CÁC CÁCH NHÌN KHÁC NHAU ĐỐI VỚI MỘT BÀI TOÁN

Tiếp cận lời giải của một bài toán, chúng ta có những cách nhìn, quan niệm khác nhau. Nhờ việc thay đổi cách nhìn và quan niệm đó chúng ta sẽ có những cách giải khác nhau cho một bài toán. Sau đây là một bài toán như vậy:

Bài toán: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: a + b + c = 1. Chứng minh:

$$\sqrt{\boldsymbol{a+b}}+\sqrt{\boldsymbol{b+c}}+\sqrt{\boldsymbol{c+a}}\leq\sqrt{\boldsymbol{6}}$$

Bài giải

***Cách 1:* Áp dụng BĐT Cauchy ta có:**

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,.\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{2}{3}.(a+b)}\leq\frac{\frac{2}{3}+(a+b)}{2}\qquad(1)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,.\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{2}{3}.(a+b)}\leq\frac{\frac{2}{3}+\ (a+b)}{2}\qquad(2)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{(a+b)}=\sqrt{\frac{2}{3}.(a+b)}\ \leq\frac{\frac{2}{3}+(a+b)}{2}\qquad(3)$$

Cộng các vế tương ứng (1), (2) và (3) ta được: $\sqrt{\frac{2}{3}}.\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)\leq\frac{1}{2}.[2+2.(a+b+c)]=2\ \Leftrightarrow\ \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\leq\sqrt{6}.$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

***Cách 2:* Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:**

$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\leq\sqrt{(1+1+1)(2a+2b+2c)}=\sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi

$\frac{\sqrt{a+b}}{1}=\frac{\sqrt{b+c}}{1}=\frac{\sqrt{c+a}}{1}\Rightarrow$ a = b = c mà a + b + c = 1 $\Longrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\Longrightarrow$ ĐPCM

***Cách 3*: Dùng hình học giải tích trong không gian.**

Đặt $x=\sqrt{a+b}$; $y=\sqrt{b+c}+$; $z=\sqrt{c+a}$ (x,y,z > 0)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} = x+y+z = m\ (m>0) \\ x^2+y^2+z^2 = 2(a+b+c) = 2 \end{cases}$$

Với m là tham số, ta có: $x+y+z=m$ là phương trình mặt phẳng. $x^2+y^2+z^2=2$ là phương trình mặt cầu tâm I(0;0;0) và bán kính r = $\sqrt{2}$. Theo bài ra thì hệ sau phải có nghiệm:

$\begin{cases} x+y+z=m & (1) \\ x^2+y^2+z^2=2 & (2) \end{cases}$. Tức là mặt phẳng (1) phải cắt mặt cầu (2). Điều này xãy ra khi khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (1) phải phải nhỏ hơn hoặc bằng bán kính r, tức là ta có:

$\frac{|0+0+0-m|}{\sqrt{3}} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow |m| \le \sqrt{6} \Rightarrow$ m $\le \sqrt{6}$ hay $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$.

Dấu "=" xảy ra khi mặt phẳng (1) tiếp xúc với mặt cầu (2). Ta tìm tọa độ tiếp điểm của chúng: Đường thẳng qua I(0;0;0) và vuông góc với mặt phẳng: $x+y+z=\sqrt{6}$ là: (d): $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

Giao điểm của (d) với mặt cầu là K $\Rightarrow 3t^2 = 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (vì t > 0) $\Rightarrow$ x = y = z = $\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$ K$\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3} \Rightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Rightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 4</u>: Dùng phương pháp biến đổi kết hợp với BĐT cauchy:

Đặt P = $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} > 0 \Rightarrow P^2 = 2(a+b+c) + 2(\sqrt{a+b}.\sqrt{b+c} + \sqrt{b+c}.\sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}.\sqrt{c+a}) \Rightarrow P^2 \le 2 + 2.[\frac{(a+b)+(b+c)}{2} + \frac{(b+c)+(c+a)}{2} + \frac{(c+a)+(a+b)}{2}] \Leftrightarrow P^2 \le 2 + 2.\frac{4(a+b+c)}{2} = 6 \Leftrightarrow P \le \sqrt{6}$ (do P > 0). Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1/3 $\Rightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 5</u>: Dùng phương pháp biến đổi:

Đặt $x=\sqrt{a+b}$; $y=\sqrt{b+c}$+ ; $z=\sqrt{c+a} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z \le \sqrt{6} & (*) \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ 0 < x;y;z < \sqrt{2} \end{cases}$

(*)$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \le 6 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \le 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2) \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy (*) đúng, hay BĐT đã cho đúng. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z $\Rightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Rightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 6</u>: Dùng phương pháp biến đổi:

Đặt $x = \sqrt{a+b}$; $y = \sqrt{b+c}$+ ; $z = \sqrt{c+a}$ $\Longrightarrow \begin{cases} x+y+z \le \sqrt{6} \quad (*) \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \\ 0 < x; y; z < \sqrt{2} \end{cases}$

(*)⇔ $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \le 6 \Leftrightarrow 2[\,x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)] \le 6(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $x^2+y^2 \ge 2xy$; $y^2+z^2 \ge 2yz$; $x^2+z^2 \ge 2zx \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$. Vậy BĐT đã cho là đúng. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z ⟹ a = b = c = 1/3 ⟹ ĐPCM.

<u>Cách 7</u>: Dùng định lý thuận của tam thức bậc hai:

Với mọi x ∈ R ta luôn có:

$$\begin{cases} -(x-\sqrt{a+b})^2 \le 0 \\ -(x-\sqrt{b+c})^2 \le 0 \\ -(x-\sqrt{c+a})^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2\sqrt{a+b}-(a+b) \le 0 \quad (1) \\ -x^2+2\sqrt{b+c}-(b+c) \le 0 \quad (2) \\ -x^2+2\sqrt{c+a}-(c+a) \le 0 \quad (3) \end{cases}$$

Cộng vế với vế (1), (2) và (3) ta được: $-3\,x^2+2(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})x-2(a+b+c) \le 0 \Leftrightarrow -3\,x^2+2(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})x-2 \le 0$ (*). Do (*) đúng với mọi x ∈ R nên $\Delta' \le 0$ hay $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2-6 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1/3 ⟹ ĐPCM.

<u>Cách 8</u>: Dùng đạo hàm khảo sát hàm số:

Ta có: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{1-c}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a} \le \sqrt{6}$ (*). Do a,b,c ∈ (0; 1) nên ta có: 5 - 3a ≠ 0; 5 – 3b ≠ 0 ; 5 – 3c ≠ 0.

(*)⇔ $\frac{(5-3a)\sqrt{1-a}}{(5-3a)} + \frac{(5-3b)\sqrt{1-b}}{(5-3b)} + \frac{(5-3c)\sqrt{1-c}}{(5-3c)} \le \sqrt{6}$ (**). Xét hàm số f(x) = $\frac{\sqrt{1-x}}{(5-3x)}$ với x ∈ 0; 1)

Có f '(x) = $\frac{1-3x}{2(5-3x)^2\sqrt{1-x}}$ với x ∈ 0; 1) ⟹ f '(x) = 0 ⇔ x = 1/3. Ta có bảng biến thiên:

X	0		1/3		1
f '(x)	‖	+	0	-	‖
f(x)	‖	1/5 ↗	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	↘ 0	‖

Do x ∈ 0; 1) nên 5 – 3x > 0 ⟹ (5 – 3x).f(x) ≤ (5 – 3x).f(1/3) hay 5 – 3x).f(x) ≤ (5 – 3x). $\frac{\sqrt{6}}{12}$

Thay x lần lượt bởi a, b, c thì ta có: VT(**)≤ $\frac{\sqrt{6}}{12}$ (5 – 3a + 5 – 3b + 5 – 3c) = $\sqrt{6}$. Vậy (*) đúng, tức là $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1/3 ⟹ ĐPCM.

<u>Cách 9</u>:Dùng phương pháp dồn biến kết hợp với đạo hàm khảo sát hàm số :

Ta có: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} = \sqrt{1-a}+\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}$. Lại có: $(\sqrt{a+b}+\sqrt{c+a})^2$ = 2a + b + c + 2$\sqrt{a^2+a(b+c)+bc}$ = 1 + a + 2$\sqrt{a^2+a(1-a)+bc}$ ≤ 1 + a + 2$\sqrt{a+(\frac{b+c}{2})^2}$

= 1 + a + 2$\sqrt{a+(\frac{1-a}{2})^2}$ = 1 + a + 2$\sqrt{a+\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}}$ = 1 + a + $\sqrt{a^2+2a+1}$ = 2(a + 1) (vì a ∈ $(0;1)$). ⟹ $\sqrt{a+b}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{2(1+a)}$ ⟹ $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{1-a}+\sqrt{2(1+a)}$. Xét hàm số f(a) = $\sqrt{1-a}+\sqrt{2(1+a)}$, với a ∈ $(0;1)$. Không mất tính tổng quát, giả sử a = Max{a;b;c} ⟹ 1 = a + b + c ≤ 3a ⟹ $\frac{1}{3}$ ≤a < 1. Ta có: f '(a) = $\frac{-1}{2\sqrt{1-a}}+\frac{1}{\sqrt{2(1+a)}}$

Xét f '(a) ≥ 0 ⇔ 4(1 – a) ≥ 2(1 + a) ⇔ a ≤ 1/3 ⟹ f '(a) = 0 ⇔ a = 1/3. Ta có bảng biến thiên của f(a) với a ∈ [$\frac{1}{3}$; 1) như sau:

A	1/3		1	
f '(a)	+ 0	-	||	+
f (a)	$\sqrt{6}$	↘	2 ||	

Vậy $\underset{[\frac{1}{3};1)}{Max\, f(a)}$ = $\sqrt{6}$ tại a = 1/3 hay ta được $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1/3 ⟹ ĐPCM.

<u>Cách 10:</u> Dùng định lý vi-et và điều kiện có nghiệm của bất phương trình bậc hai :

Đặt $x=\sqrt{a+b}$; $y=\sqrt{b+c}$+ ; $z=\sqrt{c+a}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=S \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=S-z \\ x^2+y^2=2-z^2 \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=S-z \\ xy=\frac{(S-z)^2+z^2-2}{2} \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases}.$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có điều kiện cần để tồn tại x, y là:

$(S-z)^2 \geq 4.\frac{(S-z)^2+z^2-2}{2} \Leftrightarrow (S-z)^2 \geq 2.(S-z)^2+2z^2-4 \Leftrightarrow 3z^2-2Sz+S^2-4 \leq 0\ (*)$

Do (*) phải có nghiệm z nên Δ' ≥ 0(vì a = 3 > 0) hay $S^2-3(S^2-4) \geq 0 \Leftrightarrow S^2 \leq 6$

$\Leftrightarrow S \leq \sqrt{6}$ (vì S > 0). Vậy: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 11:</u> Dùng định BĐT phụ :

Ta chứng minh BĐT phụ sau: $\sqrt{1-x} \leq \frac{-3x+5}{2\sqrt{6}}$ với $\forall\, x \in (0;1)$. Do $x \in (0;1)$ nên -3x + 5 > 0, nên ta được $24(1-x) \leq 25 - 30x + 9x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0$. BĐT này đúng với

$\forall\, x \in (0;1)$. Áp dụng cho các số a, b, c ∈ (0; 1) ta được:

$\sqrt{1-a} \leq \frac{-3a+5}{2\sqrt{6}}$ (1); $\sqrt{1-a} \leq \frac{-3a+5}{2\sqrt{6}}$ (2) ; $\sqrt{1-a} \leq \frac{-3a+5}{2\sqrt{6}}$ (3)

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3) ta được:

$\sqrt{1-c}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a} \leq \frac{-3(a+b+c)+15}{2\sqrt{6}}$. Mà a + b + c = 1 nên $\sqrt{1-c}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a} \leq \sqrt{6}$ hay $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 12:</u> Sử dụng vec-tơ và tọa độ trong không gian:

Trong không gian Oxyz, xét $\vec{x}(\sqrt{a+b};\ \sqrt{b+c};\ \sqrt{c+a})$; $\vec{y}(1;1;1)$. Ta luôn có $\vec{x}.\vec{y} \leq |\vec{x}|.|\vec{y}|$ nên ta có: $1.\sqrt{a+b}+1.\sqrt{b+c}+1.\sqrt{c+a} \leq \sqrt{3}.\sqrt{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương $\Longrightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 13:</u> Sử dụng lượng giác hóa:

Ta có: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} = \sqrt{a+b}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a}$. Do a, b, c > 0 và a + b + c = 1 nên a, b, c ∈ (0; 1). Đặt a = cosx; b = cosy với x, y ∈ $(0;\frac{\pi}{2})$. Khi đó $\sqrt{a+b}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a} = \sqrt{\cos x+\cos y}+\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1-\cos y} = \sqrt{2cos\frac{x+y}{2}.cos\frac{x-y}{2}}+\sqrt{2sin^2\frac{x}{2}}+\sqrt{2sin^2\frac{y}{2}} \leq \sqrt{2cos\frac{x+y}{2}}+\sqrt{2}.\sin\frac{x}{2}+\sqrt{2}.\sin\frac{y}{2} = \sqrt{2(1-2sin^2\frac{x+y}{4})}+2\sqrt{2}.\sin\frac{x+y}{4}.cos\frac{x-y}{4}$

$\leq \sqrt{2(1-2sin^2\frac{x+y}{4})}+2\sqrt{2}.\sin\frac{x+y}{4}$ = A. Để chứng minh bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$A \le \sqrt{6}$, thật vậy: $A \le \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{2(1-2sin^2\frac{x+y}{4})} + 2\sqrt{2}.\sin\frac{x+y}{4} \le \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(1-2sin^2\frac{x+y}{4})} \le -2\sqrt{2}.\sin\frac{x+y}{4} + \sqrt{6}$ (*). Do o < x, y < $\frac{\pi}{2}$ nên $0 < \frac{x+y}{4} < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \sin\frac{x+y}{4} \le \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -2\sqrt{2}.\sin\frac{x+y}{4} + \sqrt{6} > -2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6} = \sqrt{6} - 2 > 0$ và

$1-2sin^2\frac{x+y}{4} > 1 - 2.(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$ nên hai vế của (*) đều dương, bình phương hai vế ta được:

$1-2sin^2\frac{x+y}{4} \le 4.\sin^2(\frac{x+y}{4}) + 3 - 4\sqrt{3}.\sin\frac{x+y}{4} \Leftrightarrow 6.\sin^2(\frac{x+y}{4}) - 4\sqrt{3}.\sin\frac{x+y}{4} + 2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{6}.\sin\frac{x+y}{4} - \sqrt{2})^2 \ge 0$ (BĐT đúng). Nên $A \le \sqrt{6}$ hay $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ sin\frac{x+y}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow cosx = \cos y = 1 - 2sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2.\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Rightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 14</u>:Dùng đạo hàm khảo sát hàm số :

Đặt a = $\frac{1}{3}$ - x; b = $\frac{1}{3} - y$; c = $\frac{1}{3}$ + x + y. Do a, b ∈ (0; 1) nên: 0 < $\frac{1}{3}$ - x < 1 và 0 < $\frac{1}{3} - y$ < 1. Vậy

x, y ∈ $(\frac{-2}{3};\frac{1}{3})$. Ta có: $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} = \sqrt{\frac{2}{3}+x} + \sqrt{\frac{2}{3}+y} + \sqrt{\frac{2}{3}-x-y}$ = f(x;y).

Ta xem f(x;y) là hàm số của x với y là tham số $\Rightarrow f'_x(x;y) = \frac{1}{2.\sqrt{\frac{2}{3}+x}} + \frac{-1}{2.\sqrt{\frac{2}{3}-x-y}}$. Xét $f'_x(x;y) \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} + x \le \frac{2}{3} - x - y \Leftrightarrow x \le -\frac{y}{2}$. Ta có bảng biến thiên sau:

X	$\frac{-2}{3}$		$-\frac{y}{2}$		$\frac{1}{3}$
$f'_x(x;y)$	‖	+	0	-	‖
f (x;y)	‖	↗	M	↘	‖

Vậy f(x;y) ≤ M = $f(-\frac{y}{2};y) = 2.\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{y}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}+y}$ = g(y). Xét hàm số g(y) với y ∈ $(\frac{-2}{3};\frac{1}{3})$.

$g'(y) = \frac{-1}{2.\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{y}{2}}} + \frac{1}{2.\sqrt{\frac{2}{3}+y}}$. $g'(y) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + y \le \frac{2}{3} - \frac{y}{2} \Leftrightarrow y \le 0$. Ta có bảng biến thiên:

Y	$\frac{-2}{3}$		0		$\frac{1}{3}$
g'(y)	||	+	0	-	||
g(y)	||	↗	$\sqrt{6}$	↘	||

$\Longrightarrow$ f(x;y) $\le \sqrt{6} \Longrightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi x = y = 0 $\Longrightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 15:</u> Dùng BĐT phụ :

Đặt $x=\sqrt{a+b}$; $y=\sqrt{b+c}$+ ; $z=\sqrt{c+a}$ $\Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases}$. Vậy ta cần chứng minh:

x + y + z $\le \sqrt{6}$. Trước tiên ta chứng minh BĐT: $t \le 3t^2 + (1 - 2\sqrt{6})t + 2$ (*), thật vậy:

(*) $\Leftrightarrow 3t^2 - 2\sqrt{6}t + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}t - \sqrt{2})^2 \ge 0$ (luôn đúng). Áp dụng cho các số x, y, z ta được:

$$\begin{cases} x \le 3x^2 + (1-2\sqrt{6})x + 2 \\ y \le 3y^2 + (1-2\sqrt{6})y + 2 \\ z \le 3z^2 + (1-2\sqrt{6})z + 2 \end{cases} \Longrightarrow x+y+z \le 3(x^2+y^2+z^2) + (1-2\sqrt{6})(x+y+z) + 6$$

$\Leftrightarrow$ x + y + z $\le \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi x = y = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\Longrightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

<u>Chú ý:</u> *BĐT (*) tìm được bằng cách xét đường thẳng y = t là tiếp tuyến của Parabol* $y = 3t^2 + (1 - 2\sqrt{6})t + 2$ *tại điểm* $t_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

<u>Cách 16:</u> Sử dụng véc-tơ, tọa độ trong mặt phẳng và đạo hàm :

Trong mặt phẳng Oxy xét $\vec{u}(1;1)$; $\vec{v}(x;y)$. Bằng cách đặt $x=\sqrt{a+b}$; $y=\sqrt{b+c}$; $z=\sqrt{c+a}$ $\Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=m \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m-z \\ x^2+y^2=2-z^2 \ (*) \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases}$. Mà $\vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$ nên x + y $\le \sqrt{2(x^2+y^2)}$.

Kết hợp (*) ta được: m – z $\le \sqrt{2(2-z^2)}$ hay m $\le \sqrt{2(2-z^2)}$ + z = f(z). Ta có: f '(z)= 1 - $\frac{2z}{\sqrt{2(2-z^2)}} = \frac{\sqrt{2(2-z^2)}-2z}{\sqrt{2(2-z^2)}}$. f '(z) = 0 $\Leftrightarrow 2(2-z^2) = 4z^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ta có bảng biến thiên của f(z):

Z	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{2}$
f'(z)		+	0	-	
f(z)		↗	$\sqrt{6}$	↘	

Vậy m ≤ f(z) ≤ f($\sqrt{\frac{2}{3}}$) = $\sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi z = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ = x = y ($\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương)

$\Longrightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 17:</u> Dùng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng:

Đặt $x = \sqrt{a+b}$; $y = \sqrt{b+c}$; $z = \sqrt{c+a}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=m \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m-z & (1) \\ x^2+y^2=2-z^2 & (2) \\ 0<x;y;z<\sqrt{2} \end{cases}$$

(1) là phương trình đường thẳng, còn (2) là phương trình đường tròn tâm O(0;0), bán kính R = $\sqrt{2-z^2}$ trong mặt phẳng Oxy. Vậy để tồn tại x, y thỏa mãn (1), (2) ta cần có: Khoảng cách từ O đến đường thẳng (1) phải nhỏ hơn hoặc bằng bán kính đường tròn (2): $\frac{|m-z|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2-z^2}$

$\Leftrightarrow$ $m^2 - 2mz + z^2 \le 4 - 2z^2$ $\Leftrightarrow$ $3z^2 - 2mz + m^2 - 4 \le 0$. Bất phương trình này phải có nghiệm z nên $\Delta' \ge 0$ hay $m^2 - 3m^2 + 12 \ge 0$ $\Leftrightarrow$ $m^2 \le 6$ $\Leftrightarrow m \le \sqrt{6}$ hay $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$, m = $\sqrt{6}$ khi z = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ = x = y $\Longrightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Longrightarrow$ ĐPCM.

<u>Cách 18:</u> Dự đoán đấu bằng xãy ra, đưa về trường hợp dấu bằng xãy ra khi các phần tử bằng 0:

Đặt $x = \sqrt{a+b}$; $y = \sqrt{b+c}$; $z = \sqrt{c+a} \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 2$ và $0 < x;y;z < \sqrt{2}$, ta cần chứng minh: $x + y + z \le \sqrt{6}$ (1). Đặt x = m + $\sqrt{\frac{2}{3}}$; y = n + $\sqrt{\frac{2}{3}}$; z = k + $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ta cần chứng minh: (m + $\sqrt{\frac{2}{3}}$) + (n + $\sqrt{\frac{2}{3}}$)+ (k + $\sqrt{\frac{2}{3}}$) ≤ $\sqrt{6}$ hay m + n + k ≤ 0 (2). Lại có: $x^2+y^2+z^2 = 2$

$\Rightarrow$ (m + $\sqrt{\frac{2}{3}}$)^2 + (n + $\sqrt{\frac{2}{3}}$)^2 + (k + $\sqrt{\frac{2}{3}}$)^2 = 2 $\Leftrightarrow$ $m^2 + n^2 + k^2 + 2.\sqrt{\frac{2}{3}}(m + n + k) = 0$

$\Leftrightarrow$ $2.\sqrt{\frac{2}{3}}(m + n + k) = -(m^2 + n^2 + k^2) \le 0$ hay $m + n + k \le 0$. Vậy (2) đúng, nên (1) đúng

$\Rightarrow$ BĐT đã cho đúng. Dấu "=" xảy ra khi m = n = k = 0 $\Rightarrow$ x = y = z = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Rightarrow$ ĐPCM.

Nhận xét: *Cách này gợi cho ta một hướng đi mới để chứng minh BĐT, đó là dự đoán dấu bằng ở BĐT sau đó đặt ẩn phụ, đưa về trường hợp dấu bằng xãy ra khi các phần tử bằng không.*

Cách 19: ***Dự đoán đấu bằng xảy ra, từ đó quy ra BĐT đúng hiển nhiên(là BĐT phụ ta dùng để chứng minh BĐT ban đầu):***

Đặt $x = \sqrt{a+b}$; $y = \sqrt{b+c}$; $z = \sqrt{c+a} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2$ (*). Ta cần chứng minh: $x + y + z \le \sqrt{6}$ (1). Dự đoán dấu "=" xãy ra ở (*) tại x = y = z = $\sqrt{\frac{2}{3}}$, nên ta liên tưởng đến BĐT đúng hiển nhiên: $(\sqrt{3}.t - \sqrt{2})^2 \ge 0$, $\forall$ t $\in$ R. Ta có: $(\sqrt{3}.t - \sqrt{2})^2 \ge 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2\sqrt{6}.t + 2 \ge 0 \Leftrightarrow t \le \frac{3t^2+2}{2\sqrt{6}}$. Vậy $t \le \frac{3t^2+2}{2\sqrt{6}}$ ($\forall$ t $\in$ R), áp dụng cho các số x, y, z ta có: $x \le \frac{3x^2+2}{2\sqrt{6}}$; $y \le \frac{3y^2+2}{2\sqrt{6}}$; $z \le \frac{3z^2+2}{2\sqrt{6}} \Rightarrow x + y + z \le \frac{3(x^2+y^2+z^2)+6}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ hay (1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow$ a = b = c = 1/3 $\Rightarrow$ ĐPCM.

Bài viết của: Trần Tuấn Anh (cử nhân Toán).

Điện thoại: 0974.484858.

Email: TranTuanAnh858@gmail.com