Từ KHO TÀNG TOÁN HỌC

# Bất đẳng thức CAUCHY-BUNYAKOVSKI-SCHWARZ

GABRIEL DOSPINESCU - TRẦN NAM DŨNG

Cùng với các bất đẳng thức (BĐT) giữa trung bình cộng và trung bình nhân, Schur, Jensen và Hölder, BĐT Cauchy-Bunyakovski-Schwarz (CBS) là một kết quả kinh điển, có nhiều ứng dụng. Câu hỏi quan trọng nhất ở đây là làm sao ta nhận biết được một bất đẳng thức có thể giải bằng phương pháp này? Rất khó có thể nói một cách rõ ràng, nhưng có lẽ là nên nghĩ đến BĐT CBS khi ta thấy tổng của các căn thức, tổng của các bình phương hay đặc biệt là khi ta có các biểu thức chứa căn.

Đầu tiên, ta sẽ xét một số bài toán mà trong lời giải áp dụng BĐT CBS ở dạng kinh điển:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Khó khăn lớn nhất là chọn $a_i$ và $b_i$. Ta sẽ thấy rằng trong một vài trường hợp, điều này là hiển nhiên, trong vài trường hợp khác lại không đơn giản chút nào. Sau đây chúng ta giải một số bài toán.

★**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng nếu x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$, thì bất đẳng thức sau đây đúng: $x+y+z \le 2+xyz$.*

(Đề đề nghị IMO, Ba Lan)

***Lời giải.*** Tại sao ta lại nghĩ đến BĐT CBS? Nguyên nhân là BĐT cần chứng minh có dạng $x(1-yz)+y+z \le 2$ và ta cần phải đánh giá thông qua tổng $x^2+y^2+z^2$. Tuy nhiên, có rất nhiều cách để áp dụng BĐT CBS. Chọn lựa

$$(x(1-yz)+y+z)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(2+(1-yz)^2)$$

không mấy thành công. Vì thế có thể sẽ tốt hơn nếu coi $y+z$ như một số hạng. Nếu chúng ta để ý rằng bất đẳng thức có dấu bằng chẳng hạn khi $x=1$, $y=1$ và $z=0$, chọn lựa $x(1-yz)+y+z \le \sqrt{(x^2+(y+z)^2)(1+(1-yz)^2)}$ trở nên khá tự nhiên. Như thế cần chứng minh $2(1+yz)(2-2yz+y^2z^2) \le 4 \Leftrightarrow y^3z^3 \le y^2z^2$, điều này hiển nhiên vì $2 \ge y^2+z^2 \ge 2yz$.

Một ứng dụng không tầm thường khác của BĐT CBS là bài toán sau.

★**Thí dụ 2.** *Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ax+by+cz=xyz$. Chứng minh rằng $x+y+z > \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.*

***Lời giải.*** Ta viết $\dfrac{a}{yz}+\dfrac{b}{zx}+\dfrac{c}{xy}=1$ và phép thế $a=yzu$, $b=zxv$ và $c=xyw$ trở nên tự nhiên.

Như vậy, cần chứng minh

$$\sqrt{z(yu+xv)}+\sqrt{x(zv+yw)}+\sqrt{y(zu+xw)} < x+y+z$$

với $u+v+w=1$.

Có thể thấy dạng của BĐT CBS:

$$\left(\sqrt{z(yu+xv)}+\sqrt{x(zv+yw)}+\sqrt{y(zu+xw)}\right)^2$$
$$\le (x+y+z)(yu+yw+xv+xw+zu+zv)$$

và biểu thức cuối cùng nhỏ hơn $(x+y+z)^2$ vì $u+v+w=1$.

Ta thấy có thể áp dụng BĐT CBS khi có các tổng. Thế còn với tích số thì sao? Thí dụ sau sẽ chứng tỏ rằng trong trường hợp này, ta cần có một chút sáng tạo.

★**Thí dụ 3.** *Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương (với $n \ge 2$). Chứng minh rằng*

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)...(a_n^3+1) \ge (a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1).$$

(Cuộc thi CH Séc-Slovakia-Ba Lan, 2001)

***Lời giải.*** Ta thử áp dụng BĐT CBS cho mỗi thừa số có mặt ở vế phải. Một cách tự nhiên, ta viết $(1+a_1^2a_2)^2 \le (1+a_1^3)(1+a_2^2a_1)$, vì ta cần $1+a_1^3$, biểu thức có mặt ở vế trái. Tương tự, ta có thể viết

$$(1+a_2^2a_3)^2 \le (1+a_2^3)(1+a_3^2a_2), \ldots,$$
$$(1+a_n^2a_1)^2 \le (1+a_n^3)(1+a_1^2a_n).$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức này với nhau, ta được

$$\left((a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1)\right)^2$$
$$\le (a_1^3+1)...(a_n^3+1)(1+a_2^2a_1)...(1+a_1^2a_n) \qquad (*)$$

Nhưng đây chưa phải là điều ta cần. Như thế BĐT CBS không có hiệu quả cho BĐT này. Không hẳn thế! Ta lại áp dụng lí luận này một lần nữa để có

$$\left((1+a_2^2a_1)...(1+a_1^2a_n)\right)^2$$
$$\le (a_1^3+1)...(a_n^3+1)(a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1) \qquad (**)$$

Như thế nếu

$$(a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1) \ge (1+a_2^2a_1)...(1+a_1^2a_n),$$

thì (*) sẽ cho chúng ta kết quả, còn nếu ngược lại thì (**) sẽ kết thúc lời giải của chúng ta.□

Bây giờ ta sẽ xem xét những bài toán khó hơn.

★**Thí dụ 4.** *Cho hai số dương x, y sao cho $x^2+y^3 \ge x^3+y^4$. Chứng minh rằng $x^3+y^3 \le 2$.*

(CHLB Nga, 1999)

***Lời giải.*** Ý tưởng ở đây là chặn $x^3+y^3$ bởi $A(x^3+y^4)$ với $A$ nào đó. Điều này là có lí nếu nhìn vào các luỹ thừa. Ta thử áp dụng vài thủ thuật với BĐT CBS và BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân:

$$(x^3+y^3)^2 \le (x^3+y^4)(x^3+y^2) \le (x^2+y^3)(x^3+y^2)$$
$$\le \left(\frac{x^2+y^2+x^3+y^3}{2}\right)^2.$$

Như vậy ta đã chứng tỏ rằng $x^3+y^3 \le x^2+y^2$. Nhưng $(x^2+y^2)^2 \le (x+y)(x^3+y^3)$ và do đó $x^2+y^2 \le x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$, suy ra $x^2+y^2 \le 2$ và $x^3+y^3 \le 2$.

★**Thí dụ 5.** *Chứng minh rằng nếu x,y,z thuộc đoạn $[-1\,;1]$ thoả mãn điều kiện $x+y+z+xyz=0$, thì ta có*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le 3.$$

**Lời giải.** Đầu tiên ta sẽ áp dụng BĐT CBS ở dạng hiển nhiên:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le \sqrt{3(x+y+z+3)}.$$

Nhưng biểu thức vế phải có nhỏ hơn 3? Có, nếu như $x+y+z \le 0$. Bây giờ ta giả sử rằng $x+y+z>0$. Khi đó $xyz<0$. Có thể giả sử $z<0$. Từ đây ta có $x, y \in (0\,;1]$. Ta sẽ không từ bỏ và cố gắng áp dụng BĐT CBS một lần nữa, nhưng lần này là cho hai căn:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le \sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1}.$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1} \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \le \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-z(xy+1)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \le \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2xy+2(1+xy)\sqrt{1+z} \le \sqrt{2x+2y+4}.$$

Vì $1+z=\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$, nên tất cả quy về chứng minh $xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} \le \sqrt{1+\dfrac{x+y}{2}}$. Ta muốn sử dụng BĐT CBS thế nào đó để làm mất đi $1-x$ ở vế trái. Cụ thể là

$$xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)}$$
$$=\sqrt{x}\cdot\sqrt{xy^2}+\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+xy-y-xy^2}$$
$$\le \sqrt{1+xy-y} \le 1 \le \sqrt{1+\frac{x+y}{2}}.$$

Có thể thí dụ khó nhất trong các bài toán dạng này là bài toán sau đây.

★**Thí dụ 6.** *Chứng minh rằng với các số dương a, b, c, x, y, z ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}.$$

(Crux Mathematicorum)

***Lời giải.*** Kí hiệu $a+b+c=\sum a$. Tương tự với các tổng có các biến số được lấy hoán vị vòng quanh. Ta có

$$\sum\frac{a}{b+c}(y+z)+\sum(y+z) = \left(\sum a\right)\left(\sum\frac{y+z}{b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum(b+c)\right)\left(\sum\frac{y+z}{b+c}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\sum\sqrt{y+z}\right)^2$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{2}\left(\sum(\sqrt{y+z})\right)^2\geq\frac{3\sum yz}{\sum x}+2\sum x \quad (1)$$

từ đây suy ra đpcm.

Ta có (1) tương đương với

$$\left(\sum(x+\sqrt{x^2+xy+yz+zx})\right)\left(\sum x\right) \geq 3\left(\sum yz\right)+2\left(\sum x\right)^2$$

Bởi vì

$$\sum\sqrt{x^2+(xy+yz+zx)} \geq \sqrt{\left(\sum x\right)^2+9\left(\sum yz\right)}.$$

Nên chỉ cần chứng minh

$$\left(\sum x\right)\sqrt{\left(\sum x\right)^2+9\left(\sum yz\right)}\geq\left(\sum x\right)^2+3\left(\sum yz\right).$$

Nhưng điều này là hiển nhiên sau khi bình phương hai vế của BĐT. ❒

Bây giờ ta sẽ nói về một thủ thuật đã được áp dụng khá nhiều trong những năm gần đây để giải các bài toán thi. Đây chính là một trong những phương án của BĐT CBS:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}b_k},$$

với mọi $a_k$ thực và $b_k$ dương, $k = 1, 2, ..., n$.

Một áp dụng đơn giản của thủ thuật này là bài toán sau, được đề nghị tại Cuộc thi giữa các thành phố (Tournament of The Towns Competition).

★**Thí dụ 7.** *Chứng minh rằng với các số thực dương a,b,c ta có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

***Lời giải.*** Nếu viết lại vế phải dưới dạng $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$, ta sẽ biết cần làm gì:

$$\sum\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=\sum\frac{(a^2)^2}{a(b^2+ab+a^2)} \geq\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a(a^2+ab+b^2)}.$$

Như vậy, ta sẽ có điều phải chứng minh nếu $\sum a(a^2+ab+b^2)\leq\left(\sum a\right)\cdot\left(\sum a^2\right)$, và thực tế thì ở đây xảy ra dấu bằng. ❒

Sẽ có những trường hợp mà gần như ta không thể tìm được $a_i$ và $b_i$. Ta sẽ thảo luận một số bài toán mà trong đó thủ thuật này được áp dụng một cách không hiển nhiên chút nào.

★**Thí dụ 8.** *Chứng minh rằng với ba số dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\geq\frac{3}{5}.$$

(Nhật Bản, 1997)

***Lời giải.*** Cách thức tự nhiên nhất là

$$\sum\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}=\sum\frac{\left(\frac{b+c}{a}-1\right)^2}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}\ge\frac{\left(\sum\frac{b+c}{a}-3\right)^2}{3+\sum\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$$

vì trong cách này ta thu được một bất đẳng thức ba biến số mà đã biết khá rõ một số tính chất. Như vậy, cần chứng minh rằng nếu $x=\frac{b+c}{a}$, $y=\frac{c+a}{b}$, $z=\frac{a+b}{c}$ thì

$$(x+y+z-3)^2\ge\frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2+3),$$

điều này tương đương với

$$\left(\sum x\right)^2-15\sum x+3\sum xy+18\ge 0.$$

Đáng tiếc là không thể sử dụng trực tiếp dữ kiện $xy+yz+zx\ge 12$. Vì vậy, cần tìm các bất đẳng thức dạng như $xy+yz+zx\ge k(x+y+z)$. Hằng số tốt nhất là $k=2$ (vì ta có dấu bằng khi $x=y=z=2$). Thật thế, sau một số tính toán trực tiếp, BĐT này có thể viết dưới dạng $(\sum a^3)+3abc\ge\sum ab(a+b)$, và đó chính là BĐT Schur. Từ đó, ta có thể viết:

$$\left(\sum x\right)^2-15\sum x+3\sum xy+18$$

$$\ge\left(\sum x\right)^2-9\sum x+18\ge 0.$$

Và BĐT cuối cùng đúng vì $x+y+z\ge 6$.

Tại kì thi Toán Quốc tế 2001, bài toán 2 đã gây được khá nhiều khó khăn cho các thí sinh. Ta đưa ra một cách tiếp cận khác, cho phép đưa ra một mở rộng đẹp.

★**Thí dụ 9.** *Cho k là số thực, $k\ge 8$. Chứng minh rằng với các số nguyên dương a, b, c ta có*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\ge\frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

***Lời giải.*** Ta có, theo BĐT CBS thì

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}\right)\left(\sum a\sqrt{a^2+kbc}\right)\ge\left(\sum a\right)^2.$$

Bây giờ, áp dụng BĐT CBS cho tổng thứ hai

$$\left(\sum a\sqrt{a^2+kbc}\right)^2=\left(\sum\sqrt{a}\sqrt{a^3+kabc}\right)^2$$

$$\le\left(\sum a\right)\left(\sum(a^3+kabc)\right).$$

Như vậy chỉ cần chứng minh

$$(k+1)\left(\sum a\right)^3\ge 9\left(\sum(a^3+kabc)\right).$$

Nhưng điều này tương đương với

$$(k-8)(a^3+b^3+c^3)+3(k+1)(a+b)(b+c)(c+a)\ge 27kabc.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên theo BĐT trung bình cộng – trung bình nhân.

## Bài tập áp dụng

**Bài 1.** Cho $x$, $y$, $z$ là các số lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

(Iran, 1998)

**Bài 2.** Chứng minh rằng nếu các số $a_1, a_2, \ldots, a_6$ thuộc đoạn $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$, thì ta có

$$\frac{a_1-a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2-a_3}{a_3+a_4}+\frac{a_3-a_4}{a_4+a_5}+\frac{a_4-a_5}{a_5+a_6}+\frac{a_5-a_6}{a_6+a_1}+\frac{a_6-a_1}{a_1+a_2}\ge 0.$$

**Bài 3.** Cho $x\in[0;1]$. Chứng minh rằng

$$x\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)\le 16.$$

(Olympic 30/4, 1996)

**Bài 4.** Chứng minh rằng với $2n$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}\ge\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Kvant, 1989)

**Bài 5.** Cho $a, b, c, x, y, z$ là các số thực sao cho $(a+b+c)(x+y+z)=3$ và

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4.$$

Chứng minh rằng $ax+by+cz\ge 0$.

(Cuộc thi Mathlinks, 2005)