SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO BÌNH ĐỊNH
TRƯỜNG THPT AN NHƠN 1

ĐỀ TÀI
SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Phát triển và nâng cao kỹ năng vận dụng

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}}+\sqrt{\frac{2y}{y+z}}+\sqrt{\frac{2z}{z+x}}\le 3$$

GIÁO VIÊN : PHAN NGỌC TOÀN

NĂM HỌC : 2011 - 2012

Phần A. MỞ ĐẦU

I. Đặt vấn đề

Bất đẳng thức và cực trị là một bài toán khó nhằm phát triển tư duy và nâng cao kiến thức cho học sinh cấp THCS và THPT. Trong đó, việc vận dụng các bất đẳng thức cơ bản như Côsi, Bunhiacopxki để giải được thành thạo các bài toán về bất đẳng thức và cực trị không phải là một điều đơn giản.

Trong các kì thi các cấp như thi học kì, thi vào lớp 10, thi học sinh giỏi cấp trường, cấp tỉnh, cấp quốc gia, Olympic khu vực, …chúng ta thường tháy sự có mặt của bài bất đẳng thức, cực trị nhằm tìm ra những học sinh có năng khiếu học toán.

Hiện nay, các chuyên đề về bất đẳng thức đã có rất nhiều thầy cô, các tác giả viết sách tìm hiểu và viết về vấn đề này. Tuy nhiên rất ít các tài liệu tìm hiểu chuyên sâu về việc rèn luyện kỹ năng vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho học sinh.

Trong quá trình giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp, tôi đã tìm hiểu , nghiên cức để đưa ra một số kỹ năng chính thường gặp và viết thành đề tài sáng kiến kinh nghiệm: ***"Phát triển và nâng cao kỹ năng vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki"*** nhằm giúp học sinh có thể chủ động, tự tin hơn khi đứng trước các bài bất đẳng thức và cực trị.

Đề tài chủ yếu nêu bật các kỹ năng cần rèn luyện cho học sinh trong quá trình vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để giải toán trong các kì thi các cấp thường gặp.

II. Phương pháp tiến hành

Dựa trên thức tế dạy các lớp ban khao học tự nhiên, tham gia dạy bồi dưỡng các lớp học sinh giỏi các cấp trong các năm học vừa qua. Trên cơ sở đó, tôi đã tìm hiểu , nghiên cứu , tích lũy và tham khảo ý kiến các đồng nghiệp để viết sáng kiến kinh nghiệm này.

Đề tài đã sử dụng các phương pháp phân tích,đánh giá ,dự đoán. Hệ thống hóa các dạng bài tập tương ứng với các kỹ năng

Trong quá trình biên soạn tôi đã nhận được sự giúp đỡ của các thầy cô trong tổ Toán trường THPT An Nhơn 1. Tôi xin chân thành cảm ơn và mong được sự góp ý chân thành của các đồng nghiệp để chuyên đề trở nên phong phú và có thêm nhiều tài kiệu cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi.

Phần B. NỘI DUNG ĐỀ TÀI

"PHÁT TRIỂN VÀ NÂNG CAO KỸ NĂNG VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI"

I. Mục tiêu

Nội dung của đề tài gồm hai phần, phần 1: giới thiệu về bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến thể thường gặp của nó, phần 2: giới thiệu một số kỹ năng cần rèn luyện cho học sinh trong quá trình vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để giải toán

Đề tài chủ yếu đi sâu vào phân tích để tìm ra những điểm then chốt trong các kỹ năng vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để giải toán. Các tài liệu tham khảo hiện nay hầu như chỉ viết chung chung và giải một số lượng lớn các bài tập mang tính chất rời rạc. Trong khi đó, Chúng tôi cố gắng qua những ví dụ cụ thể để làm nổi bật lên từng kỹ năng vận dụng bất đẳng thứcBunhiacopxki để giải toán

II. Nội dung giải pháp của đề tài

1. Giải pháp

Chương I. Giới thiệu về bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến thể

Trong chương trình toán học phổ thông ta thượng gặp bất đẳng thức mà chúng tôi gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki với hai dạng sau(có thể có những tên gọi khác) :

✧ **Dạng 1** .Với $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ là các số thực tùy ý ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \quad \textbf{(A)}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

(Quy ước nếu mẫu số bằng 0 thì tử số cũng bằng 0)

Các trường hợp đặc biệt thường gặp:

- Với 4 số a, b, x, y ta luôn có: $(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

  Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

- Với 6 số a, b, c, x, y, z ta luôn có: $(ax + by + cz)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.

  Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

✧ **Dạng 2** .Với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực tùy ý và $b_1, b_2, ..., b_n$ là các số thực dương , ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \quad \textbf{(B)}$$

Đẳng thức xảy ra khi : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

Các trường hợp đặc biệt thường gặp:

- Với 4 số a, b tùy ý và $x, y > 0$ ta luôn có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

  Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

- Với 6 số a, b, c tùy ý và $x, y, z > 0$ ta luôn có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

  Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ngoài ra ta còn có thể gặp một số biến thể dạng đặc biệt sau:

- Với mọi $a,b>0$, ta có các bất đẳng thức sau. Đẳng thức xảy ra khi a = b
  - $\frac{1}{4ab} \ge \frac{1}{(a+b)^2}$
  - $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$
  - $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \ge 4$
  - $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$

Chương II. MỘT SỐ KỸ NĂNG SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI TRONG GIẢI TOÁN

1. Kỹ năng" Biến đổi thuận".

1.1 Biến đổi thuận dạng 1.

Để vận dụng kỹ năng "*Biến đổi thuận Bunhiacopxki*" ở dạng 1 ta thường xuất phát từ giả thiết bài toán hoặc từ bất đẳng thức cần chứng minh(biểu thức cần tìm GTLN, GTNN) làm xuất hiện biểu thức dạng $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$ .Từ đó biến đổi để đánh giá về theo biểu thức $(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$. Ta cùng xem xét qua một số ví dụ sau:

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$3(a+b+c)^2 \le (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$$

Nhận xét:

Trước hết, ta cần chú ý đến sự xuất hiện biểu thức $(a+b+c)^2$ ở vế trái và a^2+2 ở vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh . Điều này làm cho ta suy nghĩ đến việc biến đổi biểu thức $(a+b+c)^2$ làm sao để có thể đánh giá theo biểu thức a^2+2, mục đích là làm đơn giản bất đẳng thức cần chứng minh bằng cách giảm số biến (ở đây có thể giảm biến a chẳng hạn). Từ đó, ta có lời giải như sau:

Lời giải :

Ta có: $(a+b+c)^2 = \left(a.1+\sqrt{2}.\frac{(b+c)}{\sqrt{2}}\right)^2 \le (a^2+2)\left(1+(\frac{b+c}{\sqrt{2}})^2\right)$

Bài toán đưa về chứng minh: $3\left(1+\frac{(b+c)^2}{2}\right) \le (b^2+2)(c^2+2)$ (2)

Ta lại có, $(2) \Leftrightarrow \frac{(b-c)^2}{2}+(bc-1)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng này hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho lươn đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=\frac{2}{b+c} \\ b=c \\ bc=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng :

$$(ab+bc+ca-1)^2 \le (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

Nhận xét:

Tương tự như bài toán 1, ta cần chú ý đến sự xuất hiện biểu thức $(ab+bc+ca-1)^2$ ở vế trái và a^2+1 ở vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh . Điều này làm cho ta suy nghĩ đến việc biến đổi biểu thức $(ab+bc+ca-1)^2$ làm sao để có thể đánh giá theo biểu thức a^2+1, mục đích là làm đơn giản bất đẳng thức cần chứng minh bằng cách giảm số biến (ở đây có thể giảm biến a chẳng hạn). Từ đó, ta có lời giải như sau:

Lời giải :

Ta có: $(ab+bc+ca-1)^2 = \left[a.(b+c)+(bc-1)\right]^2 \le (a^2+1)\left[(b+c)^2+(bc-1)^2\right]$

Bài toán đưa về chứng minh: $(b+c)^2+(bc-1)^2 \le (b^2+1)(c^2+1)$ (2)

Đây là một đẳng thức đúng vì $(b+c)^2+(bc-1)^2 = (b^2+1)(c^2+1)$

Đẳng thức xảy ra khi $a(bc-1)=b+c \Leftrightarrow a+b+c=abc$

Bài toán 3. Cho a, b, c, d là các số thực thõa mãn $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)=16$.

Chứng minh rằng : $-3 \le ab+ac+ad+bc+bd+cd-abcd \le 5$

Lời giải :

Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại như sau :

$-4 \le ab+ac+ad+bc+bd+cd-abcd-1 \le 4$

Hay $\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd-abcd-1\right)^2 \le 16$

Ta có: $\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd-abcd-1\right)^2 = \left[a(b+c+d-bcd)+1.(bc+bd+cd+-1)\right]^2$

$\le \left(a^2+1\right)\left[(b+c+d-bcd)^2+(bc+bd+cd-1)^2\right]$

Bài toán đưa về chứng minh: $(b+c+d-bcd)^2+(bc+bd+cd-1)^2 \le (b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)$

Đây là một đẳng thức đúng $(b+c+d-bcd)^2+(bc+bd+cd-1)^2 = (b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)$

Nhận xét:

Để vận dụng được như các bài toán 1 và bài toán 2, điểm quang trọng là viết lại bất đẳng thức cần chứng minh về dạng $-4 \le ab+ac+ad+bc+bd+cd-abcd-1 \le 4$

Bài toán 4. Cho x, y, z > 1 thõa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}$$

Lời giải :

Ta có: $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2 \le \left(x+y+z\right)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right) = (x+y+z)\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$

Nên $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ \frac{x-1}{x^2}=\frac{y-1}{y^2}=\frac{z-1}{z^2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{2}$

Nhận xét:

Sự xuất hiện biểu thức $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$ *là cơ sở để ta sử dụng kỹ năng này và cũng chính sự xuất hiện biểu thức* $\sqrt{x+y+z}$ *ở vế phải đã giúp ta biến đổi thuận một cách thuận lợi.*

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(c+1)}+\sqrt{c(a+1)}\le\frac{3}{2}\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Lời giải :

Ta có : $\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(c+1)}\le\sqrt{(a+1)\left[(b+1)+(c+1)\right]}$

Nên ta cần chứng minh: $\sqrt{b(c+2)+1}+\sqrt{c}\le\frac{3}{2}\sqrt{(b+1)(c+1)}$

Tiếp tục áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta được:

$$\sqrt{b(c+2)+1}+\sqrt{c}\le\sqrt{\left[\left(b(c+2)+1\right)+(c+1)\right]\left(1+\frac{c}{c+1}\right)}=\sqrt{\frac{(b+1)(c+2)(2c+1)}{c+1}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh: $\sqrt{\frac{(c+2)(2c+1)}{c+1}}\le\frac{3}{2}\sqrt{c+1}$ (*)

Mà (*) tương đương với: $4(c+2)(2c+1)\le9(c+1)^2\Leftrightarrow(c-1)^2\ge0$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^2(c+a)}+\frac{b}{c^2(a+b)}+\frac{c}{a^2(b+c)}\ge\frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

Lời giải :

Ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b^2(c+a)}}.\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{\frac{b}{c^2(a+b)}}.\sqrt{c(a+b)}+\sqrt{\frac{c}{a^2(b+c)}}.\sqrt{a(b+c)}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{a}{b^2(c+a)}+\frac{b}{c^2(a+b)}+\frac{c}{a^2(b+c)}\right)\left(b(c+a)+c(a+b)+a(b+c)\right)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi : $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\ge3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{\frac{c}{a}}}=3$

Nên $\frac{a}{b^2(c+a)}+\frac{b}{c^2(a+b)}+\frac{c}{a^2(b+c)}\ge\frac{9}{2(ab+bc+ca)}$

Bài toán 7. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{bc^2}{a^2(b+2c)}+\frac{ca^2}{b^2(c+2a)}+\frac{ab^2}{c^2(a+2b)}\ge1$$

Lời giải :

Ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{a\sqrt{a^2b(b+2c)}}\sqrt{a^2b(b+2c)}+\frac{1}{b\sqrt{b^2c(c+2a)}}\sqrt{b^2c(c+2a)}+\frac{1}{c\sqrt{c^2a(a+2b)}}\sqrt{c^2a(a+2b)}\right)^2$$

Nên $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le \left(\frac{1}{a^4b(b+2c)}+\frac{1}{b^4c(c+2a)}+\frac{1}{c^4a(a+2b)}\right)(ab+bc+ca)^2$

Suy ra: $\frac{1}{a^4b(b+2c)}+\frac{1}{b^4c(c+2a)}+\frac{1}{c^4a(a+2b)} \ge \frac{1}{(abc)^2}$

Hay $\frac{bc^2}{a^2(b+2c)}+\frac{ca^2}{b^2(c+2a)}+\frac{ab^2}{c^2(a+2b)} \ge 1$

Bài tập tương tự

1. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng :

$$2(1+abc)+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \ge (1+a)(1+b)(1+c)$$

2. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng :

$$(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3) \ge 4(a+b+c+1)^2$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge \frac{5}{16}(a+b+c+1)^2$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^4}{b^3(c+a)}+\frac{b^4}{c^3(a+b)}+\frac{c^4}{a^3(b+c)} \ge \frac{3}{2}$$

5. Cho a, b, c là các số thực dương thõa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \le 2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

1.2 Biến đổi thuận dạng 2.

Để vận dụng kỹ năng "*Biến đổi thuận Bunhiacopxki*" ở dạng 2 ta thường xuất phát từ giả thiết bài toán hoặc từ bất đẳng thức cần chứng minh(biểu thức cần tìm GTLN, GTNN) làm xuất hiện biểu thức dạng $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}$. Từ đó, biến đổi để đánh giá về theo biểu thức $\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$. Ta cùng xem xét qua một số ví dụ sau:

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Nhận xét:

Một cách rất tự nhiên, sự xuất hiện của biểu thức $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$ *ở vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh làm cho ta liên hệ đến dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki và biến đổi theo chiều thuận. Từ đó ta có lời giải như sau:*

Lời giải :

Ta có: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b} \ge 1$$

Nhận xét:

Quan sát vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh ta cũng có thể nghĩ đến việc vận dung dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki. Nhưng nếu để như thế mà áp dụng thì không đạt được mục đích của bài toán.

Với tư tưởng như bài toán 1, ta nghĩ đến việc tạo ra các biểu thức có dạng bình phương ở tử của 3 phân thức ở vế trái bằng cách nhân thêm vào tử và mẫu các lượng thích hợp. Từ đó ta có lời giải:

Lời giải :

Ta có: $\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}=\frac{a^2}{a(2b+c)}+\frac{b^2}{b(2c+a)}+\frac{c^2}{c(2a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$

Ta lại có: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ nên $\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geq 1$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Lời giải :

Ta có: $\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}=\frac{a^4}{a(a+2b)}+\frac{b^4}{b(b+2c)}+\frac{c^4}{c(c+2a)}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}$

Ta lại có: $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ nên $\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Nhận xét:

Tương tự như bài toán 2, ở bài toán này ta đã vận dụng dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki bằng cách nhân tử và mẫu của mỗi phân thức các lượng thích hợp để đưa tử số của các phân thức về dạng lũy thừa bậc chẵn

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^4}{1+a^2b}+\frac{b^4}{1+b^2c}+\frac{c^4}{1+c^2a}\geq\frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Nhận xét:

Ở bài toán này tử số của các phân thức đã ở dạng lũy thừa bậc chẵn nên ta có thể nghĩa đến việc vận dụng ngay :

$$\frac{a^4}{1+a^2b}+\frac{b^4}{1+b^2c}+\frac{c^4}{1+c^2a}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3+a^2b+b^2c+c^2a}$$

Từ đó để giải quyết bài toán ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3+a^2b+b^2c+c^2a}\geq\frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Nhưng thực sự bất ngờ khi cách áp dụng như thế này lại không giúp ta giải quyết được bài toán. Nên buộc ta phải tìm hương giải quyết khác

Lời giải :

Ta có:

$$\frac{a^4}{1+a^2b}+\frac{b^4}{1+b^2c}+\frac{c^4}{1+c^2a}=\frac{a^4c}{c(1+a^2b)}+\frac{b^4a}{a(1+b^2c)}+\frac{c^4b}{b(1+c^2a)}\geq\frac{\left(a^2\sqrt{c}+b^2\sqrt{a}+c^2\sqrt{b}\right)^2}{c(1+a^2b)+a(1+b^2c)+b(1+c^2a)}$$

$$=\frac{\left(a^2\sqrt{c}+b^2\sqrt{a}+c^2\sqrt{b}\right)^2}{(1+abc)(a+b+c)}$$

Ta cần chứng minh : $a^2\sqrt{c}+b^2\sqrt{a}+c^2\sqrt{b}\geq\sqrt{abc}(a+b+c)$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow\frac{a^2}{\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{bc}}\geq a+b+c$$

Theo bất đẳng thức Côsi và Bunhiacopxki dạng 2 ta được:

$$\frac{a^2}{\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{bc}}\geq\frac{a^2}{\frac{a+b}{2}}+\frac{b^2}{\frac{b+c}{2}}+\frac{c^2}{\frac{c+a}{2}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}}=a+b+c$$

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải :

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$ (1)

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{c^2a^2}{abc^2}+\frac{a^2b^2}{bca^2}+\frac{b^2c^2}{cab^2}\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b+c)}$ (2)

Nhân các bất đẳng thức (1) và (2) vế theo vế ta được:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b+c)}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Nhận xét:

Ở đay ta đã vận dụng phối hợp việc biến đổi bằng cách nhân thêm ở tử và mẫu của mỗi phân thức để tạo ra các biểu thức có dạng bình phương, đồng thời ta đã vận dụng hai lần bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng 2 để nhân các bất đẳng thức đó với nhau để được đều cần mong muốn

Bài tập tương tự

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}+\frac{c}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thõa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geq1$$

3. Cho a, b, c là các số thực không âm thõa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\left(a+b+c\right)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

5. Cho a, b, c là các số thực không âm thõa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a^2}{b+b^2+c}}+\sqrt{\frac{b^2}{c+c^2+a}}+\sqrt{\frac{c^2}{a+a^2+b}}\le\sqrt{3}$$

2. Kỹ năng” Biến đổi nghịch”.

2.1 Biến đổi nghịch dạng 1.

Để vận dụng kỹ năng “*Biến đổi nghịch Bunhiacopxki*” ở dạng 1 ta thường xuất phát từ giả thiết bài toán hoặc từ bất đẳng thức cần chứng minh(biểu thức cần tìm GTLN, GTNN) làm xuất hiện biểu thức dạng $(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$. Từ đó, biến đổi để đánh giá về theo biểu thức $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$. Ta cùng xem xét qua một số ví dụ sau:

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$$

Nhận xét:

Chính sự xuất hiện biểu thức $T=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$ *mà bài toán lại yêu cầu tìm GTNN nên ta liện hệ đến việc vận dung dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki . Với suy nghĩ đó ta cố biến đổi biểu thức T để đưa về dạng* $(a+b+c)\left(\frac{m}{b+c}+\frac{n}{c+a}+\frac{p}{a+b}\right)$. *Từ đó ta đã có lời giải như sau bằng cách biến đổi nghịch Bunhiacopxki ở dạng 1.*

Lời giải :

Ta có: $T+12=\left(\frac{3a}{b+c}+3\right)+\left(\frac{4b}{c+a}+4\right)+\left(\frac{5c}{a+b}+5\right)=\frac{3(a+b+c)}{b+c}+\frac{4(a+b+c)}{c+a}+\frac{5(a+b+c)}{a+b}$

$=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)=\frac{1}{2}\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)$

$\ge\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2$

Nên $T\ge\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2-12$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T=\frac{3(c-b)}{2b+a}+\frac{4(a-c)}{b+2c}+\frac{5(b-a)}{c+2a}$$

Nhận xét:

Chính sự xuất hiện biểu thức $T=\frac{3(c-b)}{2b+a}+\frac{4(a-c)}{b+2c}+\frac{5(b-a)}{c+2a}$. *Với suy nghĩ như trên, ta cố biến đổi biểu thức T để đưa về dạng* $(a+b+c)\left(\frac{m}{2b+a}+\frac{n}{b+2c}+\frac{p}{c+2a}\right)$. *Từ đó ta đã có lời giải như sau bằng cách biến đổi nghịch Bunhiacopxki ở dạng 1.*

Lời giải :

Ta có:

$$T+12=\left(\frac{3(c-b)}{2b+a}+3\right)+\left(\frac{4(a-c)}{b+2c}+4\right)+\left(\frac{5(b-a)}{c+2a}+5\right)=\frac{3(a+b+c)}{a+2b}+\frac{4(a+b+c)}{b+2c}+\frac{5(a+b+c)}{c+2a}$$

$$=\left(a+b+c\right)\left(\frac{3}{a+2b}+\frac{4}{b+2c}+\frac{5}{c+2a}\right)=\frac{1}{3}\left((a+2b)+(b+2c)+(c+2a)\right)\left(\frac{3}{a+2b}+\frac{4}{b+2c}+\frac{5}{c+2a}\right)$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2$$

Nên $T\geq\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2-12$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$

Bài toán 3. Cho p, q, r, x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{p}{q+r}x^2+\frac{q}{r+p}y^2+\frac{r}{p+q}z^2\geq xy+yz+zx-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

Lời giải :

Đặt $T=\frac{p}{q+r}x^2+\frac{q}{r+p}y^2+\frac{r}{p+q}z^2$

Ta có:

$$T+\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(\frac{p}{q+r}x^2+x^2\right)+\left(\frac{q}{r+p}y^2+y^2\right)+\left(\frac{r}{p+q}z^2+z^2\right)=\left(p+q+r\right)\left(\frac{x^2}{q+r}+\frac{y^2}{r+p}+\frac{z^2}{p+q}\right)$$

Nên $T+\left(x^2+y^2+z^2\right)=\frac{1}{2}\left((q+r)+(r+p)+(p+q)\right)\left(\frac{x^2}{q+r}+\frac{y^2}{r+p}+\frac{z^2}{p+q}\right)\geq\frac{1}{2}(x+y+z)^2$

Hay $\frac{p}{q+r}x^2+\frac{q}{r+p}y^2+\frac{r}{p+q}z^2\geq xy+yz+zx-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

Bài toán 4. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác, x, y, z là các số thực. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c-a}x^2+\frac{b}{c+a-b}y^2+\frac{c}{a+b-c}z^2\geq xy+yz+zx$$

Lời giải :

Đặt $T=\frac{a}{b+c-a}x^2+\frac{b}{c+a-b}y^2+\frac{c}{a+b-c}z^2$

Ta có: $T+\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)=\left(\frac{a}{b+c-a}x^2+\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{b}{c+a-b}y^2+\frac{y^2}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b-c}z^2+\frac{z^2}{2}\right)$

$$=\left(a+b+c\right)\left[\frac{\frac{x^2}{2}}{b+c-a}+\frac{\frac{y^2}{2}}{c+a-b}+\frac{\frac{z^2}{2}}{a+b-c}\right]$$

Nên

$$T+\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)=\left((b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)\right)\left[\frac{\frac{x^2}{2}}{b+c-a}+\frac{\frac{y^2}{2}}{c+a-b}+\frac{\frac{z^2}{2}}{a+b-c}\right]\geq\frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

Hay $\frac{a}{b+c-a}x^2+\frac{b}{c+a-b}y^2+\frac{c}{a+b-c}z^2 \ge xy+yz+zx$

Bài toán 5. Cho x, y, z là các số thực thõa $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=16 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$y^2+yz+zx \le 8$$

Lời giải :

Ta có:

$$(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)=\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]\left[\frac{3z^2}{4}+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2\right]\ge\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}z+\left(y+\frac{z}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}y\right]^2$$

Hay $\frac{3}{4}\left(y^2+yz+zx\right)^2 \le 48 \Leftrightarrow y^2+yz+zx \le 8$

Bài tập tương tự

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T=\frac{9a}{b+c}+\frac{8b}{c+a}+\frac{7c}{a+b}$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T=\frac{5bc}{a(b+c)}+\frac{6ca}{b(c+a)}+\frac{7ab}{c(a+b)}$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T=\frac{6(c-b)}{2b+a}+\frac{5(a-c)}{b+2c}+\frac{7(b-a)}{c+2a}$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T=\frac{16c}{a+b}+\frac{54a}{b+c}+\frac{128b}{c+a}+\frac{8c^2}{(a+b)^2}+\frac{27a^2}{(b+c)^2}+\frac{64b^2}{(c+a)^2}$$

2.2 Biến đổi nghịch dạng 2.

Để vận dụng kỹ năng "*Biến đổi nghịch Bunhiacopxki*" ở dạng 2 ta thường xuất phát từ giả thiết bài toán hoặc từ bất đẳng thức cần chứng minh(biểu thức cần tìm GTLN, GTNN) làm xuất hiện biểu thức dạng $\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$. Từ đó, biến đổi để đánh giá về theo biểu thức $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}$. Ta cùng xem xét qua một số ví dụ sau:

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)}\le 3$$

Nhận xét:

Chính sự xuất hiện biểu thức $A=\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}$ *và chiều của bất đẳng thức* $\le$ *nên ta liên hệ đến việc vận dụng dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki . Với suy nghĩ đó ta cố biến đổi biểu thức A để đưa về dạng* $\frac{(b+c)^2}{x+y}$*, trong đó x, y là các biểu thức thích* *hợp để vận dụng dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki . Từ đó ta đã có lời giải như sau bằng cách biến đổi nghịch Bunhiacopxki ở dạng 2.*

Với các bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị ta thường biến đổi trên một biểu thức hay tìm được một bất đẳng thức cơ sở nào đó rồi suy ra các bất đẳng thức tương tự và phối hợp chúng để giả quyết bài toán.

Lời giải :

Ta có: $\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}=\frac{(b+c)^2}{b(a+b)+c(c+a)}\le\frac{b^2}{b(a+b)}+\frac{c^2}{c(c+a)}=\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+a}$

Tương tự, $\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)}\le\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}$; $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)}\le\frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+c}$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)}\le 3$$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương thõa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}\le\frac{1}{2}$$

Nhận xét:

Chính sự xuất hiện biểu thức $A=\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}$ *và chiều của bất đẳng thức* $\le$ *nên ta liên hệ đến việc vận dụng dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki . Với suy nghĩ đó ta cố biến đổi biểu thức A để đưa về dạng* $\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$*, trong đó x, y, z là các biểu thức thích hợp để vận dụng dạng 2 của bất đẳng thức Bunhiacopxki . Từ đó ta đã có lời giải như sau bằng cách biến đổi nghịch Bunhiacopxki ở dạng 2.*

Lời giải :

Ta có: $\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{9}.\frac{(a+b+c)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(c^2+a^2)}\le\frac{1}{9}\left(\frac{a^2}{2a^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$

Tương tự,

$\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{b^2}{2b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}\right);\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{c^2}{2c^2}+\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}\le\frac{1}{2}$$

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải :

Ta có: $\frac{b+c}{a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{(a^2+bc)(b+c)}=\frac{(b+c)^2}{c(a^2+b^2)+b(c^2+a^2)}\le\frac{b^2}{c(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{b(c^2+a^2)}$

Tương tự, $\frac{c+a}{b^2+ca}\le\frac{c^2}{a(b^2+c^2)}+\frac{a^2}{c(a^2+b^2)};\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{a^2}{b(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(b^2+c^2)}$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\frac{1}{3}$$

Lời giải :

Ta có:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}=\frac{1}{9}.\frac{(2a+a)^2}{2a(a+b+c)+(2a^2+bc)}\le\frac{1}{9}\left[\frac{(2a)^2}{2a(a+b+c)}+\frac{a^2}{2a^2+bc}\right]=\frac{1}{9}\left[\frac{2a}{a+b+c}+\frac{a^2}{2a^2+bc}\right]$$

Tương tự, $\dfrac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}\le\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{2b}{a+b+c}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}\right];\dfrac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{2c}{a+b+c}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}\right]$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\frac{1}{3}$$

Bài tập tương tự

1. Cho a, b, c là các số thực dương thõa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thõa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{c^2+(a+b)^2}\le 5$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương thõa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\le\frac{3}{4}$$

3. Kỹ năng "Thêm – bớt".

Có những bất đẳng thức (hay biểu thức cần tìm GTLN, GTNN) nếu để nguyên dạng như đề bài cho đôi khi khó hoặc thậm chí không thể giải quyết bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Khi đó, nếu ta chịu khó biến đổi một số biểu thức bằng cách thêm bớt các số hay biểu thức phù hợp ta có thể vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách dễ dàng hơn. Ta cùng xem xét các ví dụ sau để minh họa cho điều đó.

Bài toán 1. Cho x, y, z là các số thực dương thõa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-y}+\frac{1}{2-z}\ge 3$$

Nhận xét:

Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách trực tiếp ta được:

$$\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-y}+\frac{1}{2-z}\ge\frac{9}{(2-x)+(2-y)+(2-x)}=\frac{9}{6-(x+y+z)}$$

Trong khi đó ta lại có, $0<x+y+z\le\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}=3$ *nên* $\dfrac{9}{6-(x+y+z)}\le 3$

Vì vậy, gặp phải bất đẳng thức ngược chiều ở đây !

Nếu để ý một tí ta sẽ có biến đổi khá thú vị sau : $\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{2(2-x)}$

*Từ đó ta suy nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng khác mà áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki thuận lợi hơn bằng cách biến đổi **"thêm bớt"***

Ta có lời giải sau:

Lời giải :
Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$\left(\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2-y}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2-z}-\frac{1}{2}\right)\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{2-x}+\frac{y}{2-y}+\frac{z}{2-z}\geq 3$$

Ta có: $\frac{x}{2-x}+\frac{y}{2-y}+\frac{z}{2-z}=\frac{x^2}{x(2-x)}+\frac{y^2}{y(2-y)}+\frac{z^2}{z(2-z)}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x(2-x)+y(2-y)+z(2-z)}$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)-3}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)-3}\geq 3$ hay $(x+y+z)^2\geq 3\left[2(x+y+z)-3\right]$

Mà $(x+y+z)^2-3\left[2(x+y+z)-3\right]=(x+y+z-3)^2\geq 0$

Bài toán 2. Cho x, y, z là các số thực dương thõa mãn $xy+yz+zx=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2+x^2}+\frac{1}{2+y^2}+\frac{1}{2+z^2}\leq 1$$

Lời giải :
Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x^2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+y^2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+z^2}\right)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{2+x^2}+\frac{y^2}{2+y^2}+\frac{z^2}{2+z^2}\geq 1$$

Ta lại có,

$$\frac{x^2}{2+x^2}+\frac{y^2}{2+y^2}+\frac{z^2}{2+z^2}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(2+x^2)+(2+y^2)+(2+z^2)}=\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}=1$$

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương thõa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{7+a^2}+\frac{1}{7+b^2}+\frac{1}{7+c^2}-\frac{1}{14}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\leq\frac{15}{56}$$

Lời giải :

Ta có : $\frac{1}{7+a^2}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}.\frac{a^2}{7+a^2}$; $\frac{1}{7+b^2}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}.\frac{b^2}{7+b^2}$; $\frac{1}{7+c^2}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}.\frac{c^2}{7+c^2}$

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}+2\left(\frac{a^2}{7+a^2}+\frac{b^2}{7+b^2}+\frac{c^2}{7+c^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

Từ đó ta được:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{a^2}{7+a^2}+\frac{b^2}{7+b^2}+\frac{c^2}{7+c^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(7+a^2)+(7+b^2)+(7+c^2)}=\frac{(a+b+c)^2}{24}$$

Nên ta cần chứng minh: $\frac{9}{a+b+c}+\frac{(a+b+c)^2}{6}\geq\frac{9}{2}$

Lại theo bất đẳng thức Côsi thì :

$$\frac{9}{a+b+c}+\frac{(a+b+c)^2}{6}=\frac{9}{2(a+b+c)}+\frac{9}{2(a+b+c)}+\frac{(a+b+c)^2}{6}\geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{2}.\frac{9}{2}.\frac{1}{6}}=\frac{9}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{2x+y}{2x+z}+\frac{2y+z}{2y+x}+\frac{2z+x}{2z+y}\ge 3 \quad (1)$$

Lời giải :

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{2x+y}{2x+z}-m\right)+\left(\frac{2y+z}{2y+x}-m\right)+\left(\frac{2z+x}{2z+y}-m\right)\ge 3-3m$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2-2m)x+y-mz}{2x+z}+\frac{(2-2m)y+z-mx}{2x+z}+\frac{(2-2m)z+x-my}{2x+z}\ge 3-3m \ (2)$$

Ta có: $\frac{(2-2m)x+y-mz}{2x+z}+\frac{(2-2m)y+z-mx}{2x+z}+\frac{(2-2m)z+x-my}{2x+z}$

$$=\frac{(2-2m)x+y-mz}{(2x+z)\left[(2-2m)x+y-mz\right]}+\frac{(2-2m)y+z-mx}{(2x+z)\left[(2-2m)y+z-mx\right]}+\frac{(2-2m)z+x-my}{(2x+z)\left[(2-2m)z+x-my\right]}$$

$$\ge\frac{\left[(2-2m)x+y-mz+(2-2m)y+z-mx+(2-2m)z+x-my\right]^2}{(2x+z)\left[(2-2m)x+y-mz\right]+(2x+z)\left[(2-2m)y+z-mx\right]+(2x+z)\left[(2-2m)z+x-my\right]}$$

$$=\frac{9(1-m)^2(x+y+z)^2}{(4-5m)(x^2+y^2+z^2)+(5-4m)(xy+yz+zx)}$$

Ta tìm m sao cho $\frac{9(1-m)^2(x+y+z)^2}{(4-5m)(x^2+y^2+z^2)+(5-4m)(xy+yz+zx)}\ge 3-3m$ đúng nên m là nghiệm phương trình : $5-4m=2(4-5m)\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Nhận xét:

Ở đây ta đã sử dụng kỹ năng thêm bớt bằng cách đưa vào tham số m để lí luận và đựa vào các đềuv kiện ràng buộc hợp lí để tìm ra m.

Bài tập tương tự

1. Cho a, b, c là các số thực không âm thõa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a+b}{1-ab}+\frac{b+c}{1-bc}+\frac{c+a}{1-ca}\le 3(a+b+c)$$

2. Cho a, b, c là các số thực không âm thõa $a^2+b^2+c^2=1$ .Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}$$

3. Cho x, y, z là các số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{x+y}{x+7y+z}+\frac{y+z}{y+7z+x}+\frac{z+x}{z+7x+y}\ge\frac{2}{3}$$

4. Kỹ năng "Tham số hóa".

Bài toán 1. Cho x, y, z > 0 thỏa mãn $x+y+z = 2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$T=\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{4z^2+\frac{1}{z^2}}$$

Phân tích để tìm lời giải :

Xét biểu thức $A=\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}$. Một cách tự nhiên ta tìm cách khử căn của biểu thức này.

Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách bình thường:

$$\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên không đạt được yêu cầu của bài toán.

Dự đoán T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$.

Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các tham số p, q như sau :

$$A=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{\left(4x^2+\frac{1}{x^2}\right)(p^2+q^2)}\ \ge\ \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{\left(2xp+\frac{q}{x}\right)^2}=\frac{p.2x+\frac{q}{x}}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\ \frac{p}{2x}=qx\ \ (1)$

Thay $x=y=z=\frac{2}{3}$ vào (1) ta được: $\Rightarrow\ \frac{p}{q}=\frac{8}{9}$ ta có thể chọn $p=8, q=9$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\sqrt{(8^2+9^2)\left(4x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\ \ge\ 16x+\frac{9}{x}\ \ \Rightarrow\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{145}}\left(16x+\frac{9}{x}\right)$$

$$\sqrt{(8^2+9^2)\left(4y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\ \ge\ 16y+\frac{9}{y}\ \ \Rightarrow\sqrt{4y^2+\frac{1}{y^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{145}}\left(16y+\frac{9}{y}\right)$$

$$\sqrt{(8^2+9^2)\left(4z^2+\frac{1}{z^2}\right)}\ \ge\ 16z+\frac{9}{z}\ \ \Rightarrow\sqrt{4z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{145}}\left(16z+\frac{9}{z}\right)$$

Từ đó : $T\ge\frac{1}{\sqrt{145}}\left[16(x+y+z)+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]\ge\frac{1}{\sqrt{145}}\left[16(x+y+z)+\frac{81}{x+y+z}\right]=\frac{\sqrt{145}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{\sqrt{145}}{2}$ khi $x=y=z=\frac{2}{3}$

Bài toán 2. Cho x, y, z > 0 thõa mãn $x+y+z\ =\ \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$T=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}}$$

Phân tích để tìm lời giải :

Xét biểu thức $A=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$. Một cách tự nhiên ta tìm cách khử căn của biểu thức này.

Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách bình thường:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Dự đoán dấu bằng $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$. Nên không đạt được yêu cầu của bài toán.

Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các tham số p, q, r như sau :

$$A=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(p^2+q^2+r^2)}\ \geq\ \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\sqrt{\left(xp+\frac{q}{x}+\frac{r}{y}\right)^2}$$

$$=\frac{p.x+\frac{q}{x}+\frac{r}{y}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\ \frac{x}{p}=\frac{\frac{1}{x}}{q}=\frac{\frac{1}{y}}{r}$ (1)

Thay $x=y=z=\frac{2}{3}$ vào (1) ta được: $\frac{3p}{2}=\frac{2q}{3}=\frac{2r}{3}$ ta có thể chọn $p=\frac{1}{2},\ q=r=2$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^2}+2^2+2^2\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}\ \geq\ \frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\ \Rightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{33}}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^2}+2^2+2^2\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)}\ \geq\ \frac{y}{2}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\ \Rightarrow\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{33}}\left(\frac{y}{2}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^2}+2^2+2^2\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)}\ \geq\ \frac{z}{2}+\frac{2}{z}+\frac{2}{x}\ \Rightarrow\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{33}}\left(\frac{z}{2}+\frac{2}{z}+\frac{2}{x}\right)$$

Từ đó : $T\geq\frac{2}{\sqrt{33}}\left[\frac{x+y+z}{2}+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]\geq\frac{2}{\sqrt{33}}\left[\frac{3}{4}+\frac{36}{x+y+z}\right]=\frac{3\sqrt{33}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{3\sqrt{33}}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Bài toán 3. Cho x, y, z > 0 thỏa mãn $x+y+z\ =\ 6$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$T=\sqrt{x^2+\frac{1}{x+y}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y+z}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z+x}}$$

Phân tích để tìm lời giải :

Xét biểu thức $A=\sqrt{x^2+\frac{1}{x+y}}$. Một cách tự nhiên ta tìm cách khử căn của biểu thức này.

Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách bình thường :

$\sqrt{x^2+\frac{1}{x+y}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{\sqrt{x+y}}$

Dự đoán T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=y=z=2$. Nên không đạt được yêu cầu của bài toán.

Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các tham số p, q như sau :

$$A=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x+y}\right)(p^2+q^2)}\ \geq\ \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{\left(xp+\frac{q}{\sqrt{x+y}}\right)^2}\ =\frac{p.x+\frac{q}{\sqrt{x+y}}}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{p}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x+y}}}{q}$ (1)

Thay $x=y=z=2$ vào (1) ta được: $\dfrac{p}{2}=2q$ ta có thể chọn $p=4,\ q=1$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\sqrt{\left(4^2+1^2\right)\left(x^2+\frac{1}{x+y}\right)}\ \geq\ 4x+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\ \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x+y}}\geq\frac{1}{\sqrt{17}}\left(4x+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)$$

$$\sqrt{\left(4^2+1^2\right)\left(y^2+\frac{1}{y+z}\right)}\ \geq\ 4y+\frac{1}{\sqrt{y+z}}\ \Rightarrow \sqrt{y^2+\frac{1}{y+z}}\geq\frac{1}{\sqrt{17}}\left(4y+\frac{1}{\sqrt{y+z}}\right)$$

$$\sqrt{\left(4^2+1^2\right)\left(z^2+\frac{1}{z+x}\right)}\ \geq\ 4z+\frac{1}{\sqrt{z+x}}\ \Rightarrow \sqrt{z^2+\frac{1}{z+x}}\geq\frac{1}{\sqrt{17}}\left(4z+\frac{1}{\sqrt{z+x}}\right)$$

Từ đó :

$$T\geq\frac{1}{\sqrt{17}}\left[4(x+y+z)+\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}\right)\right]\geq\frac{1}{\sqrt{17}}\left[24+\frac{9}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}}\right]$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{17}}\left[24+\frac{9}{\sqrt{3(x+y+z)}}\right]=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$ khi $x=y=z=2$

Bài toán 4. Cho x, y thõa mãn $2x-y=2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$T\ =\ \sqrt{x^2+(y+1)^2}\ +\ \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

Phân tích để tìm lời giải :

Giả sử giá trị nhỏ nhất của T đạt được tại $x=a\ ,y=b\ ,2a-b=2$

Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các tham số p, q như sau :

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}.\sqrt{\left(p^2+q^2\right)\left[x^2+(y+1)^2\right]}\geq\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}.\left[px+q(y+1)\right]\quad (2)$$

Ta cần chọn p, q sao cho đẳng thức ở (2) xảy ra khi $x=a\ ,y=b\ ,2a-b=2$ nên

$\dfrac{p}{a}=\dfrac{q}{b+1}$ từ đó ta có thể chọn $p=a,q=b+1$

Tương tự, với biểu thức $\sqrt{x^2+(y-3)^2}$ ta có thể chọn $p=a,q=b-3$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}\geq\frac{1}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}.\left[ax+(b+1)(y+1)\right]$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}\geq\frac{1}{\sqrt{a^2+(b-3)^2}}.\left[ax+(b-3)(y-3)\right]$$

Từ đó : $T\geq\dfrac{1}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}.\left[ax+(b+1)(y+1)\right]+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+(b-3)^2}}.\left[ax+(b-3)(y-3)\right]$

$$=\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+(b-3)^2}}\right]x+\left[\frac{b+1}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}+\frac{b-3}{\sqrt{a^2+(b-3)^2}}\right]y$$

Ta cần chọn a, b sao cho :

$$\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+(b-3)^2}}=-2\left[\dfrac{b+1}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}+\dfrac{b-3}{\sqrt{a^2+(b-3)^2}}\right]\\ 2a-b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a+2b+2}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}+\dfrac{a+2b-6}{\sqrt{a^2+(b-3)^2}}=0\\ 2a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Với các giá trị vừa tìm của a, b ở trên ta được:

$$T\ge\frac{12\sqrt5}{25}x-\frac{6\sqrt5}{25}y+\frac{38\sqrt5}{25}=2\sqrt5$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $2\sqrt5$ khi $x=\frac{2}{3};y=-\frac{2}{3}$

Bài toán 5. Cho hai số thực x, y. Tìm trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$$

Phân tích để tìm lời giải :

Giả sử giá trị nhỏ nhất của T đạt được tại $x=y=a$

Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các tham số p, q như sau :

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}.\sqrt{\left(p^2+q^2\right)\left[(x+1)^2+(y-1)^2\right]}\ge\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}.\left[p(x+1)+q(y-1)\right]$$

(2)

Ta cần chọn p, q sao cho đẳng thức ở (2) xảy ra khi $x=y=a$ nên

$\frac{p}{a+1}=\frac{q}{a-1}$ từ đó ta có thể chọn $p=a+1,\ q=a-1$

Tương tự, với biểu thức $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ ta có thể chọn $p=a-1,\ q=a+1$

với biểu thức $\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$ ta có thể chọn $p=q=1$.

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}\ge\frac{1}{\sqrt{(a+1)^2+(a-1)^2}}.\left[(a+1)(x+1)+(a-1)(y-1)\right]$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\ge\frac{1}{\sqrt{(a-1)^2+(a+1)^2}}.\left[(a-1)(x-1)+(a-1)(y+1)\right]$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}\ge\frac{1}{\sqrt2}.\left[1.(x+2)+1.(y+2)\right]$$

Từ đó : $T\ge\left[\frac{2a}{\sqrt{2(a^2+1)}}+\frac{1}{\sqrt2}\right].(x+y)+\frac{4}{\sqrt{2(a^2+1)}}+2\sqrt2$

Ta cần chọn a sao cho : $\frac{2a}{\sqrt{2(a^2+1)}}+\frac{1}{\sqrt2}=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{\sqrt3}$

Với các giá trị vừa tìm của a ở trên ta được:

$$T \geq \frac{4}{\sqrt{2\left(\frac{1}{3}+1\right)}} + 2\sqrt{2} = \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ khi $x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài tập tương tự.

1. Cho x, y, z > 0 thõa mãn $x+y+z \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$T = \sqrt{x^2+\frac{1}{2y^2}} + \sqrt{y^2+\frac{1}{2z^2}} + \sqrt{z^2+\frac{1}{2x^2}}$$

2. Cho x, y, z , t > 0 thõa mãn $x+y+z+t=2$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$T = \sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z+t}} + \sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t+x}} + \sqrt{z^2+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{x+y}} + \sqrt{t^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y+z}}$$

3. Cho x, y, z > 0 thõa mãn $x+y+z=3$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$T = \sqrt{2x^2+\frac{2}{x+1}+y^4} + \sqrt{2y^2+\frac{2}{y+1}+z^4} + \sqrt{2z^2+\frac{2}{z+1}+x^4}$$

4. Cho x, y thõa mãn $x-2y+2=0$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$T = \sqrt{x^2+y^2-6x-10y+34} + \sqrt{x^2+y^2-10x-14y+74}$$

5. Cho hai số thực x, y . Tìm GTNN của biểu thức :

$$T = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} + \sqrt{x^2+(y+4)^2}$$

5. Kỹ năng sử dụng "Phép thế biến".

5.1 Phép thế nghịch đảo.

Chúng ta trở về với một bài toán đơn giản mà ta đã xem xét trong phần trước với việc vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách đơn giản

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad (1)$$

Nếu trong **bài toán 1** ở trên ta chỉ việc thay thế a,b,c lần lượt bởi $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ (mà ta gọi là "***phép thế biến*** ") thì ta thu được bất đẳng thức sau:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad (2)$$

Mà lời giải của bất đẳng thức (2) không thể đơn giản như lời giải của bất đẳng thức (1)

Từ đó, khi gặp các bài toán mà hình thức xuất hiện của nó gây cho ta sự khó khăn mà trong khi đó các biểu thức có dạng phép thế thì ta nên sử dụng phép thế thử xem sao . Ta cùng xét qua một số ví dụ sau:

Ví dụ 1. Cho x, y, z > 0 thõa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^3(y+z)}+\frac{1}{y^3(z+x)}+\frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

(IMO 1995)

Nhận xét:

Chính sự xuất hiện biểu thức $\frac{1}{x^3(y+z)}=\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ *làm cho ta suy nghĩ đến việc sử dụng phép thế để đưa về biểu thức dạng* $\frac{a^3}{b+c}$ *thuận lợi hơn trong việc vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki*

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Khi đó $a,\ b,\ c>0$ và $abc=1$

Bất đẳng thức (1) trở thành: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

Ta có: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}=\frac{3}{2}$

Ví dụ 2. Cho x, y, z > 1 thõa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$.Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\quad(1)$$

(IRAN 1998)

Nhận xét:

Chính sự xuất hiện giả thiết $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ *làm cho ta suy nghĩ đến việc sử dụng phép thế biến.*

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Khi đó $a,b,c\in(0;1)$ và $a+b+c=2$

Bất đẳng thức (1) trở thành: $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\ge\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}$

Ta lại có, $\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)^2\le\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1-a+1-b+1-c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Ví dụ 3. Cho $x,\ y,\ z>0$ thõa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}++\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\quad(1)$$

(APMO 2002)

Nhận xét:

Chính sự xuất hiện giả thiết $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ *làm cho ta suy nghĩ đến việc sử dụng phép thế biến.*

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Khi đó $a,\ b,\ c\in(0\ ;1)$ và $a+b+c=1$

Bất đẳng thức (1) trở thành: $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{ca}}+\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}}\ge\frac{1}{\sqrt{abc}}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}$

Hay $\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\ge\sqrt{(a+\sqrt{bc})^2}=a+\sqrt{bc}$$
$$\sqrt{b+ca}=\sqrt{b(a+b+c)+ca}=\sqrt{(a+b)(b+c)}\ge\sqrt{(b+\sqrt{ac})^2}=b+\sqrt{ac}$$
$$\sqrt{c+ab}=\sqrt{c(a+b+c)+ab}=\sqrt{(c+b)(a+c)}\ge\sqrt{(c+\sqrt{bc})^2}=c+\sqrt{ab}$$

Từ đó suy ra $\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+a+b+c=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+1$

Ví dụ 4. Cho x, y, z là các số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{x^2}{yz+2x^2}+\frac{y^2}{zx+2y^2}+\frac{z^2}{xy+2z^2}\le 1 \quad (1)$$

Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{yz+2x^2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{zx+2y^2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{xy+2z^2}\right)\ge\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{yz}{yz+2x^2}+\frac{zx}{zx+2y^2}+\frac{xy}{xy+2z^2}\ge 1 \quad (2)$$

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Bất đẳng thức (2) trở thành: $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1$

Ta lại có, $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab}=1$

5.2 Phép thế hoán vị.

Tiếp theo ta đến với các phép thế phức tạp hơn. Ta bắt đầu với bài toán mở đầu sau:

Bài toán mở đầu :

Cho a, b, c là ba số thực khác không thõa mãn $abc=k$:

1) Tồn tại các số thực x, y, z khác không thõa : $a=\frac{l.x^2}{yz};b=\frac{l.y^2}{zx};c=\frac{l.z^2}{xy}$
2) Tồn tại các số thực x, y, z khác không thõa : $a=\frac{l.yz}{x^2};b=\frac{l.zx}{y^2};c=\frac{l.xy}{z^2}$
3) Tồn tại các số thực x, y, z khác không thõa : $a=\frac{l.x}{y};b=\frac{l.y}{z};c=\frac{l.z}{x}$
4) Tồn tại các số thực x, y, z khác không thõa : $a=\frac{l.y}{x};b=\frac{l.z}{y};c=\frac{l.x}{z}$

Trong đó, l là số thực khác không thõa $l^3=k$.

Lời giải:

1) Chọn $x=\sqrt[3]{a}\ ;y=\sqrt[3]{b}\ ;z=\sqrt[3]{c}$ ta có: $\frac{l.x^2}{yz}=l.\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}}=l.\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{abc}}=l.\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{k^3}}=a$

   Tương tự, $\frac{l.y^2}{zx}=b;\frac{l.z^2}{xy}=c$

2) Chọn $x=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\ ;y=\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\ ;z=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$, tương tự ta cũng có

   $\frac{l.yz}{x^2}=a;\frac{l.zx}{y^2}=b;\frac{l.xy}{z^2}=c$

3) Chọn $x=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{c}};y=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}};z=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}$ ta có: $\frac{l.x}{y}=l.\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}}=l.\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{abc}}=l.\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{k^3}}=a$

Tương tự, $\frac{l.y}{z}=b\,;\frac{l.z}{x}=c$

4) Chọn $x=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}};y=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}};z=\frac{b}{\sqrt[3]{c}}$ ta có: $\frac{l.y}{x}=l.\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}}=l.\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{abc}}=l.\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{k^3}}=a$

Tương tự, $\frac{l.z}{y}=b\,;\frac{l.x}{x}=c$

Bây giờ ta xem xét việc sử dụng các phép thế trong bài toán mở đầu để giải quyết các bài toán như thế nào :

Ví dụ 1. Cho $a,\ b,\ c\neq 1$ thõa mãn $abc=1$ .Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{(1-a)^2}+\frac{b^2}{(1-b)^2}+\frac{c^2}{(1-c)^2}\geq 1 \quad (1)$$

(IMO 2008)

Lời giải 1.

Tồn tại 3 số dương x, y, z thõa : $a=\frac{x^2}{yz};b=\frac{y^2}{zx};c=\frac{z^2}{xy}$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^4}{(x^2-yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2-zx)^2}+\frac{z^4}{(z^2-xy)^2}\geq 1 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\frac{x^4}{(x^2-yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2-zx)^2}+\frac{z^4}{(z^2-xy)^2}\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2}$$

Mặt khác,

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2}\geq 1 \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)^2-\left[(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2\geq 0$$

Lời giải 2.

Tồn tại 3 số dương x, y, z thõa : $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^2}{(x-y)^2}+\frac{y^2}{(y-z)^2}+\frac{z^2}{(z-x)^2}\geq 1 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\frac{x^2}{(x-y)^2}+\frac{y^2}{(y-z)^2}+\frac{z^2}{(z-x)^2}=\frac{x^2(x-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}+\frac{y^2(y-x)^2}{(y-z)^2(y-x)^2}+\frac{z^2(z-y)^2}{(z-x)^2(z-y)^2}$$

$$\geq \frac{\left[x(x-z)+y(y-x)+z(z-y)\right]^2}{(x-y)^2(x-z)^2+(y-z)^2(y-x)^2+(z-x)^2(z-y)^2}=\frac{\left[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\right]^2}{\left[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\right]^2}=1$$

Vì $\sum(x-y)^2(x-z)^2=\sum(x-y)^2(x-z)^2+2\sum(x-y)(x-z)(y-z)(y-x)$

$$=\left(\sum(x-y)(x-z)\right)^2=\left[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\right]^2$$

Ví dụ 2. Cho a, b, c > 0 thõa mãn $abc=1$ .Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq \frac{3}{4} \quad (1)$$

Lời giải 1.

Tồn tại 3 số dương x, y, z thõa : $a=\frac{yz}{x^2};b=\frac{zx}{y^2};c=\frac{xy}{z^2}$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zx)^2}+\frac{z^4}{(z^2+xy)^2}\ge\frac{3}{4}\quad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có : $\begin{cases}(x^2+yz)^2\le(x^2+y^2)(x^2+z^2)\\(y^2+zx)^2\le(x^2+y^2)(y^2+z^2)\\(z^2+xy)^2\le(x^2+z^2)(y^2+z^2)\end{cases}$

Nên

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zx)^2}+\frac{z^4}{(z^2+xy)^2}\ge\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}+\frac{y^4}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}+\frac{z^4}{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}$$

Từ đó để chứng minh (2) ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn :

$$\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}+\frac{y^4}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}+\frac{z^4}{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}\ge\frac{3}{4}\quad(3)$$

Biến đổi quy đồng và thu gọn bất đẳng thức (3) tương đương với :

$$x^2y^2(x^2+y^2)+y^2z^2(y^2+z^2)+z^2x^2(z^2+z^2)\ge 6(xyz)^2\quad(4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$x^2y^2(x^2+y^2)+y^2z^2(y^2+z^2)+z^2x^2(z^2+z^2)\ge 2(xy)^3+2(yz)^3+2(zx)^3\ge 6(xyz)^2$$

Lời giải 2.

Tồn tại 3 số dương x, y, z thõa : $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{y^2}{(x+y)^2}+\frac{z^2}{(y+z)^2}+\frac{x^2}{(z+x)^2}\ge\frac{3}{4}\quad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\frac{y^2}{(x+y)^2}+\frac{z^2}{(y+z)^2}+\frac{x^2}{(z+x)^2}\ge\frac{\left[y(y+z)+z(z+x)+x(x+y)\right]^2}{(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2}$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right]^2}{(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2}$$

Nên ta cần chứng minh : $\frac{1}{4}.\frac{\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right]^2}{(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2}\ge\frac{1}{4}$

Hay $\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right]^2\ge 3\left[(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2\right]$

Mà bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$.

Ví dụ 3. Cho a, b, c > 0 thõa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\ge\frac{3}{2}\quad(1)$$

Lời giải

Tồn tại 3 số dương x,y,z thõa : $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$.Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{xz}{xy+yz}+\frac{xy}{xz+yz}+\frac{yz}{xy+xz}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{xz}{xy+yz}+1\right)+\left(\frac{xy}{xz+yz}+1\right)+\left(\frac{yz}{xy+xz}+1\right)\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy+yz}+\frac{1}{xz+yz}+\frac{1}{xy+xz}\right)\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[(xy+yz)+(xz+yz)+(xy+xz)\right]\left(\frac{1}{xy+yz}+\frac{1}{xz+yz}+\frac{1}{xy+xz}\right)\geq 9$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki

Ví dụ 4. Cho $a,\ b,\ c>0$ thõa mãn $abc=8$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leq 0 \quad (1)$$

Lời giải .

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq 1$ (2)

Tồn tại 3 số dương x, y, z thõa : $a=\frac{2x}{y};b=\frac{2y}{z};c=\frac{2z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức (2) trở thành:

$$\frac{y^2}{2xy+y^2}+\frac{z^2}{2yz+z^2}+\frac{x^2}{2zx+x^2}\geq 1 \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\frac{y^2}{2xy+y^2}+\frac{z^2}{2yz+z^2}+\frac{x^2}{2zx+x^2}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(2xy+y^2)+(2yz+z^2)+(2zx+x^2)}=1$$

Ví dụ 5. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq 1 \quad (1)$$

Phân tích để tìm lời giải :

Đây là một bất đẳng thức thuần nhất và hoán vị nên ta có thể nghĩ đến việc áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(a^3+abc+b^3)+b(b^3+abc+c^3)+c(c^3+abc+a^3)}$$

Nhưng đến đây không thể giải quyết được dù tôi đa cố gắng biến đổi rất nhiều cách khác nhau.

Bằng cách xem xét và thử sử dụng các phé thế tôi tìm được phép thế **4)** là hợp lí từ đó ta có lời giải sau.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta chuẩn hóa $abc=1$

Tồn tại 3 số dương x,y,z thõa : $a=\frac{y}{x};\ b=\frac{z}{y};\ c=\frac{x}{z}$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{y^6}{y^6+x^3y^3+z^3x^3}+\frac{z^6}{z^6+y^3z^3+x^3y^3}+\frac{x^6}{x^6+z^3x^3+z^3y^3}\geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\frac{y^6}{y^6+x^3y^3+z^3x^3}+\frac{z^6}{z^6+y^3z^3+x^3y^3}+\frac{x^6}{x^6+z^3x^3+z^3y^3}$$

$$\geq\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{\left(y^6+x^3y^3+z^3x^3\right)+\left(z^6+y^3z^3+x^3y^3\right)+\left(x^6+z^3x^3+z^3y^3\right)}=1$$

Ví dụ 6. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}\quad(1)$$

Lời giải

Đặt $abc=k$. Khi đó, tồn tại 3 số dương x, y, z thõa : $a=\frac{l.y}{x};b=\frac{l.z}{y};c=\frac{l.x}{z}$. Với $l^3=k$

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành: $\frac{x}{l(y+lz)}+\frac{y}{l(z+lx)}+\frac{z}{l(x+ly)}\geq\frac{3}{1+l^3}$

Hay $\frac{x}{y+lz}+\frac{y}{z+lx}+\frac{z}{x+ly}\geq\frac{3l}{1+l^3}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\frac{x}{y+lz}+\frac{y}{z+lx}+\frac{z}{x+ly}=\frac{x^2}{x(y+lz)}+\frac{y^2}{y(z+lx)}+\frac{z^2}{z(x+ly)}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x(y+lz)+y(z+lx)+z(x+ly)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(1+l)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{(1+l)(xy+yz+zx)}=\frac{3}{1+l}$$

Để hoàn thành bài toán ta cần chứng minh : $\frac{3}{1+l}\geq\frac{3l}{1+l^3}\Leftrightarrow l^2-2l+1\geq0$ (đúng)

Ví dụ 7. Cho a, b, c, d > 0 thõa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq4\quad(1)$$

Lời giải

Tồn tại 4 số dương x, y, z, t thõa : $a=\frac{x}{y};d=\frac{y}{z};c=\frac{z}{t};b=\frac{t}{x}$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành : $\frac{y+t}{x+y}+\frac{x+z}{t+x}+\frac{y+t}{z+t}+\frac{x+z}{y+z}\geq4$

Hay $(x+z)\left(\frac{1}{t+x}+\frac{1}{y+z}\right)+(y+t)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+t}\right)\geq4$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được :

$$(x+z)\left(\frac{1}{t+x}+\frac{1}{y+z}\right)+(y+t)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+t}\right)\geq\frac{4(x+z)}{x+y+z+t}+\frac{4(y+t)}{x+y+z+t}=4$$

Ví dụ 8. Cho a, b, c, d >0 thõa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+d)}+\frac{1}{d(d+a)}\geq2\quad(1)$$

Lời giải

Tồn tại 4 số dương x, y, z, t thõa : $a=\frac{y}{x};b=\frac{z}{y};c=\frac{t}{z};d=\frac{x}{t}$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành: $\frac{x^2}{y^2+xz}+\frac{y^2}{z^2+yt}+\frac{z^2}{t^2+xz}+\frac{t^2}{x^2+yt}\geq 2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\frac{x^2}{y^2+xz}+\frac{y^2}{z^2+yt}+\frac{z^2}{t^2+xz}+\frac{t^2}{x^2+yt}=\frac{x^4}{x^2(y^2+xz)}+\frac{y^4}{y^2(z^2+yt)}+\frac{z^4}{z^2(t^2+xz)}+\frac{t^4}{t^2(x^2+yt)}$$

$$\geq\frac{(x^2+y^2+z^2+t^2)^2}{x^2(y^2+xz)+y^2(z^2+yt)+z^2(t^2+xz)+t^2(x^2+yt)}=\frac{(x^2+y^2+z^2+t^2)^2}{(x^2+z^2)(y^2+t^2)+xz(x^2+z^2)+yt(y^2+t^2)}$$

$$\geq\frac{(x^2+y^2+z^2+t^2)^2}{(x^2+z^2)(y^2+t^2)+\frac{(x^2+z^2)^2}{2}+\frac{(y^2+t^2)^2}{2}}=2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=c=\frac{1}{b}=\frac{1}{d}$

Ví dụ 9. Cho a, b, c, d > 0 thõa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{(d+1)^2}\geq 1 \quad (1)$$

Lời giải 1.

Tồn tại 4 số dương x, y, z, t thõa : $a=\frac{yz}{x^2};\ b=\frac{zt}{y^2};\ c=\frac{tx}{z^2};\ d=\frac{xy}{t^2}$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zt)^2}+\frac{z^4}{(z^2+tx)^2}+\frac{t^4}{(t^2+xy)^2}\geq 1 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zt)^2}\geq\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}+\frac{y^4}{(y^2+z^2)(y^2+t^2)}$$

$$\geq\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)+(y^2+z^2)(y^2+t^2)}=\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2+t^2}$$

Tương tự, $\frac{z^4}{(z^2+tx)^2}+\frac{t^4}{(t^2+xy)^2}\geq\frac{y^2+t^2}{x^2+y^2+z^2+t^2}$

Nên ta có điều phải chứng minh .

Lời giải 2.

Tồn tại 4 số dương x, y, z, t thõa : $a=\frac{y}{x};\ b=\frac{z}{y};\ c=\frac{t}{z};\ d=\frac{x}{t}$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2}+\frac{z^2}{(z+t)^2}+\frac{t^2}{(t+x)^2}\geq 1 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2}+\frac{z^2}{(z+t)^2}+\frac{t^2}{(t+x)^2}$$

$$=\frac{x^2(x+t)^2}{(x+y)^2(x+t)^2}+\frac{y^2(y+x)^2}{(y+z)^2(y+x)^2}+\frac{z^2(z+y)^2}{(z+t)^2(z+y)^2}+\frac{t^2(t+z)^2}{(t+x)^2(t+z)^2}$$

$$\geq\frac{\left[x(x+t)+y(y+x)+z(z+y)+t(t+z)\right]^2}{(x+y)^2(x+t)^2+(y+z)^2(y+x)^2+(z+t)^2(z+y)^2+(t+x)^2(t+z)^2}$$

$$\geq \frac{\left[x(x+t)+y(y+x)+z(z+y)+t(t+z)\right]^2}{\left[(x+y)^2+(z+t)^2\right].\left[(x+t)^2+(y+z)^2\right]}=\frac{1}{4}.\frac{\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+t)^2+(t+x)^2\right]^2}{\left[(x+y)^2+(z+t)^2\right].\left[(x+t)^2+(y+z)^2\right]}\geq 1$$

Lời giải 3.

Tồn tại 4 số dương x, y, z, t thỗa : $a=\frac{yzt}{x^3};\ b=\frac{ztx}{y^3};\ c=\frac{txy}{z^3};\ d=\frac{xyz}{t^3}$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^6}{(x^3+yzt)^2}+\frac{y^6}{(y^3+ztx)^2}+\frac{z^6}{(z^3+txy)^2}+\frac{t^6}{(t^3+xyz)^2}\geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$\frac{x^6}{(x^3+yzt)^2}+\frac{y^6}{(y^3+ztx)^2}+\frac{z^6}{(z^3+txy)^2}+\frac{t^6}{(t^3+xyz)^2}\geq \frac{(x^3+y^3+z^3+t^3)^2}{(x^3+yzt)^2+(y^3+ztx)^2+(z^3+txy)^2+(t^3+xyz)^2}$$

Để hoàn thành bài toán ta cần chứng minh : $(x^3+y^3+z^3+t^3)^2\geq \sum(x^3+yzt)^2$

Hay $2\sum_{sym}x^3y^3\geq 2\sum x^3yzt+\sum y^2z^2t^2$

Theo bất đẳng thức Côsi : $2\sum x^3yzt\leq \frac{2}{3}\sum x^3(y^3+z^3+t^3)=\frac{4}{3}\sum_{sym}x^3y^3$

$$\sum y^2z^2t^2\leq \frac{1}{3}\sum(y^3z^3+z^3t^3+t^3y^3)=\frac{2}{3}\sum_{sym}x^3y^3$$

Từ hai bất đẳng trên ta có điều phải chứng minh.

2. Khả năng áp dụng

Giúp cho học sinh có thêm phương pháp để giải quyết các bài toán về bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giúp cho học sinh có thêm phương pháp để giải quyết các bài toán khó về bất đẳng thức trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp.

Các em học sinh khá giỏi có thể vận dụng kỹ năng sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki vào trong các bài toán khác như bất đẳng thức hình học, phương trình, hệ phương trình giải bằng các phương pháp đánh giá ,….

3. Lợi ích kinh tế xã hội

Qua việc áp dụng đề tài này vào việc giảng dạy ở các lớp ban khoa học tự nhiên, các lớp bồi dương học sinh giỏi. Tôi thấy tạo được sự say mê học tập và nghiên cứu môn toán cho học sinh, học sinh hiểu và vận dụng được những kỹ năng chính trong đề tài này.

Các em giải được nhiều bài toán khó về bất đẳng thức mà nếu giải bằng các phương pháp khác đôi khi gặp khó khăn và phức tạp hơn.

Đề tài đã góp phần rèn luyện cho học sinh tính sáng tạo.

Kết quả: sau khi vận dụng đề tài này vào việc dạy cho các đội tuyển tham gia học sinh gỏi môn toán các cấp của các lớp mà tôi đã tham gia, phụ trách trong hai năm học 2010 – 2011 và 2011 – 2012 : tổng số 15 giải , trong đó có 10 giải cấp quốc gia, 5 giải cấp tỉnh.

Phần C. KẾT LUẬN

Sau một quá trình giảng dạy nhiều năm, thông qua các tài liệu tham khảo, cũng như học hỏi ở các đồng nghiệp. Tôi đã hệ thống lại được rất nhiều bài toán hình học và đại số có thể ứng dụng bất đẳng thức Bunhiacopski để giải và mang lại hiệu quả không phải là nhỏ.

Thông qua sáng kiến kinh nghiệm này tôi mong muốn đuợc đóng góp một phần nhỏ bé công sức trong việc hướng dẫn học sinh ứng dụng và khai thác bất đẳng thức Bunhiacopski khi làm toán, rèn luyện tính tích cực, phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh, gây hứng thú cho các em khi học toán. Tuy nhiên, do thời gian có hạn, trình độ bản thân còn hạn chế, nên tôi rất mong được sự đóng góp bổ sung của Hội đồng khoa học các cấp và của các bạn đồng nghiệp để kinh nghiệm của tôi được hoàn chỉnh hơn, đồng thời cũng giúp đỡ tôi tiến bộ hơn trong giảng dạy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn !

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Toán học và tuổi trẻ từ năm 1996 đến năm 2012
2. Tài liệu bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên từ năm 2004 đến năm 2011
3. Old and New Inequalities - Titu Andreescu
4. Các bài giảng về bất đẳng thức Bunhiacopxki – Nguyễn vũ Lương

MỤC LỤC

Nội dung	*Trang*
Phần A. MỞ ĐẦU	
I. Đặt vấn đề	**1**
II. Phương pháp tiến hành	**1**
Phần B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	**2**
I. Mục tiêu	**2**
II. Mô tả giải pháp của đề tài	**2**
Chương I. Giới thiệu về bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến thể	**2**
Chương II. Một số kỹ năng sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để giải toán	**3**
1/Kỹ năng biến đổi thuận	**3**
2/Kỹ năng biến đổi nghịch	**8**
3/Kỹ năng thêm bớt	**13**
4/ Kỹ năng tham số hóa	**15**
5/Kỹ năng sử dụng phép thế	**20**
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	**29**
TÀI LIỆU THAM KHẢO	**30**
MỤC LỤC	**30**

PHẦN ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG CÁC CẤP

Đánh giá của Hội đồng khoa học nhà trường:

Ngày…. tháng….. năm 2012

Chủ tịch hội đồng

Đánh giá của Hội đồng khoa học ngành (Sở giáo dục đào tạo Bình Định)

Ngày…. tháng….. năm 2012

Chủ tịch hội đồng