[8] Vasile Cîrtoaje, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Phân loại và Phương pháp giải toán Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2010.