BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

Nguyễn Anh Tuyến

Thái Bình, July 15, 2009

Tháng 3/1903, trên tạp chí $Educational\ Times$, A.M.Nesbitt đã đưa ra bài toán: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức $Nesbitt$. Đây là bất đẳng thức đẹp và đã thu hút được sự chú ý của nhiều người. Trong bài viết này, tôi xin nói về những ứng dụng, mở rộng và một số vấn đề liên quan đến nó.

1 Bất đẳng thức Nesbitt và ứng dụng

Như ta đã biết, bất đẳng thức $Nesbitt$ là một bất đẳng thức cơ bản, có nhiều ứng dụng quan trọng trong giải toán. Sau đây, tôi xin giới thiệu một số ví dụ để làm rõ hơn về điều đó.

Ví dụ 1.1. *Cho* $a, b, c > 0$ *thoả mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Ta có:

$$\sum \frac{1}{a^2(b+c)} = \sum \frac{abc}{a^2(b+c)} = \sum \frac{bc}{ab+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 1.2. *Cho* $a, b, c > 0$ *thoả mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ có:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \geq \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 1.3. *Cho* $a, b, c > 0$ *thoả mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a\left(b+1\right)} + \frac{1}{b\left(c+1\right)} + \frac{1}{c\left(a+1\right)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Đặt $a = x/y, b = y/z, c = z/x$, ta có:

$$\sum \frac{1}{a\left(b+1\right)} = \sum \frac{yz}{xy+zx} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 1.4 (Đề thi Olympic 30 - 4)**.** *Cho* $a, b > 0$ *và* x, y, z *là các số dương tuỳ ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} + \frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} + \frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ có:

$$(ay+bz)(az+by) \leq \frac{(ay+bz+az+by)^2}{4} = \frac{(a+b)^2(y+z)2}{4} \leq \frac{(a+b)^2(y^2+z^2)}{2}$$

Suy ra,

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} \geq \frac{2x^2}{(a+b)^2(y^2+z^2)}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} \geq \frac{2y^2}{(a+b)^2(z^2+x^2)}$$

$$\frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{2z^2}{(a+b)^2(x^2+y^2)}$$

Do đó,

$$\sum \frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} \geq \frac{2}{(a+b)^2}\left(\frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2}\right) \geq \frac{3}{(a+b)^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. □

Bất đẳng thức $Nesbitt$ không chỉ ứng dụng trong các bài bất đẳng thức Đại số mà còn là một công cụ quan trọng trong các bài toán bất đẳng thức Hình học.

Ví dụ 1.5. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{m_a}{l_b+h_c} + \frac{m_b}{l_c+h_a} + \frac{m_c}{l_a+h_b} \geq \frac{3}{2}$$

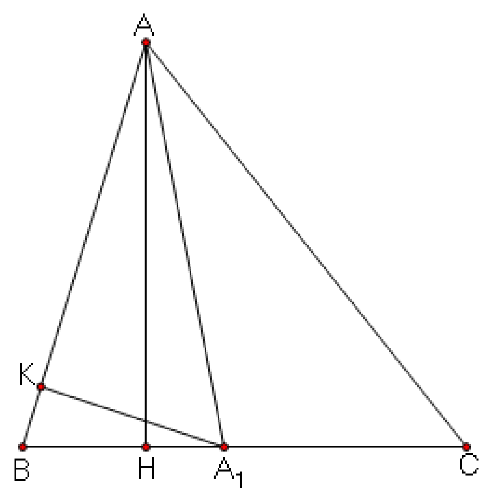
Hướng dẫn. Trước hết ta chứng minh: $h_a \le l_a \le m_a$.
Từ đó ta có:

$$\sum \frac{m_a}{l_b + h_c} \ge \sum \frac{m_a}{m_b + m_c} \ge \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. □

Ví dụ 1.6. *Cho tam giác ABC có 3 đường phân giác AA_1, BB_1, CC_1. Gọi khoảng cách từ A_1 đến AB, B_1 đến BC, C_1 đến CA lần lượt là a_1, b_1, c_1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} \ge \frac{3}{2}$$



Lời giải. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC và K là chân đường vuông góc hạ từ A_1 xuống AB.
Ta có:

$$S_{ABA_1} = \frac{1}{2}h_a.BA_1 = \frac{1}{2}a_1.AB$$
$$\Rightarrow \frac{a_1}{h_a} = \frac{BA_1}{AB} = \frac{CA_1}{CA} = \frac{BA_1 + CA_1}{AB + CA} = \frac{a}{b+c}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b_1}{h_b} = \frac{b}{c+a}; \frac{c_1}{h_c} = \frac{c}{a+b}$$

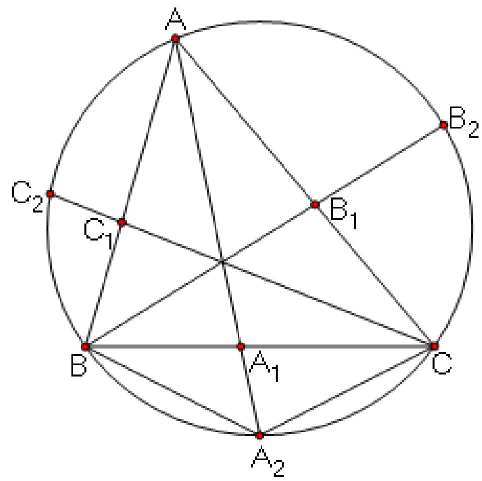
Do đó,

$$\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. □

Ví dụ 1.7. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường phân giác trong góc A cắt BC tại A_1, cắt (O) tại A_2. Các điểm $B_1, B_2; C_1, C_2$ được định nghĩa tương tự A_1, A_2. Chứng minh rằng:*

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+CA_2}+\frac{B_1B_2}{AB_2+CB_2}+\frac{C_1C_2}{AC_2+BC_2}\geq\frac{3}{4}$$



Lời giải. Vì đường phân giác trong góc A cắt (O) tại A_2 nên $BA_2 = CA_2$. Do đó:

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+CA_2}=\frac{A_1A_2}{2CA_2}$$

Dễ dàng chứng minh được $\triangle CA_1A_2 \sim \triangle ACA_2$. Suy ra: $\frac{A_1A_2}{CA_2}=\frac{CA_2}{AA_2}$.
Tứ giác ABA_2C nội tiếp, theo định lí $Ptoleme$ có:

$$\begin{aligned}&BC.AA_2 = AB.CA_2 + AC.BA_2\\ \Leftrightarrow\ &BC.AA_2 = CA_2(AB+CA)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{CA_2}{AA_2}=\frac{BC}{AB+CA}=\frac{a}{b+c}\end{aligned}$$

Tóm lại,

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+CA_2}=\frac{a}{2(b+c)}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{B_1B_2}{AB_2+CB_2}=\frac{b}{2(c+a)};\frac{C_1C_2}{AC_2+BC_2}=\frac{c}{2(a+b)}$$

Do đó,

$$\frac{A_1A_2}{BA_2+CA_2}+\frac{B_1B_2}{AB_2+CB_2}+\frac{C_1C_2}{AC_2+BC_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. $\square$

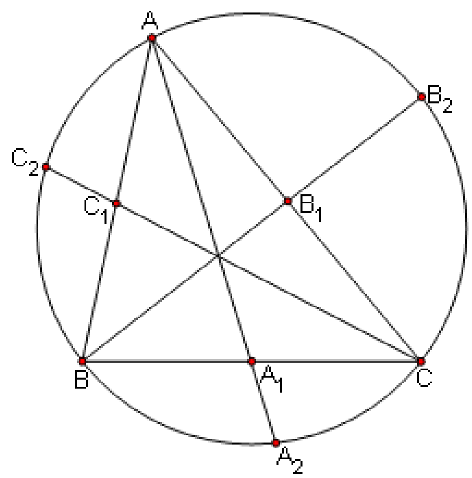
Nhận xét. Trong cách chứng minh trên ta mới sử dụng đẳng thức $Ptoleme$. Nếu sử dụng bất đẳng thức $Ptoleme$ thì ta có bài toán tổng quát hơn:

Ví dụ 1.8. *Cho lục giác $ABCDEF$ có $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{AD} + \frac{FA}{CF} \geq \frac{3}{2}$$

Ví dụ 1.9 (Đề thi Olympic 30 - 4, 2003)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt (O) tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:*

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leq \frac{9}{4}$$



Hướng dẫn. Ta dễ dàng có:

$$AA_1.A_1A_2 = BA_1.CA_1 = a^2/4$$

$$AA_1^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Suy ra,

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2b^2 + 2c^2} = 1 - \frac{a^2}{2(b^2 + c^2)}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{BB_1}{BB_2} = 1 - \frac{b^2}{2(c^2 + a^2)}; \frac{CC_1}{CC_2} = 1 - \frac{c^2}{2(a^2 + b^2)}$$

Vậy,

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} = 3 - \frac{1}{2}\left(\sum \frac{a^2}{b^2 + c^2}\right) \leq \frac{9}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. □

2 Bất đẳng thức Nesbitt và mở rộng

Bất đẳng thức $Nesbitt$ có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong giải toán nên việc mở rộng nó là một công việc cần thiết. Trong mục này, tôi sẽ đưa ra mở rộng bất đẳng thức $Nesbitt$ theo hai hướng là *những mở rộng trực tiếp* và *những mở rộng có thêm tham số*.

2.1 Những mở rộng trực tiếp

Đầu tiên, chúng ta sẽ nghĩ ngay đến việc *kéo dài* bất đẳng thức $Nesbitt$.

Mở rộng 1. *Cho* $a_1, a_2, ..., a_n > 0$*;* $n \geq 2$*. Chứng minh rằng:*

$$\sum \frac{a_1}{a_2 + a_3 + ... + a_n} \geq \frac{n}{n-1} \tag{1}$$

Lời giải. Giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Khi đó:

$$\frac{1}{a_2 + a_3 + ... + a_n} \geq \frac{1}{a_1 + a_3 + ... + a_n} \geq ... \geq \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}$$

Theo bất đẳng thức $Chebyshev$ có:

$$\begin{aligned}\sum \frac{a_1}{a_2 + a_3 + ... + a_n} &\geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\sum \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}\right) \\ &\geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{n^2}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)(n-1)}\right) = \frac{n}{n-1}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$. □

Nếu gắn thêm số mũ vào **Mở rộng 1.** ta có:

Mở rộng 2. *Cho* $a_1, a_2, ..., a_n > 0$*;* $n \geq 2$ *và* $k \geq (n-1)/n$*. Chứng minh rằng:*

$$\sum \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3 + ... + a_n}\right)^k \geq \frac{n}{(n-1)^k} \tag{2}$$

Ta xét tiếp đến một mở rộng nữa về *chiều dài*.

Mở rộng 3. *Với mọi* $x_i \geq 0$*,* $x_i + x_{i+1} > 0$*,* $x_{n+i} = x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *thì:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \tag{3}$$

Chú ý. Bất đẳng thức trên là bất đẳng thức $Shapiro$ được nhà Toán học $Shapiro$ đưa ra trên tạp chí *American Mathematic Monthly* năm 1954. Bất đẳng thức $Shapiro$ nhìn rất đơn giản nhưng việc chứng minh lại vô cùng khó vì nó không đúng với mọi số tự nhiên n. Tuy nhiên cuối cùng thì nhà Toán học $Troesch$ đã chứng minh được bất đẳng thức $Shapiro$ với kết quả quan trọng sau:
Bất đẳng thức Shapiro đúng với mọi n chẵn ≤ 12 và n lẻ ≤ 23. Với mọi giá trị khác của n thì bất đẳng thức sai.

$\square$

Mở rộng bất đẳng thức $Nesbitt$ thường gặp là gắn với số mũ. Ta xét một vài mở rộng:

Mở rộng 4. *Cho $a, b, c > 0$ và $n \geq 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} \tag{4}$$

Hệ quả 1. *Với $a, b, c > 0$ thoả mãn $abc = 1$ và $n \geq 1$ thì:*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Ta có thể gắn thêm hệ số vào **Mở rộng 4.** như sau:

Mở rộng 5. *Cho $a, b, c > 0$ và $n \geq 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^n}{pb+qc}+\frac{b^n}{pc+qa}+\frac{c^n}{pa+qb} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{p+q} \geq \frac{3}{p+q}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} \tag{5}$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ có:

$$\begin{aligned} &\frac{a^n}{pb+qc}+\frac{b^n}{pc+qa}+\frac{c^n}{pa+qb} \\ =\ &\frac{a^{2n-2}}{pba^{n-2}+qca^{n-2}}+\frac{b^{2n-2}}{pcb^{n-2}+qab^{n-2}}+\frac{c^{2n-2}}{pac^{n-2}+qbc^{n-2}} \\ \geq\ &\frac{(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})^2}{p(ba^{n-2}+cb^{n-2}+ac^{n-2})+q(ca^{n-2}+ab^{n-2}+bc^{n-2})} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức hoán vị có:

$$a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1} \geq ba^{n-2}+cb^{n-2}+ac^{n-2}$$

$$a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1} \geq ca^{n-2}+ab^{n-2}+bc^{n-2}$$

Do đó,

$$\frac{a^n}{pb+qc}+\frac{b^n}{pc+qa}+\frac{c^n}{pa+qb} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{p+q}$$

Thật dễ dàng chứng minh được:

$$\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{p+q} \geq \frac{3}{p+q}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Nếu nâng số mũ mẫu số của **Mở rộng 4.** thì ta có bài toán tương đối tổng quát sau:

Mở rộng 6. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^n}{(b+c)^m}+\frac{b^n}{(c+a)^m}+\frac{c^n}{(a+b)^m} \geq \frac{a^{n-m}+b^{n-m}+c^{n-m}}{2^m} \tag{6}$$

Chứng minh. Ta có: $(b+c)^m \leq 2^{m-1}(b^m+c^m)$, suy ra:

$$\sum_{cyc}\frac{a^n}{(b+c)^m} \geq \sum_{cyc}\frac{a^n}{2^{m-1}(b^m+c^m)}$$

Bây giờ, ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc}\frac{a^n}{2^{m-1}(b^m+c^m)} \geq \frac{a^{n-m}+b^{n-m}+c^{n-m}}{2^m}$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}\frac{a^n}{2^{m-1}(b^m+c^m)} - \frac{a^{n-m}+b^{n-m}+c^{n-m}}{2^m}\\
&= \sum_{cyc} a^{n-m}\left(\frac{a^m}{b^m+c^m}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \sum_{cyc}\frac{a^{n-m}}{b^m+c^m}(2a^m-b^m-c^m)\\
&= \sum_{cyc}(a^m-b^m)\left(\frac{a^{n-m}}{b^{n-m}+c^{n-m}}-\frac{b^{n-m}}{c^{n-m}+a^{n-m}}\right)\\
&= \sum_{cyc}\frac{a^m-b^m}{(b^{n-m}+c^{n-m})(c^{n-m}+a^{n-m})}\left(c^{n-m}(a^{n-m}-b^{n-m})+a^{2(n-m)}-b^{2(n-m)}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Mở rộng 7. *Cho* $a, b, c > 0$ *và* n *là hằng số cho trước. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b}\right)^n \geq \left(\frac{3}{2^n}; 2\right) \tag{7}$$

Hướng dẫn. Bài toán trên dễ dàng chứng minh được với trường hợp $n \leq 0$ và $n \geq 1$. Còn với trường hợp $0 < n < 1$, ta sẽ chứng minh được bằng phương pháp dồn biến. Hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức là $\frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$.
Chú ý. Đây là kết quả ở [1]. □

Hệ quả 2. *Với* $a, b, c > 0$ *và* $n \in N$, $n \geq 2$ *thì:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}$$

Bất đẳng thức $Nesbitt$ có một dạng mở rộng nữa khi thêm hệ số ở tử số.

Mở rộng 8. *Cho* $m, n, p; x, y, z > 0$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \tag{8}$$

Chứng minh. Đặt

$$x = b + c, y = c + a, z = a + b$$
$$\Rightarrow a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
&\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \\
&= \frac{m(y+z-x)}{2x} + \frac{n(z+x-y)}{2y} + \frac{p(z+y-z)}{2z} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{my}{x} + \frac{nx}{y}\right) + \left(\frac{my}{x} + \frac{my}{x}\right) + \left(\frac{my}{x} + \frac{my}{x}\right) - (m+n+p)\right] \\
&\geq \sqrt{mn} + \sqrt{mp} + \sqrt{pn} - \frac{m+n+p}{2}
\end{aligned}$$

Vậy,

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \geq \sqrt{mn} + \sqrt{mp} + \sqrt{pn} - \frac{m+n+p}{2}$$

□

Bình luận. Trong phần trên, tác giả đã nêu lên những mở rộng của bất đẳng thức $Nesbitt$ một cách *đa chiều* và đã tổng hợp các *chiều* ra một vài bài toán *mạnh* hơn. Nhưng đó mới chỉ là ví dụ cho sự tổng hợp với mục đích thôi thúc sự sáng tạo từ bạn đọc. Hy vọng rằng các bạn sẽ từ đó rồi đưa ra những bất đẳng thức mạnh hơn, ứng dụng lớn hơn trong các bài toán.

2.2 Những mở rộng có thêm tham số

Bài toán 2.2.1. *Cho* $a, b, c; x, y, z > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}x^2 + \frac{b}{c+a}y^2 + \frac{c}{a+b}z^2 \geq xy + yz + zx - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Chứng minh. Cộng mỗi vế của bất đẳng thức với $x^2 + y^2 + z^2$, ta có:

$$\frac{a}{b+c}x^2 + x^2 + \frac{b}{c+a}y^2 + y^2 + \frac{c}{a+b}z^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Ta viết lại bất đẳng thức:

$$(a+b+c)\left(\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b}\right) \geq xy + yz + zx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ có:

$$\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(a+b+c)}$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b+c}{x} = \frac{c+a}{y} = \frac{a+b}{z}$. □

Từ bài toán trên, ta có thể suy ra bài toán sau:

Bài toán 2.2.2. *Cho* $u, v, w > 0$ *và* a, b, c *là ba cạnh của tam giác có diện tích* S. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{u}{v+w}a^2 + \frac{v}{w+u}b^2 + \frac{w}{u+v}c^2 \geq 2\sqrt{3}S$$

Hướng dẫn. Ta chỉ cần chứng minh:

$$ab + bc + ca - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2\sqrt{3}S$$

Đặt $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$, ta có:

$$ab + bc + ca - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = xy + yz + zx$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, $u = v = w$. □

Bài toán 2.2.3. *Cho* $a, b, c; x, y, z > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\geq\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z)$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ có:

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\\&=(a+b+c)\left(\frac{y+z}{b+c}+\frac{z+x}{c+a}+\frac{x+y}{a+b}\right)-2(x+y+z)\\&\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}\right)^2-2(x+y+z)\\&=\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z)\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. □

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được:

$$\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z)\geq\sqrt{3(xy+yz+zx)}\geq 3\left(\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right)$$

Từ đó, ta có hai bài toán hệ quả sau:

Bài toán 2.2.4. *Cho* $a, b, c; x, y, z > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\geq 3\left(\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right)$$

Bài toán 2.2.5. *Cho* $a, b, c; x, y, z > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\geq\sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

Bình luận. Trong phần trên, tôi đã đưa ra một vài bài toán có gắn thêm hằng số vào bất đẳng thức $Nesbitt$. Những bài toán đó thường không được coi là mở rộng của bất đẳng thức $Nesbitt$. Tuy nhiên theo quan điểm của tôi thì nó vẫn là một dạng mở rộng bởi vì khi lấy một giá trị đặc biệt thay cho những hằng số đó thì ta sẽ thu được bất đẳng thức $Nesbitt$. Ví dụ, ở **Bài toán 2.2.3** ta chọn $x = y = z$ thì nó sẽ trở thành:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

3 Tản mạn bất đẳng thức Nesbitt

3.1 So sánh các bất đẳng thức dạng Nesbitt

Bài toán 3.1.1. *Cho* $a, b, c > 0$ *và* $m \geq n \geq 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^m}{b^m+c^m}+\frac{b^m}{c^m+a^m}+\frac{c^m}{a^m+b^m} \geq \frac{a^n}{b^n+c^n}+\frac{b^n}{c^n+a^n}+\frac{c^n}{a^n+b^n}$$

Lời giải 1. Đặt

$$f(t)=\frac{a^t}{b^t+c^t}+\frac{b^t}{c^t+a^t}+\frac{c^t}{a^t+b^t}$$

Bây giờ, ta chỉ việc chứng minh cho hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng theo $t \geq 0$.
Dễ dàng ta có:

$$f'(t)=\sum_{sym} a^t b^t (a^t-b^t)(\ln a-\ln b)\frac{2c^t+a^t+b^t}{(b^t+c^t)^2(a^t+c^t)^2} \geq 0$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Lời giải 2. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{a^m}{b^m+c^m} \geq \sum \frac{a^n}{b^n+c^n}\\
\Leftrightarrow\ &\sum \frac{a^m}{b^m+c^m}-\frac{a^n}{b^n+c^n} \geq 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum \frac{a^m(b^n+c^n)-a^n(b^m+c^m)}{(b^m+c^m)(b^n+c^n)} \geq 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum \frac{a^nb^n(a^{m-n}-b^{m-n})+a^nc^n(a^{m-n}-c^{m-n})}{(b^m+c^m)(b^n+c^n)} \geq 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum a^nb^n(a^{m-n}-b^{m-n})\left(\frac{1}{(b^m+c^m)(b^n+c^n)}-\frac{1}{(a^m+c^m)(a^n+c^n)}\right) \geq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Dễ thấy (*) luôn đúng. Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Bài toán 3.1.2. *Cho* $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a_1^2}{a_2^2+...+a_n^2}+...+\frac{a_n^2}{a_1^2+...+a_{n-1}^2} \geq \frac{a_1}{a_2+...+a_n}+...+\frac{a_n}{a_1+...+a_{n-1}}$$

Lời giải. Đặt

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_1^t}{a_2^t + a_3^t + ... + a_n^t}$$

$$S = a_1^t + a_2^t + ... + a_n^t$$

Ta sẽ chứng minh cho hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng theo $t \geq 0$. Ta có:

$$f'(t) = \sum_{1}^{n} \frac{a_1^t \ln a_1 (a_2^t + a_3^t + ... + a_n^t) - a_1^t (a_2^t \ln a_2 + a_3^t \ln a_3 + ... + a_n^t \ln a_n)}{(S - a_1^t)^2}$$

$$f'(t) = \sum_{1}^{n} \frac{a_1^t a_2^t (\ln a_1 - \ln a_2) + a_1^t a_3^t (\ln a_1 - \ln a_3) + ... + a_1^t a_n^t (\ln a_1 - \ln a_n)}{(S - a_1^t)^2}$$

Ta viết lại $f'(t)$ dưới dạng:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i^t a_j^t (\ln a_i - \ln a_j)}{(S - a_i^t)^2} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i^t a_j^t (\ln a_i - \ln a_j) \left(\frac{1}{(S - a_i^t)^2} - \frac{1}{(S - a_j^t)^2} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i^t a_j^t (\ln a_i - \ln a_j)(a_i^t - a_j^t) \frac{2S - a_i^t - a_j^t}{(S - a_i^t)^2 + (S - a_j^t)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi mỗi số a_i hoặc bằng nhau hoặc bằng 0. $\square$

Bình luận. Đến đây chắc hẳn các bạn đang đặt ra câu hỏi liệu rằng ta có thể kết hợp hai bất đẳng thức trên để có được một bất đẳng thức tổng quát hơn không? Đây là một ý nghĩ hết sức tự nhiên. Và tôi hy vọng các bạn sẽ suy nghĩ để tìm ra câu trả lời. Chúc các bạn thành công!

3.2 Liệu đã chặt?

Đã bao giờ bạn đặt ra câu hỏi con số $3/2$ đã chặt với bất đẳng thức $Nesbitt$ chưa? Câu trả lời là $3/2$ chưa phải là con số thực sự chặt! Tôi xin lấy một vài ví dụ.

Bài toán 3.2.1. *Cho a, b, c không âm. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{k.max\left\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\right\}}{ab+bc+ca}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{k.(a-c)^2}{ab+bc+ca}$$

Chon $a = 4/3, b = 1, c = 0$, ta có: $k \leq 7/16$.
Ta sẽ chứng minh cho đây là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{7(a-c)^2}{16(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(ab+ac+bc)}{b+c} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2} + \frac{7(a-c)^2}{16}$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+abc\sum_{cyc}\frac{1}{b+c} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2} + \frac{7(a-c)^2}{16}$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ có:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{2(a+b+c)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2} + \frac{7(a-c)^2}{16}$$

Đặt $a = c + x, b = c + y$ thì $x \geq y \geq 0$, thay vào bất đẳng thức trên rồi biến đổi tương đương, ta có:

$$(11x^2 - 32xy + 32y^2)c + (x+y)(3x-4y)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.
Vậy, $k_{max} = 7/16$. □

Bài toán 3.2.2. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \sum_{cyc}\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

Hướng dẫn. Biến đổi tương đương rồi sử dụng bất đẳng thức $Schur$. □

Bài toán 3.2.3. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{3}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)$$

Bài toán 3.2.4. *Cho* a, b, c *không âm. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

3.3 Nhìn theo hướng ngược lại

Trong phần này, chúng ta sẽ cùng nhìn bất đẳng thức $Nesbitt$ theo hướng ngược lại, hay nói cách khác là đưa $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ vào *thế yếu*.

Bài toán 3.3.1. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ac}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}-\frac{a}{b+c}=\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}$$

Đặt $x=\frac{1}{(b+c)^2}, y=\frac{1}{(a+c)^2}, z=\frac{1}{(a+b)^2}$, ta cần chứng minh:

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

Giả sử $a\ge b\ge c$, ta dễ dàng suy ra $x\ge y\ge z$. Do đó, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $Schur$ suy rộng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Chú ý. Bất đẳng thức $Schur$ suy rộng được phát biểu như sau:

Định lý 3.1 (Bất đẳng thức $Schur$ suy rộng)**.** *Với các số dương* a,b,c,x,y,z *sao cho* (a,b,c) *và* (x,y,z) *đều là các bộ đơn điệu thì:*

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

Bài toán 3.3.2. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}}$$

Bài toán 3.3.3. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{3}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)$$

Bài toán 3.3.4. *Cho* $m,n>0;\ m<n;\ a,b,c>0;\ a,b,c\in(m,n)$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{3}{2}+\frac{(m-n)^2}{2m(m+n)}$$

Bài toán 3.3.5. *Cho* a,b,c *là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$ thì $a+b \geq a+c \geq b+c$.
Suy ra: $\frac{c}{a+b} \leq \frac{c}{b+c}$, $\frac{b}{c+a} \leq \frac{b}{b+c}$, $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c}$.
Cộng vế các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a}{b+c} + 1 < 1 + 1 = 2$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. □

Bài toán 3.3.6. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} - 3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)}$$

$$2 - \frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Ta phải chứng minh $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$. Trong đó:

$$S_a = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)},\ S_b = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(b+a)(b+c)},\ S_c = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(c+b)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ thì $S_a \geq 0$.
Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên:

$$S_b = \frac{a(b+c-a)+c(b-c)}{(b+a)(b+c)} \geq \frac{c(b-c)}{(b+a)(b+c)}$$

$$S_c = \frac{a(b+c-a)+b(c-b)}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{b(c-b)}{(c+a)(c+b)}$$

$$\frac{a-c}{a-b} \geq \frac{b}{c} \geq \frac{a+b}{a+c}$$

Từ các bất đẳng thức trên suy ra:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$$

$$\geq (a-b)^2\left(\frac{b^2}{c^2}S_b + S_c\right) \geq \frac{(a-b)^2}{c^2}\left(\frac{b^2c(b-c)}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2b(c-b)}{(c+a)(c+b)}\right)$$

$$= \frac{(a-b)^2(b-c)b}{(b+a)(b+c)}\left(\frac{b}{c} - \frac{a+b}{a+c}\right) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bình luận. Các bất đẳng thức trên, khi được kết hợp với bất đẳng thức $Nesbitt$ sẽ cho chúng ta những bài toán mới mà một trong những cách chứng minh nó là đưa bất đẳng thức $Nesbitt$ vào như một phần tử trung gian.

3.4 So sánh $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ và $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

Như chúng ta đã biết $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$; $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$. Vì hai bất đẳng thức trên cùng chiều nên ta không dễ dàng đưa ra ngay được phép so sánh giữa chúng. Sau đây, tôi xin đưa ra một vài ví dụ để so sánh.

Bài toán 3.4.1. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ có:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\geq\frac{4a}{b+c};\ \frac{b}{a}+\frac{b}{c}\geq\frac{4b}{c+a};\ \frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq\frac{4c}{a+b}.$$

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

Bài toán 3.4.2. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}$$

Bài toán 3.4.3 (Việt Nam TST 2006)**.** *Cho* $a,b,c\in[1,2]$. *Chứng minh rằng:*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Bài toán 3.4.4. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\geq 2\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)$$

Bình luận. Sau một số ví dụ được đưa ra để so sánh $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ và $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$, ta thấy $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ có phần bị *yếu thế* hơn.

3.5 Những bất đẳng thức lồng ghép

Có rất nhiều bất đẳng thức được tạo thành nhờ sự lồng ghép giữa bất đẳng thức $Nesbitt$ và một biểu thức khác. Trong đó, một số bài toán khi chứng minh thì tách độc lập hai phần. Nhưng bên cạnh đó có rất nhiều bài toán ta phải kết hợp cả hai phần của vế trái lại rồi chứng minh hợp lí mới cho kết quả ta muốn.

Bài toán 3.5.1. *Cho a, b, c không âm và $n > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n^2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 2n$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$; và đặt $ab+bc+ca=q$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{3abc+1-2q}{q-abc}+\frac{n^2q}{1-2q}\geq 2n$$

Ta có:

$$VT\geq\frac{1-2q}{q}+\frac{n^2q}{1-2q}\geq 2n$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. □

Bài toán 3.5.2. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b+\alpha c}+\frac{b}{c+\beta a}+\frac{c}{a+\gamma b}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha ca+\beta ab+\gamma bc}{(a+b+c)^2}\right)\geq 1$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ có:

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2\\ =&\left(\sqrt{\frac{a}{b+\alpha c}}\sqrt{a(b+\alpha c)}+\sqrt{\frac{b}{c+\beta a}}\sqrt{b(c+\beta a)}+\sqrt{\frac{c}{a+\gamma b}}\sqrt{c(a+\gamma b)}\right)^2\\ \leq&\left(\frac{a}{b+\alpha c}+\frac{b}{c+\beta a}+\frac{c}{a+\gamma b}\right)(ab+bc+ca+\alpha ca+\beta ab+\gamma bc)\end{aligned}$$

Suy ra,

$$1\leq\left(\frac{a}{b+\alpha c}+\frac{b}{c+\beta a}+\frac{c}{a+\gamma b}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha ca+\beta ab+\gamma bc}{(a+b+c)^2}\right)$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. □

Bài toán 3.5.3. *Cho a, b, c không âm. Tìm hằng số k dương lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^2+b^2+c^2}\geq k+\frac{3}{2}$$

Bài toán 3.5.4. *Cho a, b, c không âm. Tìm điều kiện cho các số dương k, l để bất đẳng thức sau đúng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^2+b^2+c^2}+l\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{3}{2}+k+\frac{l}{3}$$

Bài toán 3.5.5. *Cho a, b, c không âm. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{4(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$; và đặt $ab+bc+ca=q$, $abc=r$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1-2q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q-3r} \geq 5$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ có:

$$\frac{1-2q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q-3r}=\frac{q}{q-r}+\frac{1-3q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q-3r} \geq 5$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. □

Ta có bài toán tổng quát.

Bài toán 3.5.6. *Cho a, b, c không âm và $n>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n^2(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 1+2n$$

Từ nhận xét $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b)(b+c)(c+a)+abc$, ta có bài toán sau:

Bài toán 3.5.7. *Cho a, b, c không âm. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n^2(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 1+2n$$

Bài toán 3.5.8. *Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}$$

Bài toán 3.5.9. *Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài toán 3.5.10. *Cho a, b, c không âm. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\frac{5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Ta xét một số bài toán có căn thức.

Bài toán 3.5.11. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+3\sqrt{\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta sẽ chứng minh được:

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}$$

Lại có: $ab+bc+ca \geq a(b+c)$ và $a^2+b^2+c^2 \leq a^2+(b+c)^2$ nên:

$$VT \geq \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+3\sqrt{\frac{3a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}} = x+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2}}$$

Trong đó, $x=\sqrt{a/(b+c)}+\sqrt{(b+c)/a} \geq 2$.
Bây giờ, ta cần chứng minh:

$$x+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Nếu $x \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu $x \leq \frac{7\sqrt{2}}{2}$, ta có:

$$\frac{27}{x^2-2}-\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}-x\right)^2=\frac{(x-2\sqrt{2})^2(19+6\sqrt{2}x-2x^2)}{2(x^2-2)} \geq 0 (\text{do } x \leq \frac{7\sqrt{2}}{2})$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim (3+2\sqrt{2}, 1, 0)$. □

Ta có bài toán tổng quát hơn.

Bài toán 3.5.12. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+k.\sqrt{\frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}} \geq \min_{x\geq 2}\left\{x+\frac{k}{\sqrt{x^2-2}}\right\}$$

Bài toán 3.5.13. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+2\left[\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]^{2/3} \geq 2$$

Bài toán 3.5.14. *Cho* $a, b, c \geq 0$ *và* $k \geq 4$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+k\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} \geq 2\sqrt{k}$$

4 Bài tập áp dụng

Để kết thúc bài viết, tôi xin nêu ra một số bài tập tương tự và áp dụng.

Bài tập 4.1. *Cho* $a, b, c, d > 0$ *thoả mãn* $abcd = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geq 2$$

Bài tập 4.2. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Bài tập 4.3 (IMO 1995)**.** *Cho* $a, b, c > 0$ *thoả mãn* $abc = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài tập 4.4. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{b(b+a)} + \frac{1}{c(c+b)} + \frac{1}{a(a+c)} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

Bài tập 4.5. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 1}$$

Bài tập 4.6. *Cho* $a, b, c > 0$ *thoả mãn* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3+abc}{(b+c)^2} + \frac{b^3+abc}{(c+a)^2} + \frac{c^3+abc}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Bài tập 4.7. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{(bx+cy)^3} + \frac{b}{(cx+ay)^3} + \frac{c}{(ax+by)^3} \geq \frac{9}{(x+y)^3(ab+bc+ca)}$$

Bài tập 4.8 (JBMO, 2003)**.** *Cho* $a, b, c > -1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2$$

Bài tập 4.9. *Cho* a, b, c, k *không âm. Chứng minh rằng:*

$$\left(1+\frac{ka}{b+c}\right)\left(1+\frac{kb}{c+d}\right)\left(1+\frac{kc}{d+a}\right)\left(1+\frac{kd}{a+b}\right) \geq (k+1)^2$$

References

[1] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri Thức, 2006.

[2] Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ, *Bất đẳng thức Suy luận và Khám phá*, NXB ĐHQGHN, 2007.

[3] Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Ngọc Thắng, *Các bài giảng về bất đẳng thức Bunhiacopxki*, NXB ĐHQGHN, 2007.

[4] Titu Andresscu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequality*.

[5] Tạp chí *International Series of Numerical Mathematics*, 1992.

[6] Các tài liệu từ *Internet*.