

Chương 4

Bất đẳng thức dạng thuần nhất bậc

Tính thuần nhất bậc (đồng bậc, thuần nhất) là một tiêu chuẩn đầu tiên phải tính đến khi so sánh các đại lượng. Các bất đẳng thức cổ điển ta đã biết như bất đẳng thức giữa trung các đại lượng trung bình, Cauchy, Hölder, Minkowski, Chebychev, ..., đều là các bất đẳng thức dạng đồng bậc.¹

Trong chương này, chúng ta sẽ đề cập tới các phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức đồng bậc, cũng như cách chuyển từ một bất đẳng thức không đồng bậc về một bất đẳng thức đồng bậc. Nắm vững và vận dụng nhuần nhuyễn các phương pháp này, chúng ta có thể chứng minh được nhiều lớp bất đẳng thức sơ cấp.

4.1 Bất đẳng thức dạng thuần nhất bậc

Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ được là hàm thuần nhất bậc m nếu với mọi số thực t ta có

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

với $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, và $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $n \geq 2$. Số tự nhiên m được gọi là bậc của đa thức đồng bậc.

Bất đẳng thức dạng $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, với f là một hàm thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất (bậc m). Khái niệm bất đẳng thức đồng bậc liên quan chặt chẽ với đa thức đồng bậc. Thí dụ, hai đa thức sau là hai đa thức đồng

¹Đây là một chương trong cuốn sách *Bất đẳng thức, Suy luận & Khám phá* đã xuất bản của tác giả Phạm Văn Thuận, Lê Văn.

bậc đồng bậc

$$g(x) = x^5 + y^5 + 8x^2y^3, \quad f(x) = x^2y + 4yx^2 - 3x^3 + 10y^3.$$

Từng đơn thức trong đa thức thứ nhất có bậc là năm, còn mỗi đơn thức trong đa thức thứ hai có bậc là ba. Cũng cần chú ý rằng đa thức kiểu như $f(x) = (x + 2y)^3 + 101x^2$ không phải là đồng bậc.

4.2 Đồng bậc hoá bất đẳng thức

Với những bất đẳng thức có điều kiện, ta có thể chuyển về dạng bất đẳng thức đồng bậc. Điều kiện cho trước thường là một hệ thức liên hệ giữa các biến số. Từ giả thiết đã cho ta có thể viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng đồng bậc.

Bài toán 4.1. Cho các số thực không âm a, b thoả mãn điều kiện $a + b = 2$, chứng minh dãy bất đẳng thức

$$2 \leq a^2 + b^2 \leq a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4.$$

Chứng minh. Ta lần lượt chứng minh từng bất đẳng thức. Mỗi vế bất đẳng thức hơn kém nhau một bậc; mà ta cũng thấy rằng biểu thức ở điều kiện cho trước có dạng bậc nhất. Sử dụng giả thiết này ta làm cân bằng bậc của các bất đẳng thức.

Trước hết ta chứng minh $2 \leq a^2 + b^2$. Thật vậy, nhân hai vế với hai, và viết nó dưới dạng tương đương $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Dễ dàng quy bất đẳng thức này về dạng $(a - b)^2 \geq 0$.

Đối với bất đẳng thức thứ hai, ta viết lại dưới dạng

$$(a^2 + b^2)(a + b) \leq 2(a^3 + b^3).$$

Bất đẳng thức này tương đương với $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$, hay $(a - b)^2(a + b) \geq 0$. Điều này hiển nhiên đúng với $a, b > 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng làm tương tự. □

Bài toán 4.2. Cho các số thực a, b, c thoả mãn điều kiện

$$a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3} = 3,$$

chứng minh bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}.$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Để bỏ số mũ dạng hữu tỉ, ta đưa ra biến mới như sau. Đặt $a^{1/3} = x$, $b^{1/3} = y$, $c^{1/3} = z$. Khi đó, ta cần chứng minh bất đẳng thức $x^6 + y^6 + z^6 \geq x^4 + y^4 + z^4$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Sử dụng giả thiết ta viết được bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng tương đương là

$$3(x^6 + y^6 + z^6) \geq (x^2 + y^2 + z^2)(x^4 + y^4 + z^4).$$

Nhân khai triển và nhóm các số hạng cho ta

$$(x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2) + (y^2 - z^2)^2(y^2 + z^2) + (z^2 - x^2)^2(z^2 + x^2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. $\square$

4.3 Chuẩn hoá bất đẳng thức

Xét bất đẳng thức đồng bậc dạng

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

trong đó f và g là hai đa thức đồng bậc. Do tính chất của hàm thuần nhất, ta có thể chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về việc chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \lambda$ với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn điều kiện $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda$. Chuẩn hóa một cách thích hợp, ta có thể làm đơn giản các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh, tận dụng được một số tính chất đặc biệt của các hằng số.

Nếu biết quan sát và lựa chọn những điều kiện thích hợp, nghĩa là lúc ấy như có thêm giả thiết, ta sẽ có lời giải gọn gàng, sáng sủa. Trong mục này chúng tôi đưa ra một số cách chọn điều kiện kiểu như vậy.

Bài toán 4.3. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (b+a)^2} + \frac{(a+c-b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(c+b-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Chứng minh. Bậc của cả hai vế là không. Đặt $x = a/(a+b+c)$, $y = b/(a+b+c)$, $z = c/(a+b+c)$, thế thì $x + y + z = 1$. Do đó, ta viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$(4.1) \quad \frac{(1-2z)^2}{z^2 + (1-z)^2} + \frac{(1-2y)^2}{y^2 + (1-y)^2} + \frac{(1-2x)^2}{x^2 + (1-x)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Chú ý rằng

$$\frac{(1-2t)^2}{t^2 + (1-t)^2} = \frac{4t^2 - 4t + 1}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{2(2t^2 - 2t + 1) - 1}{2t^2 - 2t + 1} = 2 - \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}.$$

Từ đó, ta có thể viết lại bất đẳng thức (4.1) dưới dạng

$$\frac{1}{2x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{2y^2 - 2y + 1} + \frac{1}{2z^2 - 2z + 1} \leq \frac{27}{5}$$

Ta cần tìm số δ sao cho với $0 < t < 1$ thì

$$\frac{1}{2t^2 - 2t + 1} \leq \frac{9}{5} + \delta \left(t - \frac{1}{3} \right).$$

Chuyển $\frac{9}{5}$ sang về trái và quy đồng cho ta

$$(4.2) \quad \frac{-18t^2 + 18t - 4}{2t^2 - 2t + 1} - \delta \left(t - \frac{1}{3} \right) \leq 0.$$

Để ý rằng $t - \frac{1}{3}$ là nhân tử chung của vế trái của (4.2) nên ta viết lại bất đẳng thức đó dưới dạng tương đương

$$(4.3) \quad \left(t - \frac{1}{3} \right) \left[\frac{12 - 18t}{2t^2 - 2t + 1} - \delta \right] \leq 0.$$

Bây giờ ta cần tìm δ sao cho biểu thức trong ngoặc thứ hai của (4.3) nhận $t - \frac{1}{3}$ làm nhân tử. Thế thì ta thay $t = \frac{1}{3}$ vào biểu thức $\delta = \frac{12 - 18t}{2t^2 - 2t + 1}$ sẽ thu được $\delta = \frac{54}{5}$. Với giá trị này của δ , ta viết lại (4.3) dưới dạng

$$\left(t - \frac{1}{3} \right) \left[\frac{12 - 18t}{2t^2 - 2t + 1} - \frac{54}{5} \right] \leq 0.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $-(t - \frac{1}{3})^2(18t + \frac{1}{3}) \leq 0$. Điều này hiển nhiên đúng.

Vậy, ta có đánh giá sau đây

$$\frac{1}{2t^2 - 2t + 1} \leq \frac{9}{5} + \frac{54}{5} \left(t - \frac{1}{3} \right).$$

Sử dụng ước lượng này ba lần cho x, y, z ta sẽ có ngay điều phải chứng minh. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Nói chung, những bài bất đẳng thức có một vế là tổng của ba phân thức như trên là rất khó hoặc không thể đánh giá được từng phân thức. Cách chọn trên cho phép ta làm được điều khó khăn này một cách dễ dàng dựa trên tính chất cơ bản về bất đẳng thức, phân số, và tam thức bậc hai.

Tổng quát hơn, ta có thể chứng minh được nhiều bất đẳng thức đối xứng đồng bậc bằng cách đặt $x = ka/(a + b + c)$ và tương tự với y, z ta được $x + y + z = k$, mà không làm mất tính đối xứng của bất đẳng thức ban đầu. Một cách tương

tự, ta có thể giải bài toán sau đây và thiết lập được nhiều bài bất đẳng thức chứa các biểu thức phân thức kiểu như bài toán trong đề thi vô địch Hoa Kỳ năm 2003

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8,$$

với giả thiết a, b, c là các số dương. Ta thấy rằng tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức ở vế trái đều là các đa thức bậc hai. Vì thế vế trái của bất đẳng thức có bậc là không. Không mất tổng quát, ta có thể giả sử rằng $a+b+c=1$. Và từ đó tiếp tục như trên.

Ta xét thêm một bất đẳng thức khác có dạng “tương tự” như trên, ấy là chứng minh rằng

$$\frac{(4a+b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(4b+c-a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(4c+a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq 8.$$

Nhưng thật đáng tiếc rằng kỹ thuật trên đây lại không có tác dụng với bài toán này. Điều đó là do ta không thể cô lập hay đưa mỗi phân thức về dạng một biến số thông qua điều kiện tổng ba số bằng k . Đây cũng là ý tưởng cơ sở quan trọng của cách làm này.

Bài toán 4.4. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} - \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \right) \geq 4.$$

Chứng minh. Bài này là tổng của ba bất đẳng thức ngược chiều nhau. Biểu thức thứ nhất trong ngoặc đạt giá trị nhỏ nhất; còn hai biểu thức kia đạt giá trị lớn nhất. Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $\omega = a^2 + b^2 + c^2$, chọn $\omega = 3$, và sử dụng các hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca), \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \end{aligned}$$

Do đó, ta viết vế trái bất đẳng thức dưới dạng

$$F = \frac{5}{2} + \frac{2\lambda}{3} + \frac{1}{2}\eta(3-\lambda) - \frac{3}{2\lambda},$$

trong đó $\lambda = ab+bc+ca$, và $\eta = 1/(ab) + 1/(bc) + 1/(ca)$, ta đã biết rằng $\lambda \leq 3$, mặt khác sử dụng bất đẳng thức quen biết $\eta \geq 9/\lambda$,

$$\begin{aligned} F &\geq \frac{5}{2} + \frac{2\lambda}{3} + \frac{9}{2\lambda}(3-\lambda) - \frac{3}{2\lambda} \\ &= -2 + \frac{2\lambda}{3} + \frac{12}{\lambda}. \end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh $F \geq 4$, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\lambda/3 + 6/\lambda \geq 3$. Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân sau khi đã tách số hạng sau để có dấu đẳng thức, ta có

$$\frac{\lambda}{3} + \frac{3}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} \geq \left(\frac{\lambda}{3} \cdot \frac{3}{\lambda} \cdot \frac{3}{\lambda} \right)^{1/3} = \left(\frac{3}{\lambda} \right)^{1/3} \geq 1.$$

Phép chứng minh đã hoàn tất. $\square$

Bằng cách đặt tương tự, ta có thể thiết lập các biểu thức đối xứng cùng bậc rồi chọn một điều kiện nào đó, ước lượng các giá trị khi các biến số bằng nhau, ta có thể xây dựng được các bất đẳng thức mới.

Bài toán 4.5. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thì

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 27abc + 10(a^2+b^2+c^2)^{3/2}.$$

Chứng minh. Rõ ràng hai vế của bất đẳng thức này đều có dạng bậc ba. Nhưng nếu tiếp tục lựa chọn như thí dụ trên sẽ không hiệu quả nữa bởi biểu thức $a^2+b^2+c^2$ có số mũ dạng hữu tỷ. Nếu cả ba số bằng không thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu có một số khác không, ta đặt $\omega = a^2+b^2+c^2$, và giả sử $|a| \leq |b| \leq |c|$, chọn $\omega = 9$ để tránh dạng số vô tỷ. Thế thì bất đẳng thức trên có dạng $2(a+b+c) - abc \leq 10$. $\square$

Sau đây là một thí dụ cho thấy rằng phép chọn điều kiện thích hợp có thể cho ta lời giải ngắn gọn, độc đáo.

Bài toán 4.6. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}.$$

Chứng minh. Chọn $ab+bc+ca = 3$, thành thử là bây giờ ta chỉ cần chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

Nhưng chú ý rằng $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng $3(a+b+c) - abc \geq 8$. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có $-abc \geq -1$, và $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Có hai câu hỏi cần đặt ra sau lời giải này là tại sao lại chọn số 3, và chọn như thế có lợi ích gì. Cái tưởng chừng như khó nhất của bài toán là sự có mặt của hai căn thức khác nhau đã được vượt qua dễ dàng.

Bài toán 4.7. Cho các số thực dương x, y, z và đặt $x+y+z = p$, $xy+yz+zx = q$, và $xyz = r$. Giả sử $p = 1$, hãy biểu diễn các biểu thức $x^2+y^2+z^2$, theo p, q , và biểu diễn $x^3+y^3+z^3$, $x^4+y^4+z^4$ theo p, q, r .

Từ kết quả của bài toán trên đây, người ta có thể áp đặt điều kiện để xây dựng các bất đẳng thức đối xứng ba biến có điều kiện. Với một bài toán bất đẳng thức đồng bậc ba biến, ta có thể lựa chọn tùy ý một (chỉ một thôi) trong ba điều kiện $p = 1, q = 1, r = 1$.

Bài toán 4.8. Xét ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn

$$a + b + c = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c+a^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Lời giải sau đây của Võ Quốc Bá Cẩn. Giả sử L là vế trái của bất đẳng thức. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$L^2 \leq (a+b+c) \left(\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \right) = \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{9}{4}.$$

Bất đẳng thức này lại có thể viết dưới dạng tương đương

$$\frac{a^2}{b+a^2} + \frac{b^2}{c+b^2} + \frac{c^2}{a+c^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Viết bất đẳng thức này dưới dạng đồng bậc. Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz dạng Engel, rồi cuối cùng quy về việc chứng minh

$$a^4 + b^4 + c^4 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(ab^3 + bc^3 + ca^3) + 3abc(a+b+c).$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

Và thế nên ta cần chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(ab^3 + bc^3 + ca^3).$$

Bất đẳng thức này lại viết được về dạng

$$\sum_{\text{cyclic}} (a^2 - c^2 - 2ab + bc + ca)^2 \geq 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Phần này làm bất đẳng thức đồng bậc trở nên không đồng bậc bằng cách lựa chọn được những điều kiện thích hợp; có lợi cho biến đổi và tính toán.

Bài toán 4.9. Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 1$, chứng minh bất đẳng thức

$$9(a^3 + b^3 + c^3) - 10(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1.$$

Bài toán 4.10. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \right) \leq 2.$$

4.4 Lớp hàm đối xứng sơ cấp ba biến

Tất cả các bất đẳng thức đối xứng ba biến số đều có thể quy về các hàm đối xứng cơ bản của $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, và $r = xyz$. Trong tiết này ta sẽ lần lượt xét các bài toán bất đẳng thức, từ dễ đến khó, có thể giải theo đường lối này. Sau khi đã viết bất đẳng thức cần chứng minh theo p, q, r , ta chỉ cần khảo sát bất đẳng thức này theo ba biến mới p, q, r . Điểm mạnh nhất của phương pháp này là xử lý được những bất đẳng thức đối xứng ba biến, chặt và khó, vì ta không thực hiện nhiều phép ước lượng trung gian thô và điều đó cũng có nghĩa là ta phải làm việc với nhiều bước tính toán nhất là trong bài toán dạng phân thức, hoặc bậc cao. Trước tiên, bạn đọc hãy tự kiểm tra các kết quả cơ bản sau đây.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= p^2 - 2q, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= p(p^2 - 3q) + 3r, \\ x^4 + y^4 + z^4 &= (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr). \end{aligned}$$

Một vấn đề nữa cần đặt ra là thứ tự so sánh giữa các bộ p, q, r như thế nào. Một nguyên tắc là phải đảm bảo được tính đồng bậc.

Với ba số a, b, c là nghiệm của một phương trình bậc ba $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ thì ta có thể viết $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Khai triển đa thức ta được

$$(x^2 - xb - xa + ab)(x - c) = x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ca) - abc.$$

Bây giờ sử dụng đồng nhất thức ta được

$$\begin{cases} a+b+c = -p, \\ ab+bc+ca = q, \\ abc = -r. \end{cases}$$

Dựa vào đặc điểm trên đây, ta có thể phát biểu nhiều bài toán bất đẳng thức với giả thiết liên quan đến nghiệm của một phương trình bậc ba. Trước hết, ta hãy quan sát các bất đẳng thức liên quan đến p, q, r . Đó là bất đẳng thức Schur.

Định lý 4.1 (I. Schur). Nếu x, y, z là các số thực dương và t là một số thực, thì

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-y)(z-x) \geq 0.$$

Chứng minh. Vì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng đối xứng nên ta có thể giả sử rằng $x \geq y \geq z$. Viết lại bất đẳng thức đã cho bằng cách nhóm nhân tử chung, ta được

$$(x-y)\{x^t(x-z) - y^t(y-z)\} + z^t(x-z)(y-z) \geq 0.$$

Dễ thấy rằng bất đẳng thức này đúng. $\square$

Có một số trường hợp riêng của bất đẳng thức này rất đáng chú ý là trường hợp $t = 1, 2, 3$. Lấy các giá trị này của t và khai triển đa thức ta sẽ thu được các trường hợp lý thú và hữu ích.

Bài toán 4.11. Cho các số thực dương x, y, z . Đặt $x + y + z = p$, $xy + yz + zx = q$ và $xyz = r$, chứng minh các bất đẳng thức

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0, \quad p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0, \quad pq - 9r \geq 0.$$

Chứng minh. Ba bất đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$(4.4) \quad x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0,$$

$$(4.5) \quad x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-z)(y-x) + z^2(z-x)(z-y) \geq 0,$$

$$(4.6) \quad x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0.$$

Dễ thấy hai bất đẳng thức ba đầu là trường hợp $t = 1$, và $t = 2$ của bất đẳng thức Schur. Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên. $\square$

Bài toán 4.12. Cho các số thực dương x, y, z . Đặt $x + y + z = p$, $xy + yz + zx = q$ và $xyz = r$, chứng minh các bất đẳng thức

$$\begin{array}{lll} p^2 \geq 3q & p^3 \geq 27r & q^2 \geq 3pr \\ 2p^3 + 9r \geq 7pq & p^2q + 3pr \geq 4q^2 & p^2q \geq 3pr + 4p^2q \\ p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q & pq^2 + 3q^2 \geq 4p^2q & pq^2 \geq 2p^2r + 3qr \\ 2p^3 + 9r^2 \geq 7pqr & q^3 + 9r^2 \geq 4pqr & p^3q + q^3 \geq 6pqr \end{array}$$

Từ các kết quả cơ bản trên ta có thể phát biểu bài toán dưới dạng nghiệm của một phương trình bậc ba. Chẳng hạn, ta xét bài toán sau đây.

Bài toán 4.13. Xét ba số thực a, b, c sao cho đa thức $x^3 + ax^2 + bx + c$ có ba nghiệm. Chứng minh rằng

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}.$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 4.14. Chứng minh rằng nếu $x, y, z > 0$ thì

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

Chứng minh. Lời giải của Hojoo Lee. Sử dụng phép thay thế p, q, r như trên. Chú ý tính chất $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz = pq - r$. Ta có thể chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về dạng sau theo p, q, r

$$q \left(\frac{(p^2 + q)^2 - 4p(pq - r)}{(pq - r)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

Biến đổi tương đương và tính toán cho ta

$$4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 \geq 0$$

$$pq(p^3 - 4pqr + 9r) + q(p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr) + r(pq - 9r) \geq 0$$

Dễ thấy rằng bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bài toán trên. $\square$

Bài toán 4.15. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$, chứng minh rằng

$$(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z).$$

Chứng minh. Đây là bất đẳng thức đối xứng, vai trò giữa các biến hoàn toàn bình đẳng. Theo cách đặt trên, ta có $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, và $r = xyz$. Thế thì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$3 - 2(p^2 - 2q) + (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr) \leq 1 + p + q + r.$$

Chú ý rằng $p = 1$ nên bất đẳng thức trên lại có dạng

$$3 - 2(1 - 2q) + (1 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2r) \leq 1 + p + q + r,$$

hay

$$2q^2 - q + 3r \leq 0.$$

Vì $pq \geq 9r$ nên $q \geq 9r$. Do đó, phép chứng minh hoàn tất nếu ta có $2q^2 - q + \frac{1}{3}q \leq 0$, điều này tương đương với $2q^2 - \frac{2}{3}q \leq 0$. Dễ thấy bất đẳng thức này đúng với $0 \leq q \leq 1/3$. Điều này đúng vì ta có $p^2 \geq 3q$. $\square$

Bài toán 4.16. Xét ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1.$$

Chứng minh. Ta chú ý đến các đẳng thức sau đây

$$\begin{aligned}(1+x)^2(1+y)^2 + (1+y)^2(1+z)^2 + (1+z)^2(1+x)^2 \\ = 2p^2 + q^2 + 2pq + 2p - 3 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = 1 + p + q + r.\end{aligned}$$

Thế thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2p^2 + q^2 + 2pq + 2p - 3 + 2(p + q + 2) \geq (p + q + 2)^2,$$

hay là $p^2 \geq 2q + 3$. Vì $p^2 \geq 3q$, $3q \geq 2q + 3$ nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 4.17. Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$1 \geq (1 - ab)(1 - bc)(1 - ca) \geq \frac{8}{27}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức bên trái hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Đặt

$$p = a + b + c, \quad q = ab + bc + ca, \quad r = abc.$$

Thế thì bất đẳng thức cần chứng minh sẽ có dạng

$$(4.7) \quad 1 - q + pr - r^2 \geq \frac{8}{27}.$$

Theo bất đẳng thức I. Schur, $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, và chú ý rằng nhờ giả thiết ta có $4q - p^2 = 2q - 1$. Do đó ta có quan hệ

$$9r \geq p(2q - 1).$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì $p \geq 9r$, hay là

$$(4.8) \quad p - r \geq \frac{8}{9}p.$$

Suy ra

$$(4.9) \quad r(p - r) \geq \frac{8}{81}p^2(2q - 1).$$

Lại vì $p^2 = 1 + 2q$ nên bất đẳng thức (4.9) có sẽ có dạng

$$r(p - r) \geq \frac{8}{81}(4q^2 - 1).$$

Do đó, để chứng minh (4.7) ta chỉ cần chứng minh

$$1 - q + \frac{8}{81}(4q^2 - 1) \geq \frac{8}{27}.$$

Để dàng rút gọn và chuyển bất đẳng thức này về dạng tương đương

$$(1 - q)(49 - 32q) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $0 \leq q \leq 1$. Phép chứng minh hoàn tất. ² $\square$

Bài toán 4.18. Xét ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1 - xy} + \frac{1}{1 - yz} + \frac{1}{1 - zx} \leq \frac{27}{8}.$$

Chứng minh. Ta đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$. Sử dụng các đồng nhất thức

$$\begin{aligned} (1 - xy)(1 - yz)(1 - zx) &= 1 - q + pr - r^2 \\ (1 - xy)(1 - yz) + (1 - yz)(1 - zx) + (1 - zx)(1 - xy) &= 3 - 2q + pr. \end{aligned}$$

Thành thử, bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{3 - 2q + pr}{1 - q + pr - r^2} \leq \frac{27}{8}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $3 - 11q + 19r - 27r^2 \geq 0$. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì $27r^2 \leq pr$, mà $p = 1$, nên ta sẽ chỉ cần chứng minh rằng

$$3 - 11q + 19r - r \geq 0.$$

Bất đẳng thức này nếu viết dưới dạng của x, y, z thì

$$3 - 11(xy + yz + zx) + 18xyz \geq 0.$$

Không mất tổng quát ta giả sử $z = \min\{x, y, z\}$ thế thì $z \leq 1/3$ và theo bất đẳng thức AG, ta có đánh giá

$$xy(18z - 11) - 11z(x + y) \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2(18z - 11) - 11z(1 - z).$$

Tiếp theo cần chỉ ra rằng

$$\left(\frac{1 - z}{2}\right)^2(18z - 11) - 11z(1 - z) \geq -3.$$

Nhưng bất đẳng thức này tương đương với $(3z - 1)^2(2z + 1) \geq 0$. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

²Ta có thể sử dụng bài toán trên để chứng minh bài toán ??.

Bài toán 4.19. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2.$$

Chứng minh rằng

$$(1) \frac{1}{8a^2+1} + \frac{1}{8b^2+1} + \frac{1}{8c^2+1} \geq 1,$$

$$(2) \frac{1}{8ab+1} + \frac{1}{8bc+1} + \frac{1}{8ca+1} \geq 1,$$

$$(3) \frac{1}{4ab+1} + \frac{1}{4bc+1} + \frac{1}{4ca+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Với bài toán này, việc áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy không đem lại kết quả gì. Ta giải bằng cách xét các biểu thức đối xứng ba biến số thông qua cách đặt

$$p = a + b + c, \quad q = ab + bc + ca, \quad r = abc.$$

Khi đó, quan hệ giữa a, b, c trong đẳng thức giả thiết cho ta

$$\frac{3+2p+q}{1+p+q+r} = 2.$$

Thành thử, $q + 2r = 1$.

(1) Bất đẳng thức thứ nhất, biểu diễn qua p, q, r , có dạng

$$8(p^2 - 2q) + 2 \geq 512r^2,$$

trong đó ta đã sử dụng các phép biến đổi

$$\begin{aligned} & (8a^2+1)(8b^2+1) + (8b^2+1)(8c^2+1) + (8c^2+1)(8a^2+1) \\ & \quad = 64(q^2 - 2pr) + 16(p^2 - 2q) + 3, \\ & (8a^2+1)(8b^2+1)(8c^2+1) = 512r^2 + 64(q^2 - 2pr) + 8(p^2 - 2q) + 1. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AG, ta có $q \geq 3r^{2/3}$, thành thử $q^3 \geq 27r^2$. Vì $q = 1 - 2r$ nên bất đẳng thức này tương đương với $8r^3 + 15r^2 + 6r - 1 \leq 0$, hay là

$$(8r - 1)(r^2 + 2r + 1) \leq 0.$$

Từ đó $r \leq 1/8$.

Mặt khác từ giả thiết bài toán, ta có thể chứng minh được rằng $p \geq 3/2$. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$8(p^2 - 2q) + 2 \geq \frac{8}{3}p^2 + 2 \geq \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 8.$$

Hơn nữa vì $r \leq 1/8$ nên $8 \geq 512r^2$. Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

(2) Phần tiếp theo ta cũng làm tương tự. Sử dụng các đồng nhất thức

$$\begin{aligned}(8ab + 1)(8bc + 1) + (8bc + 1)(8ca + 1) + (8ca + 1)(8ab + 1) &= 64pr + 16q + 3 \\ (8ab + 1)(8bc + 1)(8ca + 1) &= 512r^2 + 64pr + 8q + 1.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $8q + 2 \geq 512r^2$, vì $q + 2r = 1$ nên bất đẳng thức trên đây tương đương với $512r^2 + 16r - 10 \leq 0$, hay $(8r - 1)(64r + 10) \leq 0$. Bất đẳng thức này đúng với $r \leq 1/8$. $\square$

Bài toán 4.20. Xét các số thực không âm a, b, c , chứng minh bất đẳng thức

$$(8a^2 + bc)(8b^2 + ca)(8c^2 + ab) \leq (a + b + c)^6.$$

Hỏi đẳng thức đạt được khi nào?

Chứng minh. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Vì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng đồng bậc nên ta có thể chọn $p = 1$. Khi đó, ta viết bất đẳng thức trên dưới dạng sau

$$(4.10) \quad 513(abc)^2 + 64(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + 8abc(a^3 + b^3 + c^3) \leq 1.$$

Chú ý các đồng nhất thức sau

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= p(p^2 - 3q) + 3r, \\ a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 &= q(q^2 - 3qr) + 3r^2.\end{aligned}$$

Thành thử, ta có thể viết (4.10) dưới dạng (theo p, q, r)

$$729r^2 + 64q(q^2 - 3r) + 8r(1 - 3q) \leq 1,$$

hay là

$$64q(q^2 - 3r) + 8r(1 - 3q) \leq (1 - 27r)(1 + 27r).$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có $pq \geq 9r$. Mặt khác, $p = 1$, do đó $1 - 3q \leq 1 - 27r$. Thành ra, $8r(1 - 3q) \leq 8r(1 - 27r)$. Do đó, bây giờ ta chỉ cần chứng minh rằng

$$(4.11) \quad 64q(q^2 - 3r) \leq (1 - 27r)(1 + 19r).$$

Ta sẽ chứng minh

$$(4.12) \quad 1 - 27r \geq 16(q^2 - 3r),$$

hay

$$1 + 21r \geq 16q^2.$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$. Cho nên, với $p = 1$, ta sẽ thu được $1 + 9r \geq 4q$. Suy ra

$$1 + 21r \geq 1 + \frac{7}{3}(4q - 1).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng

$$1 + \frac{7}{3}(4q - 1) \geq 16q^2, \text{ khi } q \geq \frac{1}{4}.$$

Bất đẳng thức này lại tương đương với

$$(3q - 1)(4q - 1) \leq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{1}{3}$. Còn nếu $q \leq \frac{1}{4}$ thì $1 \geq 16r^2$, suy ra $1 - 27r \geq 16(q^2 - 3r)$.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $1 - 27r \geq 16(q^2 - 3r)$. Bây giờ, để chứng minh (4.11), ta sẽ chứng minh $16(1 + 19r) \geq 64q$. Bất đẳng thức này lại tương đương với $19r + 1 \geq 4q$. Điều này đúng theo bất đẳng thức Schur.

Đẳng thức đạt được khi (a, b, c) tỉ lệ với bộ số $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ hoặc $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hoặc hoán vị của nó. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Trong lời giải trên, trường hợp $q \leq \frac{1}{4}$ thì không có gì đặc biệt. Trường hợp $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$, ta có đánh giá $1 - 27r \geq 16(q^2 - 3r)$. Đánh giá này chỉ tốt khi q ở tại lân cận của $\frac{1}{4}$.

Bài toán 4.21. Xét ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn

$$x + y + z = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{z - xy}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y - zx}{x^2 + xz + z^2} + \frac{x - yz}{y^2 + yz + z^2} \geq 2.$$

Chứng minh. Đặt $x + y + z = p$, $q = xy + yz + zx$, và $r = xyz$. Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= (x + y)^2 - xy = (1 - z)^2 - xy = 1 - z - z(1 - z) - xy \\ &= 1 - z - q. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$y^2 + yz + z^2 = 1 - x - q, \quad z^2 + zx + x^2 = 1 - y - q.$$

Cũng chú ý rằng

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = q^2 - 2r, \quad x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = q - 3r.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với mỗi bất đẳng thức

$$(1-q)^2(1-q) - (1-q)(q+3r) - q^2 + 5r^2 \geq 2[(1-q)q^2 - r]$$

$$q^3 + q^2 - 4q + 3qr + 4r + 1 \geq 0,$$

hay là

$$(4.13) \quad 27q^3 + 27q^2 - 108q + 27r(3q+4) + 27 \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có $9r \geq 4q - 1$. Do đó, để chứng minh bất đẳng thức (4.13) ta chứng minh

$$27q^3 + 27q^2 - 108q + 3(4q-1)(3q+4) + 27 \geq 0.$$

Đặt $3q = t$ thì bất đẳng thức trên có dạng

$$(t-1)(t^2+8t-15) \leq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $t \leq 1$. Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức đạt được khi $x = y = z = 1/3$. $\square$

Sau đây chúng tôi đưa ra một bất đẳng thức rất thú vị của Vasile Cirtoaje đã đăng trên tạp chí toán học sơ cấp *Mathematical Reflections*. Các lời giải đã biết cho đến nay đều dùng công cụ đạo hàm, bất đẳng thức Karamata, hoặc định lý nửa lời.

Bài toán 4.22. Xét ba số thực không âm x, y, z , chứng minh rằng

$$x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \leq \frac{1}{12}(x+y+z)^5.$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Điều thú vị của bất đẳng thức này là dấu đẳng thức đạt được tại ba số khác nhau đôi một. Cũng theo cách đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, và $r = xyz$. Vì bất đẳng thức đồng bậc nên ta có thể chọn $p = 1$. Ta viết

$$\begin{aligned} x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) &= x^3(xy+xz) + y^3(yz+yx) + z^3(zx+zy) \\ &= (x^3 + y^3 + z^3)q - r(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Lại chú ý thêm rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 - 3q + 3r.$$

Về trái của bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết dưới dạng p, q, r

$$(1-3q)q + 5rq - r.$$

Nếu $q \leq \frac{1}{5}$ thì ta có $5qr - r \leq 0$ và ta đánh giá được rằng

$$(1 - 3q)q = \frac{1}{3}(1 - 3q)3q \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 3q + 3q}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nếu $q > \frac{1}{5}$ ta phải chứng minh

$$f(q) = (1 - 3q)q + 5rq - r \leq \frac{1}{12}.$$

Tính đạo hàm ta có

$$f'(q) = 1 - 6q + 5r.$$

Vì $q \geq 9r$ và do $q > \frac{1}{5}$ nên $f'(q) < 0$. Vậy $f(q)$ nghịch biến, suy ra $f(q) < f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{25} < \frac{1}{12}$. Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức đạt được khi $z = 0$, $x + y = 1$, $xy = \frac{1}{6}$. Giải hệ này cho ta

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right), \quad (x, y, z) = \left(0, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right).$$

Vậy, đẳng thức đạt được khi x, y, z là một hoán vị tùy ý của bộ số (x, y, z) vừa tìm được. $\square$

Bài toán 4.23. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2}.$$

Chứng minh. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Chọn $p = 1$, chú ý rằng

$$a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab = (1 - c)^2 - ab = 1 - c - q.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh sẽ được viết dưới dạng

$$\sum_{\text{cyclic}} (1 - a - q)(1 - b - q) \geq 9(1 - a - q)(1 - b - q)(1 - c - q).$$

Nhân phá ngoặc, và để dễ tính toán ta đặt $m = 1 - q$, ta sẽ được

$$3m^2 - 3m - 5 \geq 9m^3 - 9m^2 + 9mq - 9r.$$

Bất đẳng thức này lại viết được dưới dạng

$$9q^3 + 6q^2 - 3q + 9r + 1 \geq 0,$$

tức là

$$q(3q + 1)^2 + 9r + 1 - 4q \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì theo bất đẳng thức Schur, ta có $9r + 1 \geq 4q$. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.24. Xét ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$ab + bc + ca = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b+c} \geq 2.$$

Chứng minh. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Giả thiết cho ta $q = 1$, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết theo p, q, r như sau

$$\frac{1+p^2}{p-r} - \frac{1}{p} \geq 2.$$

Bất đẳng thức này có thể viết dưới dạng $f(p) = p^3 - 2p^2 + r(1+2p) \geq 0$. Nếu $p \geq 2$ thì bất đẳng thức $f(p) \geq 0$ hiển nhiên đúng. Bây giờ ta chỉ cần xét $\sqrt{3} \leq p \leq 2$.

Theo bất đẳng thức I. Schur, ta có $r \geq \frac{4p-p^3}{9}$. Do đó,

$$f(p) \geq p^3 - 2p^2 + \frac{4p-p^3}{9}(1+2p).$$

Về phải bất đẳng thức trên lại viết được dưới dạng $-2p(p-2)(p-1)^2 \geq 0$. Điều này đúng với $\sqrt{3} \leq p \leq 2$. Từ đó suy ra $f(p) \geq 0$. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.25. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$, chứng minh rằng

$$1 \leq \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \leq \frac{9}{8}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức bên trái là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Ta đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, và $r = xyz$. Chú ý các đẳng thức sau đây

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= p^2 - 2q, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= p(p^2 - 3q) + 3r. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh sẽ có dạng (theo p, q, r)

$$p - (p^2 - 2q) + p(p^2 - 3q) + 3r + r(p^2 - 2q) \leq \frac{9}{8}(1 - q - pr - r^2).$$

Vì $p = 1$ nên bất đẳng thức trên lại thu gọn được về dạng

$$9r^2 + 8r - 16qr - 24q + 15r + 25q \leq 1,$$

hay là

$$9r^2 + 23r + q - 16qr \leq 1.$$

Xét hàm số

$$f(r) = 9r^2 + r(23 - 16q) + q,$$

trên miền $(0, q^2/3]$. Tính đạo hàm, ta có $f'(r) = 18r + 23 - 16q$. Dễ thấy hàm $f(r)$ đồng biến, suy ra $f(r) \leq f(q^2/3)$. Lại chú ý rằng

$$f(q^2/3) = q^4 - \frac{16}{3}q^3 + \frac{23}{3}q^2 + q.$$

Bất đẳng thức $f(q^2/3) \leq 1$ tương đương với

$$(3q - 1)(q^3 - 5q^2 + 6q + 3) \leq 0,$$

hay là

$$(3q - 1)(q(q - 2)(q - 3) + 3) \leq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bất đẳng thức sau đây có dấu đẳng thức tại một giá trị biên. Thế nhưng phương pháp biểu diễn qua hàm đối xứng sơ cấp vẫn có tác dụng.

Bài toán 4.26. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$\frac{ab + 4bc + ca}{a^2 + bc} + \frac{bc + 4ca + ab}{b^2 + ca} + \frac{ca + 4ab + bc}{c^2 + ab} \geq 6.$$

Chứng minh. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Chọn $p = 1$, ta chú ý rằng

$$a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3) + abc(a + b + c) = q(1 - 2q).$$

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết được dưới dạng

$$7qr - 12r^2 \geq 4q^3 - q^2.$$

Theo bất đẳng thức Schur, thì $9r \geq 4q - 1$. Vì $1/3 \geq q \geq 0$ nên $\frac{1}{3} \cdot 9rq \geq q^2(4q - 1)$, hay là

$$(4.14) \quad 3rq \geq 4q^3 - q^2.$$

Mặt khác, $q \geq 9r$, suy ra

$$(4.15) \quad 4rq \geq 36r^2 \geq 12r^2.$$

Từ (4.14) và (4.15) ta suy ra

$$7rq - 12r^2 \geq 4q^3 - q^2.$$

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.27. Xét ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$, chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq 12(x^3 + y^3 + z^3)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, và $r = xyz$. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết dưới dạng

$$(4.16) \quad q \geq 12(1 - 3q + 3r)(q^2 - 2r).$$

Nếu $q \geq \frac{1}{4}$, do $0 \leq r \leq q/9$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$(4.17) \quad q \geq 12\left(1 - 3q + \frac{q}{3}\right)q^2.$$

Thật vậy, bất đẳng thức (4.17) tương đương với $1 \geq 4q(3 - 8q)$.

Xét hàm $f(q) = 12q - 32q^2$. Để chứng minh được $f(q)$ là hàm nghịch biến, suy ra

$$f(q) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = 1.$$

Nếu $0 \leq q \leq \frac{1}{4}$, ta có bất đẳng thức (4.16) tương đương với

$$q \geq 12q^2(1 - 3q) + 12r(3q^2 + 6q - 2) - 72r^2.$$

Bất đẳng thức này đúng bởi vì

$$12q(1 - 3q) = 4.3q(1 - 3q) \leq [3q + (1 - 3q)]^2 = 1.$$

Suy ra $12q^2(1 - 3q) \leq q$ và $0 \leq q \leq \frac{1}{4}$ nên $3q^2 + 6q - 2 < 0$. Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra tại ba điểm có tọa độ khác nhau. Bạn đọc tự kiểm tra điều này. $\square$

Bài toán 4.28. Tìm số a nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi x, y, z không âm

$$\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^a \left(\frac{xy + yz + zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}} \geq \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{8}.$$

Chứng minh. Lời giải sau đây của tác giả cộng tác Võ Quốc Bá Cẩn. Giả sử $a = \lambda$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, cho $x = y = 1$ và $z \rightarrow 0$, ta có

$$\lambda = \frac{3 \ln 3 - 4 \ln 2}{2 \ln 2 - \ln 3}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với giá trị a vừa tìm được. Đặt $p = x + y + z$, $xy + yz + zx = q$, và $xyz = r$, chọn $p = 1$ thì ta có $\frac{1}{3} \geq q \geq 9r$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$f =: r + \frac{8q^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3^{\frac{3+\lambda}{2}}} - q \geq 0.$$

Ta xét hai trường hợp.

Nếu $1 \geq 4q \geq 0$ thì

$$f \geq \frac{8q^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3^{\frac{3+\lambda}{2}}} - q = q^{\frac{3-\lambda}{2}} \left(\frac{8}{3^{\frac{3+\lambda}{2}}} - q^{\frac{\lambda-1}{2}} \right) \geq q^{\frac{3-\lambda}{2}} \left(t \left(\frac{8}{3^{\frac{3+\lambda}{2}}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{\lambda-1}{2}} \right) \right) = 0.$$

Nếu $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$, thì áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có $r \geq \frac{4q-1}{9}$, vì vậy

$$f \geq \frac{4q-1}{9} + \frac{8q^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3^{\frac{3+\lambda}{2}}} - q = \frac{8q^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3^{\frac{3+\lambda}{2}}} - \frac{5q+1}{9}.$$

Đặt

$$f(q) := \frac{8q^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3^{\frac{3+\lambda}{2}}} - \frac{5q+1}{9}.$$

Tính đạo hàm

$$f'(q) = \frac{4(3-\lambda)}{q^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot 3^{\frac{\lambda+3}{2}}} - \frac{5}{9}.$$

Dễ kiểm tra được là $f'(q)$ là hàm giảm, nhưng $f'(\frac{1}{3}) < 0$ và $f'(\frac{1}{4}) > 0$, thế thì tồn tại duy nhất $q_0 \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ của phương trình $f'(q) = 0$. Thành thử, ta có

$$f(q) \geq \min \left\{ f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Lại có $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{3}) = 0$. Do đó $f(q) \geq 0$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của a là

$$a_{\min} = \frac{3 \ln 3 - 4 \ln 2}{2 \ln 2 - \ln 3}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.29. Xét ba số thực không âm x, y, z , thỏa mãn $x + y + z = 1$, chứng minh rằng

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \leq \frac{1}{32}.$$

Chứng minh. Đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, và $r = xyz$. Chú ý biến đổi sau

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (1 - z)^2 - 2xy = 1 - z - z(1 - z) - 2xy \\&= 1 - z - xy - q.\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $y^2 + z^2 = 1 - x - yz - q$, $z^2 + x^2 = 1 - y - zx - q$. Từ đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết dưới dạng

$$(1 - q - x - yz)(1 - q - y - zx)(1 - q - z - xy) \leq \frac{1}{32}.$$

Sử dụng các đẳng thức

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = q - 3r, \quad (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = q^2 - 2r,$$

ta viết bất đẳng thức trên dưới dạng

$$(1 - q)^3 - (1 - q)^2(1 + q) + 2(1 - q)(q - r) - q^2 - r^2 + 2qr \leq \frac{1}{32}.$$

Khai triển và biến đổi tương đương cho ta bất đẳng thức

$$q^2 - 2q^3 - r(2 + r - 4q) \leq \frac{1}{32}.$$

Nếu $q \leq \frac{1}{4}$ thì dễ có $q^2 - 2q^3 \leq \frac{1}{32}$. Từ đó có điều phải chứng minh.

Nếu $q > \frac{1}{4}$, sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có $r \geq \frac{4q-1}{9}$, xét hàm

$$f(r) = q^2 - 2q^3 - r(2 + r - 4q), \quad \text{trên } (0, q/9].$$

Tính đạo hàm, $f'(r) = 4q - 2 - 2r$. Dễ thấy $f'(r) < 0$ vì $q \leq \frac{1}{3}$. Suy ra hàm $f(r)$ nghịch biến, từ đó

$$f(r) \leq f\left(\frac{4q-1}{9}\right) = q^2 - 2q^3 - \frac{1}{81}(4q-1)(17-32q).$$

Xét hàm $h(q) = 81(q^2 - 2q^3) + (32q - 17)(4q - 1)$. Tính đạo hàm $h'(q) = -486q^2 + 418q - 100$. Dễ thấy $h'(q) < 0$, do đó $h(q) < h(\frac{1}{4}) = \frac{81}{32}$. Suy ra

$$f(r) \leq f\left(\frac{4q-1}{9}\right) \leq \frac{1}{32}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Bất đẳng thức quan trọng nhất trong mục vừa rồi là bất đẳng thức Schur. Nó cho ta một liên hệ chặt giữa các biến mới p, q, r . Trong những trường hợp khó nhất, công cụ đạo hàm có thể giải quyết trọn vẹn bài toán.

Bài toán 4.30. Xét ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{9}{4} \leq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leq \frac{27}{4(x+y+z)^2}.$$

Bài toán 4.31. Xét ba số thực không âm x, y, z , chứng minh rằng

$$(x+y+z)^5 \geq \left(\frac{9}{4\sqrt{6}-9}\right)(x^3+y^3+z^3)(xy+yz+zx).$$

Bài toán 4.32. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài cạnh của một tam giác thì

$$\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{(b-c)^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{(c-a)^2}{c^2+ca+a^2} \leq 2.$$

Bài toán 4.33. Chứng minh rằng nếu $x, y, z \geq 0$ thì

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + 2 \left[\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \right]^{2/3} \geq 2.$$

Bài toán 4.34. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz \geq 6.$$

4.5 Tính chất hàm bậc ba và đa thức đối xứng

Bất đẳng thức Schur đã cho ta một quan hệ giữa ba đại lượng p, q , và r . Bây giờ ta xét đến một quan hệ mới của chúng. Xét ba số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$, ta đã biết kết quả cơ bản là $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$. Đặt $ab+bc+ca = \frac{1-t^2}{3}$, $t \geq 0$, ta đã tìm được giá trị lớn nhất của $r = abc$ theo t . Nếu $t=0$ thì $a=b=c=\frac{1}{3}$ nên $r = \frac{1}{27}$. Nếu $t \neq 0$, và trong ba số a, b, c có nhiều nhất là hai số bằng nhau, ta xét hàm

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - x^2 + \frac{1-t^2}{3}x - abc.$$

Tính đạo hàm

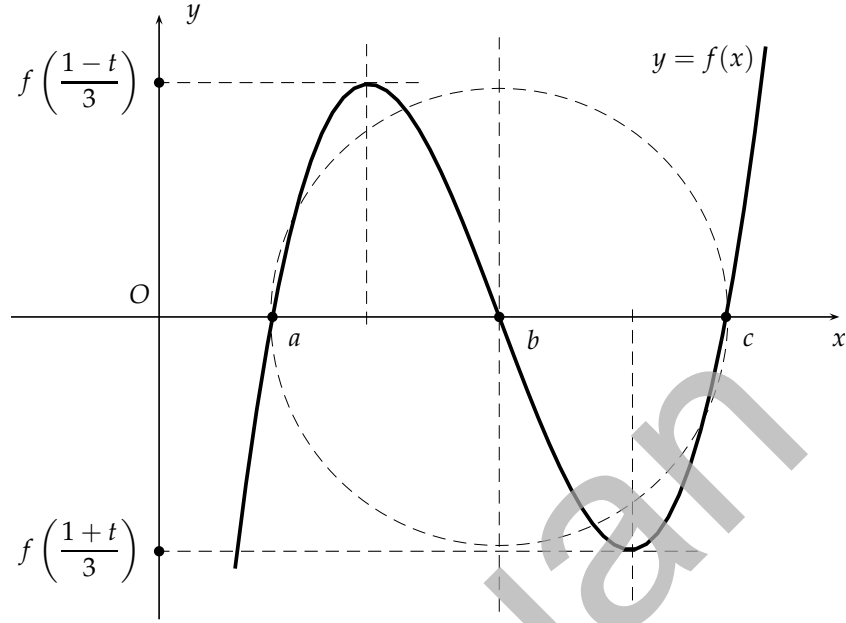
$$f'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1-t^2}{3}.$$

Từ đó suy ra $f'(x)$ đổi dấu tại hai điểm $x = \frac{1+t}{3}$, $x = \frac{1-t}{3}$.

Lập bảng biến thiên, ta có giá trị cực đại, cực tiểu lần lượt là

$$f_{\max} = f\left(\frac{1-t}{3}\right) = \frac{(1-t)^2(1+2t)}{27} - abc,$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{1+t}{3}\right) = \frac{(1+t)^2(1-2t)}{27} - abc.$$



Vì $f(x)$ có ba nghiệm phân biệt nên giá trị cực đại và giá trị cực tiểu phải trái dấu. Vì hệ số lớn nhất trong đa thức $f(x)$ dương nên $f_{\max} \geq 0$, và $f_{\min} \leq 0$. Tức là

$$\frac{(1+t)^2(1-2t)}{27} \leq abc \leq \frac{(1-t)^2(1+2t)}{27}.$$

Tổng quát hơn, ta có

Bài toán 4.35. Nếu a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = p$, đặt $ab + bc + ca = \frac{1}{3}(p^2 - t^2)$, $t \geq 0$. Ta có

$$\frac{(p+t)^2(p-2t)}{27} \leq abc \leq \frac{(p-t)^2(p+2t)}{27}.$$

Ta có thể chứng minh kết quả trên theo cách khác.³

³Chú ý đồng nhất thức sau

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -27r^2 + 2(1-3q^2)r + \frac{1}{27}(1-q^2)^2(4q^2-1) \\ &= -\frac{1}{27}(27r - (1-q)^2(1+2q))(27r - (1+q)^2(1-2q)). \end{aligned}$$

Chú ý rằng vì $q \geq 0$ nên $(1+q)^2(1-2q) \leq (1-q)^2(1+2q)^2$, do đó theo định lý về dấu tam thức bậc hai, ta phải có

$$\frac{(1+t)^2(1-2t)}{27} \leq abc \leq \frac{(1-t)^2(1+2t)}{27}..$$

Bài toán 4.36. Xét ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$, đặt

$$q = ab + bc + ca, \quad r = abc,$$

chứng minh rằng

$$r \leq \frac{1}{27}(1 - 3t^2 + 2t^3),$$

trong đó $q = \frac{1}{3}(1 - t^2)$.

Chứng minh. Xét hàm số $f(c)$, với

$$f(c) = abc = c \left[\frac{1 - t^2}{3} - c(1 - c) \right].$$

Nếu $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ thì

$$\frac{1}{3}(1 - t^2) - c(1 - c) \geq 0$$

khi $c \in [0, 1]$, bây giờ để thỏa mãn điều kiện Viet, tức là

$$(1 - c)^2 - 4 \left[\frac{1}{3}(1 - t^2) - c(1 - c) \right] \geq 0.$$

Bất đẳng thức này cho ta

$$\frac{1 - 2t}{3} \leq c \leq \frac{1 + 2t}{3}.$$

Tính đạo hàm hàm $f(c)$ ta được

$$f'(c) = 3c^2 - 2c + \frac{1}{3}(1 - t^2).$$

Do đó $f'(c) = 0$ khi và chỉ khi $c = \frac{1}{3}(1 \pm t)$. Lập bảng biến thiên, suy ra

$$f(c) \leq f\left(\frac{1 - t}{3}\right) = \frac{1}{27}(1 - 3t^2 + 2t^3).$$

Nếu $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ thì ta vẫn phải có điều kiện

$$0 \leq \frac{1 - 2t}{3} \leq c \leq \frac{1 + 2t}{3} \leq 1.$$

Hơn nữa, để có $ab \geq 0$ thì

$$\frac{1}{3}(1 - t^2) - c(1 - c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này cho ta $1 \geq c \geq \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{3}}\right)$ hoặc $0 \leq c \leq \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{3}}\right)$.

Chú ý rằng

$$\frac{1 - t}{3} \leq \frac{1 - \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{3}}}{2}; \quad \frac{1 + t}{3} \leq \frac{1 + \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{3}}}{2} \leq \frac{1 + 2t}{3}.$$

Từ đó, lập bảng biến thiên, và ta vẫn có

$$f(c) \leq \frac{1}{27}(1 - 3t^2 + 2t^3).$$

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.37. Xét ba số thực a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, chứng minh rằng

$$2(a + b + c) - abc \leq 10.$$

Chứng minh. Điều kiện bài toán cho ta $p^2 + 2t^2 = 9$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$2p - r \leq 10.$$

Theo kết quả trên

$$2p - r \leq 2p - \frac{1}{27}(p + t)^2(p - 2t) = \frac{p(5t^2 + 27) + 2t^3}{27}.$$

Thành thử, ta cần chứng minh

$$p(5t^2 + 27) \leq 270 - 2t^3.$$

Bình phương hai vế cho ta

$$(270 - 2t^3)^2 \geq p^2(5t^2 + 27)^2,$$

hay là

$$27(t - 3)^2(2t^4 + 12t^3 + 49t^2 + 146t + 219) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.38. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$(ab + bc + ca)(a + b + c)^3 + 48(ab + bc + ca)abc - 25abc(a + b + c)^2 \geq 0.$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Không mất tổng quát, chọn $a + b + c = 1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{1 - t^2}{3r} + 16(1 - t^2) \geq 25.$$

Theo bổ đề 4.35 ta có

$$\frac{1 - t^2}{3r} \geq \frac{9(1 + t)}{(1 - t)(1 + 2t)}.$$

Lại chú ý rằng

$$\frac{9(1 + t)}{(1 - t)(1 + 2t)} + 16(1 - t^2) = \frac{2t^2(4t - 1)^2}{(1 - t)(1 + 2t)} + 25.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $t = 0$, hoặc $t = \frac{1}{4}$, nghĩa là hoặc $a = b = c$, hoặc $2a = b = c$ hoặc các hoán vị. $\square$

Bài toán 4.39. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$\frac{8}{27}(a+b+c)^3(ab+bc+ca) + abc(a+b+c)^2 \geq 10abc(a^2+b^2+c^2).$$

Chứng minh. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Chọn $p = 1$, thì bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết được dưới dạng

$$\frac{8}{27}q + 20qr - 9r \geq 0.$$

Vì $q \leq \frac{1}{3}$ nên $20q - 9 \leq 0$, và sử dụng kết quả bài toán (4.36), ta có

$$f(q) \geq \frac{8}{27}q + \frac{1}{27}(20q - 9)(1 - 3t^2 + 2t^3).$$

Lại lưu ý rằng $q = \frac{1}{3}(1 - t^2)$, nên ta có thể chuyển việc chứng minh $f(q) \geq 0$ về

$$\frac{8}{27}(1 - t^2) - \frac{1}{81}(1 - 3t^2 + 2t^3)(7 + 20t^2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(1 - t)(2t - 1)^2(10t^2 + 5t + 1) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng với $t \in [0, 1]$. □

Bài toán 4.40. Xét ba số thực không âm a, b, c , hãy tìm số k nhỏ nhất sao cho

$$(ab + bc + ca)(abc + a^3 + b^3 + c^3) \leq k(a + b + c)^5.$$

Chứng minh. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Ta có thể chọn $p = 1$, và bất đẳng thức trên có thể viết dưới dạng

$$(1 + 4r - 3q)q \leq k.$$

Xét hàm $f(q) = (1 + 4r - 3q)q$. Sử dụng kết quả bài toán (4.36), ta được

$$f(q) \leq \frac{1}{3}(1 - t^2) \left[\frac{4}{27}(1 - 3t^2 + 2t^3) + 1 - (1 - t^2) \right]$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(t)$, với

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{3}(1 - t^2) \left[\frac{4}{27}(1 - 3t^2 + 2t^3) + 1 - (1 - t^2) \right] \\ &= \frac{1}{81}(1 - t^2)(4 + 15t^2 + 8t^3). \end{aligned}$$

Đặt $81F(t) = g(t)$, khảo sát hàm $g(t)$, ta có $g'(t) = -40t^4 - 60t^3 + 24t^2 + 22t$.
Phương trình $g'(t) = 0$ tương đương với

$$-2t(2t+1)(10t^2+10t-11) = 0.$$

Lập bảng biến thiên của hàm $g(t)$ trên $t \in [0, 1]$ ta suy ra

$$g(t) \leq g\left(\frac{3\sqrt{15}-5}{10}\right).$$

Từ đó suy ra

$$k = \frac{1}{81}g\left(\frac{3\sqrt{15}-5}{10}\right) \approx 0.0894.$$

□

Bài toán 4.41. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$(a+b+c)^6 \geq 13.5(a^3+b^3+c^3)(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là một hoán vị của $\left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{6}t, \frac{3+\sqrt{5}}{6}t\right)$

Bài toán 4.42. Xét ba số thực không âm a, b, c và $0 \leq t \leq 15$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{t}{(a+b+c)^2} \geq \frac{9+t}{4(ab+bc+ca)}.$$

Chứng minh. Đặt $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, và $r = abc$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết dưới dạng

$$\left(\frac{p^2+q}{pq-r}\right)^2 - \frac{4p}{pq-r} + \frac{t}{p^2} \geq \frac{9+t}{4q}.$$

Để cho gọn, ta chọn $p = 1$ và xét hàm

$$f(r) = 4q(1-2q+q^2+4r) + 4qt(q-r)^2 - (9+t)(q-r)^2 \geq 0.$$

Nếu $0 \leq q \leq \frac{1}{4}$ thì $f(r) \geq f(0) \geq 0$. Nếu $q \geq \frac{1}{4}$, đặt $q = \frac{1}{3}(1-x^2)$, với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, ta có $r \geq (1+x)^2(1-2x)/27$ nên

$$f(r) \geq f\left(\frac{(1+x)^2(1-2x)}{27}\right),$$

ta kí hiệu $x_0 = \frac{(1+x)^2(1-2x)}{27}$ và tính

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{64}{2187}t + \frac{32}{81}x^2 + \frac{140}{729}tx^4 - \frac{152}{2187}tx^5 - \frac{140}{2187}tx^6 + \frac{32}{729}tx^7 - \frac{16}{2187}tx^8 \\ &\quad - \frac{8}{27}x^4 - \frac{64}{81}x^3 - \frac{16}{81}x^6 + \frac{56}{81}x^5 + \frac{32}{2187}tx^3 - \frac{352}{2187}tx^2 \\ &= -\frac{4(1+x)(2x-1)(x-2)^2(2tx^4-5tx^3+54x^2-3tx^2+8tx+4t)}{2187}. \end{aligned}$$

Lại chú ý rằng $54x^2 \geq 3tx^2$ và $4t \geq 5tx^3$ nên suy ra đa thức trong ngoặc cuối cùng trên tử của $f(x_0)$ không âm. Từ đó suy ra $f(x_0) \geq 0$. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.43. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{2+xy} + \frac{1}{2+yz} + \frac{1}{2+zx} \leq \frac{4}{3}.$$

Hãy chỉ ra tất cả các trường hợp có đẳng thức.

Bài toán 4.44. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right).$$

4.6 Định lý Rolle và ứng dụng

Trên đây ta đã giải quyết được một lớp các bất đẳng thức ba biến. Câu hỏi tự nhiên nảy sinh sẽ là giải những bài có số biến nhiều hơn, hoặc chỉ ít cũng là nhiều hơn một biến. Mục này sẽ khai thác định lý Rolle để chuyển việc chứng minh bất đẳng thức bốn biến số về ba biến số. Với cách này, ta cũng giải quyết được nhiều bất đẳng thức đa thức bốn biến.

Định lý 4.2 (Định lý Rolle). *Giả sử rằng $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) . Nếu $f(a) = f(b)$, thì tồn tại một số c thuộc (a, b) sao cho $f'(c) = 0$.*

Định lý Rolle quan trọng về mặt lý thuyết, và một số bổ đề hữu ích cũng có thể rút ra từ định lý này.⁴

Sau đây ta xét một số ứng dụng giải toán.

Bài toán 4.45. Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d \geq 0$ thì

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + cd + da + ac + db}{6}}.$$

Chứng minh. Vì a, b, c, d là bốn số thực không âm tùy ý nên chúng có thể là nghiệm của đa thức

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

⁴Nếu f là một hàm liên tục và khả vi, chẳng hạn trên $[a, b]$, và nếu x_1 và x_2 là các nghiệm của $a < x_1 < x_2 < b$, thì f' có một nghiệm nằm giữa x_1 và x_2 . Tổng quát hơn, nếu f có n nghiệm phân biệt trong $[a, b]$ thì f' có ít nhất $n-1$ nghiệm (những nghiệm này xen với các nghiệm của f), f'' có ít nhất $n-2$ nghiệm (với giả sử rằng f' liên tục, khả vi trên $[a, b]$, v.v...)

Khai triển đa thức, ta thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3(a + b + c + d) + x^2(ab + bc + cd + da + ac + bd) \\ &\quad - x(abc + bcd + cda + dab) + abcd, \\ &= x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s. \end{aligned}$$

Hàm $f(x)$ là liên tục và khả vi. Theo định lý Rolle thì $f'(x)$ sẽ có ba nghiệm. Điều đó có nghĩa là tồn tại các số thực không âm u, v, w sao cho

$$f'(x) = 4(x - u)(x - v)(x - w).$$

Khai triển đa thức ta được

$$(4.18) \quad \frac{1}{4}f'(x) = x^3 - (u + v + w)x^2 + (uv + vw + wu)x + uvw.$$

Ta có lại

$$(4.19) \quad f'(x) = 4x^3 - 3px^2 + 2qx - r.$$

So sánh các hệ số trong (4.18) và (4.19) ta có đồng nhất thức

$$\begin{aligned} u + v + w &= \frac{3}{4}(a + b + c + d), \\ uv + vw + uw &= \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da + ac + bd), \\ uvw &= \frac{1}{4}(abc + bcd + cda + dab). \end{aligned}$$

Với ba số thực không âm u, v, w ta có theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$(4.20) \quad \frac{uv + vw + wu}{3} \geq (uvw)^{2/3}.$$

Từ đây và các đồng nhất thức ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 4.46. Xét bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$a + b + c + d \geq a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + ab + bc + cd + da + ac + bd.$$

Chứng minh. Để tiện cho tính toán, ta có thể đổi biến để chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$4(a + b + c + d) \geq a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 2(ab + bc + cd + da + ac + bd),$$

trong đó $a, b, c, d \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Điều kiện giả thiết có thể viết lại dưới dạng

$$p^2 + 3t^2 = 9.$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(abc + bcd + cda + dab) \\ &\quad - 3(a + b + c + d)(ab + bc + cd + da + ac + bd). \end{aligned}$$

Do đó ta có thể viết

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -\frac{8}{27}p^3 + \frac{8}{3}pt^2 + 12r.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết dưới dạng

$$(4.21) \quad \frac{16}{3}p \geq -\frac{8}{27}p^3 + \frac{8}{3}pt^2 + 12r + 4\left(\frac{p^2 - t^2}{3}\right).$$

Sử dụng giả thiết $p^2 + 3t^2 = 9$, ta đồng bậc hoá bất đẳng thức (4.21) về dạng

$$6p^3 \geq -10pt^2 + 81r + 3(p^2 - t^2)\sqrt{p^2 + 3t^2}.$$

Đây là bất đẳng thức đồng bậc, ta có thể giả sử $p = 1$. Vì $-10pt^2 \leq 0$ nên bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$2 \geq 27r + (1 - t^2)\sqrt{1 + 3t^2}.$$

Sử dụng bổ đề 4.35 ta có

$$r \leq \frac{(1 - t)^2(1 + 2t)}{27}.$$

Do đó, ta sẽ cần chỉ ra rằng

$$2 \geq (1 - t)^2(1 + 2t) + (1 - t^2)\sqrt{1 + 3t^2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $1 + 3t^2 - 2t^3 \geq (1 - t^2)\sqrt{1 + 3t^2}$. Bình phương hai vế cho ta

$$(1 + 3t^2 - 2t^3)^2 - (1 - t^2)^2(1 + 3t^2) = t^2[(t - 1)^4 + 8t^2(1 - t) + 4] \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng. Đẳng thức xảy ra khi $t = 0$, tức là $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.
Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

4.7 Chọn biến số nhỏ nhất, biến số lớn nhất

Dựa trên tính đồng bậc, tính bình đẳng giữa các biến số, ta sẽ sắp thứ tự và chọn phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất, từ đó giảm dần biến số. Với cách này ta thậm chí không cần sử dụng đến định lý Rolle, và giải quyết được một lớp các bất đẳng thức bốn biến số.

Bài toán 4.47. Chứng minh rằng với $a, b, c, d \geq 0$ thì

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 4abcd \geq (a + b + c + d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

Chứng minh. Nếu một trong bốn số a, b, c, d bằng 0 thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $a, b, c, d > 0$, vì tính đồng bậc nên ta có thể chọn

$$(4.22) \quad d = \min\{a, b, c, d\} = 1.$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(4.23) \quad 3(a^4 + b^4 + c^4 + 1) + 4abc \geq (a + b + c + 1)(a^3 + b^3 + c^3 + 1).$$

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$, vì (4.22) nên $p \geq 3$. Biểu diễn theo p, q, r , chú ý rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr), \quad a^3 + b^3 + c^3 = p(p^2 - 3q) + 3r,$$

bất đẳng thức (4.23) có thể viết dưới dạng

$$(4.24) \quad 2p^4 - p^3 - p + 2 - 9p^2q + 3pq + 6q^2 + 9pr + r \geq 0.$$

Theo bổ đề 4.35, ta có

$$r \geq \frac{1}{27}(p^3 - 3pt^2 - 2t^3).$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} 2p^4 - p^3 - p + 2 - 9p^2 \left(\frac{p^2 - t^2}{3} \right) + 3p \left(\frac{p^2 - t^2}{3} \right) \\ + 6 \frac{(p^2 - t^2)^2}{9} + \frac{p}{3}(p^3 - 3pt^2 - 2t^3) + \frac{1}{27}(p^3 - 3pt^2 - 2t^3) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(4.25) \quad (p - 3)^2(p + 6) + 2t^2(9p^2 - 15p - 9pt + 9t^2 - t) \geq 0.$$

Vì $p \geq 3$ nên $6p^2 \geq 18p > 15p + t$, và $3p^2 + 9t^2 \geq 9pt$, suy ra

$$9p^2 - 15p - 9pt + 9t^2 - t \geq 0.$$

Từ đây suy ra (4.25) đúng. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.48. Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d \geq 0$ thì

$$(a + b + c + d)^4 + 176abcd \geq 27(a + b + c + d)(abc + bcd + cda + dab).$$

Chứng minh. Nếu một trong các số bằng không, ta có ngay điều phải chứng minh. Khi các số đều dương, ta giả sử

$$d = \min\{a, b, c, d\} = 1.$$

Khi đó, ta cần chứng minh

$$(a + b + c + 1)^4 + 176abc \geq 27(a + b + c + 1)(abc + ab + ac + bc).$$

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Ta có $p \geq 3$, bất đẳng thức trên có dạng

$$(4.26) \quad p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 - 27pq - 27q + (149 - 27p)r \geq 0.$$

Đặt $q = \frac{1}{3}(p^2 - t^2)$, $0 \leq t \leq p$, ta có theo bổ đề 4.35

$$\frac{(p+t)^2(p-2t)}{27} \leq r \leq \frac{(p-t)^2(p+2t)}{27}.$$

Nếu $3 \leq p \leq \frac{249}{27}$ thì $149 - 27p \geq 0$, sau khi sử dụng bổ đề, biến đổi tương đương, để chứng minh (4.26) ta cần

$$\frac{1}{27}(14p+3)(p-3)^2 + t^2 \left(3p^2 - \frac{68}{9}p + 9 - \frac{298}{27}t + 2pt \right) \geq 0.$$

Bất đẳng thức

$$3p^2 - \frac{68}{9}p + 9 - \frac{298}{27}t + 2pt \geq 0$$

được chứng minh bằng cách cộng các bất đẳng thức đúng cùng chiều

$$p^2 + 9 \geq 6p, \quad \frac{14}{27}p^2 \geq \frac{14}{9}p, \quad 2pt \geq 6t, \quad \frac{40}{27}p^2 \geq \frac{136}{27}t.$$

Nếu $149 - 27p \leq 0$ thì để chứng minh (4.26) ta cần

$$\frac{1}{27}(14p+3)(p-3)^2 + t^2 \left(3p^2 - \frac{68}{9}p + 9 + \frac{298}{27}t - 2pt \right) \geq 0.$$

Xét hàm

$$f(p) = 3p^2 - \frac{68}{9}p + 9 + \frac{298}{27}t - 2pt.$$

Tính đạo hàm,

$$f'(p) = 6p - \frac{68}{9} - 2t.$$

Vì $t \leq p$ và $p \geq \frac{149}{27}$ nên $f'(p) > 0$. Suy ra hàm $f(p)$ đồng biến trên $[\max(t, \frac{149}{27}), +\infty)$. Suy ra

$$f(p) \geq f\left(\max\left(t, \frac{149}{27}\right)\right) \geq 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. ⁵ □

Bài toán 4.49. Giả sử p, q, r, s là các số thực sao cho phương trình sau đây có bốn nghiệm thực không âm, không nhất thiết phân biệt

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0.$$

Chứng minh rằng $3pr \leq 12s + q^2$.

Chứng minh. Theo cách làm trong bài trên đây, ta chuyển về việc chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực không âm a, b, c, d

$$3(a + b + c + d)(abc + bcd + cda + dab) \leq 12abcd + (ab + bc + cd + da + ac + bd)^2.$$

Nếu một trong bốn số bằng không, thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu $a, b, c, d > 0$ thì ta có thể giả sử

$$d = \min\{a, b, c, d\} = 1.$$

Khi đó, bất đẳng thức trở thành

$$(4.27) \quad (ab + bc + ca + a + b + c)^2 + 12abc \geq 3(a + b + c + 1)(abc + ab + bc + ca).$$

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$, thế thì $p \geq 3$. Bất đẳng thức (4.27) có dạng

$$(p + q)^2 + 12r \geq 3(1 + p)(r + q),$$

hay là

$$p^2 - pq + q^2 - 3q + (9 - 3p)r \geq 0.$$

Đặt $q = \frac{1}{3}(p^2 - t^2)$, do $0 \leq t \leq p$, thì ta có

$$r \leq \frac{1}{27}(p^3 - 3pt^2 + 2t^3).$$

Vì $9 - 3p \leq 0$ nên ta cần chứng minh

$$p^2 - \frac{p}{3}(p^2 - t^2) + \frac{1}{9}(p^2 - t^2)^2 - (p^2 - t^2) + \frac{1}{27}(9 - 3p)(p^3 - 3pt^2 + 2t^3) \geq 0.$$

⁵Bài toán này còn có thể phát biểu dưới dạng khác. Giả sử p, q, r, s là các số thực sao cho phương trình sau đây có bốn nghiệm thực không âm, không nhất thiết phân biệt

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0.$$

Chứng minh rằng

$$p^4 + 176s \geq 27pr.$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi

$$p^2t^2 - 6pt^2 + t^4 + 9t^2 + 6t^3 - 2pt^3 \geq 0.$$

Dễ thấy rằng có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng $t^2(p - t - 3)^3 \geq 0$. Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi $(1, 1, 1, 1)$ hoặc $(0, 1, 1, 1)$, hoặc $(0, 0, 0, 1)$, hoặc $(x, x, x, 1)$ với $x \geq 0$ bất kỳ $\square$

Bài toán 4.50. Giả sử p, q, r, s là các số thực sao cho phương trình sau đây có bốn nghiệm thực không âm, không nhất thiết phân biệt

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0.$$

Chứng minh rằng $p^4 + 32s \geq 3p^2q$.

Chứng minh. Ta có thể chuyển bài toán về dạng sau đây. Xét bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn

$$a + b + c + d = 1,$$

chứng minh rằng

$$1 + 32abcd \geq 3(ab + bc + cd + da + ac + bd).$$

Nếu một trong bốn số bằng không thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Ta có thể viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng đồng bậc

$$(4.28) \quad (a + b + c + d)^4 + 32abcd \geq 3(a + b + c + d)^2(ab + bc + cd + da + ac + bd).$$

Xét các số thực dương, vì tính đồng bậc nên ta có thể giả sử

$$(4.29) \quad d = \min(a, b, c, d) = 1.$$

Khi đó bất đẳng thức (4.28) có thể viết dưới dạng

$$(a + b + c + 1)^4 + 32abc \geq 3(a + b + c + 1)^2(ab + bc + ca + a + b + c).$$

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Vì (4.29) nên $p \geq 3$, và $q \geq 3$. Với cách đặt này, ta viết bất đẳng thức dưới dạng

$$(p + 1)^4 + 32r \geq 3(p + 1)^2(q + p).$$

Khai triển bất đẳng thức này ta được

$$p^4 + p^3 + p + 1 - 3p^2q - 6pq - 3q + 32r \geq 0.$$

Đặt $q = \frac{1}{3}(p^2 - t^2)$, $0 \leq t \leq p$. Ta có

$$r \geq \frac{1}{27}(p + t)^2(p - 2t) = \frac{1}{27}(p^3 - 3pt^2 - 2t^3).$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$p^4 + p^3 + p + 1 - p^2(p^2 - t^2) - 2p(p^2 - t^2) - (p^2 - t^2) + \frac{32}{27}(p^3 - 3pt^2 - 2t^3) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này lại tương đương với mỗi bất đẳng thức

$$\frac{5}{27}p^3 - p^3 + p + 1 + p^2t^2 + t^2 - \frac{14}{9}pt^2 - \frac{64}{27}t^3 \geq 0.$$

Nhóm nhân tử chung cho ta

$$(4.30) \quad \frac{1}{27}(5p+3)(p-3)^2 + t^2 \left(p^2 + 1 - \frac{14}{9}p - \frac{64}{27}t \right) \geq 0.$$

Mặt khác, vì $p \geq 3$ nên $\frac{14}{27}p^2 \geq \frac{14}{9}p$, và $q = \frac{1}{3}(p^2 - t^2) \geq 3$ nên $p^2 \geq t^2 + 9$. Suy ra, theo bất đẳng thức AM-GM

$$\frac{13}{27}p^2 + 1 \geq \frac{13}{27}t^2 + \frac{16}{3} \geq \frac{64}{27}t.$$

Đến đây, ta thu được

$$p^2 + 1 - \frac{14}{9}p - \frac{64}{27}t \geq 0.$$

Suy ra bất đẳng thức (4.30) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra với $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, hoặc $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ hoặc các hoán vị của nó. $\square$

Bài toán 4.51. Xét bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 8(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq 1.$$

Chứng minh. Đặt $a = 1 - x, b = 1 - y, c = 1 - z$, và $d = 1 - t$, thì $x, y, z, t \in [0, 1]$.

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết dưới dạng

$$(1-x)^3 + (1-y)^3 + (1-z)^3 + (1-t)^3 + 8xyzt \geq 1.$$

Điều kiện ban đầu trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2(x+y+z+t) + 3 = 0.$$

Đặt

$$\begin{aligned} p &= x + y + z + t, \\ q &= xy + yz + zt + tx + yt + zx, \\ r &= xyz + yzt + ztx + txy. \end{aligned}$$

Ta viết điều kiện ràng buộc của bài toán dưới dạng

$$p^2 - 2q - 3p + 3 = 0.$$

Theo bài toán (4.48), ta có

$$xyzt \geq \frac{27pr - p^4}{176}.$$

Ta lại có ⁶

$$(4.31) \quad \frac{1}{16}p^3 - \frac{1}{3}pt^2 - \frac{8}{27}t^3 \leq r \leq \frac{1}{16}p^3 - \frac{1}{3}pt^2 + \frac{8}{27}t^3.$$

Với chú ý rằng $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = p(p^3 - 3q) + 3r$, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết theo p, q, r

$$3 - 3p + 3p^2 - p^3 + 3pq - 6q - 3r + 8xyzt \geq 0.$$

Từ kết quả bài toán (4.48), để có bất đẳng thức cần chứng minh, ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$3 - 3p + 3p^2 - p^3 + 3pq - 6q - 3r + \frac{27}{22}pr - \frac{1}{22}p^4 \geq 0.$$

Từ điều kiện ràng buộc của bài toán suy ra $q = \frac{1}{2}p^2 - p + \frac{3}{2}$, thành thử ta sẽ cần chứng minh

$$(4.32) \quad -\frac{1}{22}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - 3p^2 + \frac{15}{2}p - 6 + 3r \left(\frac{9}{22}p - 1 \right) \geq 0.$$

Ta xét hai khả năng.

Nếu $\frac{9}{22}p - 1 \leq 0$, để có (4.32), ta cần chứng tỏ

$$-\frac{1}{22}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - 3p^2 + \frac{15}{2}p - 6 + 3 \left(\frac{1}{16}p^3 - \frac{1}{3}pt^2 + \frac{8}{27}t^3 \right) \left(\frac{9}{22}p - 1 \right) \geq 0.$$

⁶Phương trình $X^4 - pX^3 + qX^2 - rX + xyzt = 0$ có bốn nghiệm $x, y, z, t \geq 0$. Theo định lý Rolle thì

$$X^3 - \frac{3}{4}pX^2 + \frac{q}{2}X - \frac{r}{4} = 0$$

có ba nghiệm không âm. Theo bổ đề 4.35, nếu ta đặt

$$\frac{q}{2} = \frac{(\frac{3}{4}p)^2 - t^2}{3}, \text{ suy ra } q = \frac{3}{8}p^2 - \frac{2}{3}t^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{4}p.$$

ta có

$$\frac{(\frac{3}{4}p + t)^2(\frac{3}{4}p - 2t)}{27} \leq \frac{r}{4} \leq \frac{(\frac{3}{4}p - t)^2(\frac{3}{4}p + 2t)}{27}.$$

Khai triển kết quả này cho ta

$$\frac{1}{16}p^3 - \frac{1}{3}pt^2 - \frac{8}{27}t^3 \leq r \leq \frac{1}{16}p^3 - \frac{1}{3}pt^2 + \frac{8}{27}t^3.$$

Bất đẳng thức này lại tương đương với

$$\frac{1}{32}p^4 + \frac{5}{16}p^3 - 3p^2 + \frac{15}{2}p - 6 + \left(\frac{8}{9}t - p\right)t^2\left(\frac{9}{22}p - 1\right) \geq 0,$$

hay là

$$(4.33) \quad \frac{1}{32}(p-2)(p^3 + 12p^2 - 72p + 96) + t^2\left(p - \frac{8}{9}t\right)\left(1 - \frac{9}{22}p\right) \geq 0.$$

Ta có $p \geq \frac{4}{3}t \geq \frac{8}{9}t$. Suy ra

$$\left(p - \frac{8}{9}t\right)\left(1 - \frac{9}{22}p\right) \geq 0.$$

Ta cũng chứng minh được

$$p^3 + 12p^2 - 72p + 96 \geq 0, \text{ với mọi } p \geq 0.$$

Từ đó suy ra (4.33) đúng, tức là (4.32) đúng.

Nếu $p \geq \frac{22}{9}$. Để có (4.32) ta cần chỉ ra

$$-\frac{1}{22}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - 3p^2 + \frac{15}{2}p - 6 + 3\left(\frac{1}{16}p^3 - \frac{1}{3}pt^2 - \frac{8}{27}t^3\right)\left(\frac{9}{22}p - 1\right) \geq 0.$$

Biến đổi bất đẳng thức này về dạng

$$(4.34) \quad \frac{1}{32}p^4 + \frac{5}{16}p^3 - 3p^2 + \frac{15}{2}p - 6 - t^2\left(p + \frac{8}{9}t\right)\left(\frac{9}{22}p - 1\right) \geq 0.$$

Mặt khác, kết hợp điều kiện bài toán và $q = \frac{3}{8}p^2 - \frac{2}{3}t^2$, suy ra

$$t^2 = \frac{3}{2}p - \frac{9}{4} - \frac{3}{16}p^2 = \frac{3}{16}(6-p)(p-2).$$

Thế vào (4.34) ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{32}(p-2)(p^3 + 12p^2 - 72p + 96) \geq \frac{3}{16}(6-p)(p-2)\left(p + \frac{8}{9}t\right)\left(\frac{9}{22}p - 1\right).$$

Giản ước $\frac{1}{32}(p-2)$ ở hai vế và tiếp tục biến đổi sẽ cho ta

$$19p^3 - 48p^2 - 198p + 528 \geq \frac{\sqrt{3(6-p)(p-2)}}{3}(6-p)(9p-22).$$

Chú ý rằng $\sqrt{3(6-p)(p-2)} \leq p$. Thực vậy, bình phương hai vế và đưa bất đẳng thức về dạng $4(p-3)^2 \geq 0$. Vậy để có (4.34) ta chỉ cần chứng minh

$$3(19p^3 - 48p^2 - 198p + 528) \geq p(6-p)(9p-22).$$

Khai triển và giản ước ta thu được

$$66p^3 - 220p^2 - 462p + 1584 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì nó có thể viết được dưới dạng $22(p-3)^2(3p+8) \geq 0$.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi với bộ số $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hoặc các hoán vị của các bộ. $\square$

Bạn đọc có thể chứng minh bài toán ?? theo cách này. Dưới đây là các bài toán khác.

Bài toán 4.52. Xét các số thực p, q, r sao cho phương trình sau có bốn nghiệm (không nhất thiết phân biệt)

$$x^4 - px^3 + qx^2 + (2q - 16)x + r = 0,$$

chứng minh rằng $p \geq \frac{2}{3}q$.

Bài toán 4.53. Xét bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 12(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq 1.$$

Bài toán 4.54. Giả sử p, q, r, s là các số thực sao cho phương trình sau đây có bốn nghiệm thực không âm thỏa mãn $p^2 - 2q = 1$, không nhất thiết phân biệt

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0,$$

chứng minh rằng $r/s + 8r \geq 12$.

Bài toán 4.55. Giả sử p, q, r, s là các số thực sao cho phương trình sau đây có bốn nghiệm thực không âm, không nhất thiết phân biệt

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0.$$

Chứng minh rằng $9q^2 \leq 68s + p^4$ và $(p^2 - 2q)^{5/2} + 8ps \geq 4(p^2 - 2q)r$.

4.8 Bất đẳng thức Vornicu-Schur

Định lý 4.3 (Bất đẳng thức Vornicu-Schur⁷). Cho sáu số thực không âm a, b, c, x, y, z sao cho $a \geq b \geq c$ và hoặc $x \geq y \geq z$ hoặc $x \leq y \leq z$, chứng minh rằng

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

⁷Vornicu Valentine là một người Romania, thành viên sáng lập diễn đàn toán học toàn cầu Mathlinks.

Phép chứng minh bất đẳng thức trên rất đơn giản theo tinh thần chứng minh của bất đẳng thức Schur. Tiếp theo ta sẽ vận dụng bất đẳng thức này để chứng minh các kết quả khác.

Bài toán 4.56. Chứng minh rằng nếu a, b, c dương thì

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c.$$

Lời giải. Không mất tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Ta chú ý đến đồng nhất thức sau đây

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} - a = \frac{a^2 + bc - ab - ac}{b + c} = \frac{(a - b)(a - c)}{b + c}.$$

Thành thử, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết dưới dạng

$$x(a - b)(a - c) + y(b - c)(b - a) + z(c - a)(c - b) \geq 0,$$

trong đó $x = 1/(b + c)$, $y = 1/(a + c)$, $z = 1/(a + b)$.

Chú ý rằng ta có $x \geq y \geq z$. Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh đúng theo bất đẳng thức Vornicu-Schur. $\square$

Bên cạnh kết quả trên, ta còn có nhiều kết quả liên quan như sau. Ta gộp tất cả các kết quả dưới bài toán sau đây.

Bài toán 4.57. Xét ba số thực a, b, c , gọi x, y, z là ba số thực không âm, điều kiện cần và đủ cho a, b, c, x, y, z sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$x(a - b)(a - c) + y(b - c)(b - a) + z(c - a)(c - b) \geq 0$$

là một trong các điều kiện sau thỏa mãn

- i) $a \geq b \geq c$, và $x + z \geq y$;
- ii) x, y , và z là độ dài cạnh của một tam giác nào đó;
- iii) ax, by , và cz là độ dài cạnh của một tam giác nào đó;

Trong những bài toán đối xứng, ta luôn có thể sắp thứ tự cho bộ số. Và đối những bài có bộ số khác liên quan cũng sắp thứ tự được thì luôn có thể giải được theo cách trên.

Bài toán 4.58. Chứng minh rằng nếu a, b, c dương thì

$$\frac{a^3 + abc}{b + c} + \frac{b^3 + abc}{c + a} + \frac{c^3 + abc}{a + b} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài toán 4.59. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài cạnh của một tam giác thì

$$\frac{1}{3} \left(\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \right) \leq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra với tam giác đều hoặc tam giác cân. Hãy chỉ ra rằng bất đẳng thức trên không đúng với số thực dương nói chung.

Bài toán 4.60. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$, thì

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 \geq 4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Bài toán 4.61. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài cạnh của một tam giác, và $t \geq 1$ là một số thực thì

$$(t+1)(a^3b + b^3c + c^3a) \geq ab^3 + bc^3 + ca^3 + tabc(a+b+c).$$

Bài toán 4.62. Chứng minh rằng nếu a, b, c, x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $x \leq y \leq z$ thì

$$x(b-c)^2(b+c-a) + y(c-a)^2(c+a-b) + z(a-b)^2(a+b-c) \geq 0.$$

Bài toán 4.63. Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng nếu $k \in \mathbb{R}$, thì

$$\sum_{\text{cyclic}} (a^2 + kbc)^2(a-b)(a-c) \geq 0.$$

Bài toán 4.64. Cho các số thực không âm $a, b, c \geq 0$, và $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 2n-1$, chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} a^k(b-c)^{2n}(a-b)(a-c) \geq 0.$$

4.9 Phân hoạch và giới hạn

Trong tiết này ta xét đến cộng cụ giới hạn để biện luận và chứng minh bất đẳng thức ba biến số đối xứng.

Bài toán 4.65. Xét ba số thực dương a, b, c . Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, và $r = abc$. Chứng minh rằng nếu $p = 1$ thì

$$(1-q)(1-27r) \geq 6(1+3q)(q^2-3r).$$

Chứng minh. Nếu ta sử dụng đánh giá (4.12) thì ta cần chứng minh

$$16(1-q) \geq 6(1+3q),$$

hay $\frac{5}{17} \geq q$. Thế thì, nếu $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{5}{17}$ thì ta cần phải đánh giá lại!

Ta nảy ra ý tưởng phân hoạch đoạn $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ thành từng đoạn nhỏ rồi đánh giá khi q thuộc từng khoảng đó. Ta có lời giải sau đây.

Nếu $q \leq \frac{1}{4}$ thì bất đẳng thức cần chứng minh đúng (bạn đọc tự kiểm tra điều này).

Nếu $\frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$ thì ta xét dãy $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} = \begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + 3). \end{cases}$$

Dễ thấy dãy (α_n) tăng và $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 3$. Thế thì dãy

$$\left\{ \frac{3 + \alpha_n}{15 + \alpha_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

cũng tăng.

Ta có

$$\frac{3 + \alpha_1}{15 + \alpha_1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \alpha_n}{15 + \alpha_n} = \frac{3 + 3}{15 + 3} = \frac{1}{3}.$$

Vì $q \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ nên tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$(4.35) \quad \frac{3 + \alpha_k}{15 + \alpha_k} \leq q \leq \frac{3 + \alpha_{k+1}}{15 + \alpha_{k+1}}.$$

Từ bất đẳng thức (4.35), suy ra $(15 + \alpha_k)q - (3 + \alpha_k) \geq 0$, hay $(3q - 1)[(15 + \alpha_k)q - (3 + \alpha_k)] \leq 0$. Nhân khai triển, ta được bất đẳng thức

$$3(15 + \alpha_k)q^2 \leq (\alpha_k + 6)(4q - 1) + 3.$$

Theo bất đẳng thức Schur, $4q - 1 \leq 9r$. Do đó $3(15 + \alpha_k)q^2 \leq (\alpha_k + 6)9r + 3$. Rút gọn bất đẳng thức trên về dạng

$$(4.36) \quad (15 + \alpha_k)(q^2 - 3r) \leq 1 - 27r.$$

Cũng từ (4.35), ta suy ra

$$q \leq \frac{3 + \alpha_{k+1}}{15 + \alpha_{k+1}} = \frac{3 + \frac{1}{2}(\alpha_k + 3)}{15 + \frac{1}{2}(\alpha_k + 3)}.$$

Thu gọn bất đẳng thức trên về dạng

$$(4.37) \quad 18q + 6 \leq (\alpha_k + 15)(1 - q).$$

Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều (4.36) và (4.37) ta có điều phải chứng minh. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.66. Xét các số thực không âm a, b, c , chứng minh bất đẳng thức

$$(8a^2 + bc)(8b^2 + ca)(8c^2 + ab) \leq (a + b + c)^6.$$

Hỏi đẳng thức đạt được khi nào?

Hướng dẫn. Chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$64q(q^2 - 3r) \leq (1 - 27r)(1 + 19r).$$

Xét dãy tăng $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ xác định bởi

$$\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \begin{cases} \alpha_1 = 15 \\ \alpha_{n+1} = \frac{76\alpha_n - 576}{10\alpha_n} + 12. \end{cases}$$

□

Bài toán 4.67. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$1 + 162(abc)^2 \geq 27abc + 54(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3).$$

Bài toán 4.68. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$, chứng minh rằng

$$7(ab + bc + ca)^2 \geq 18abc + 27(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3).$$

4.10 Dạng tổng các bình phương

Bất đẳng thức $x^2 \geq 0$ là phương tiện chứng minh và nguồn gốc của nhiều bất đẳng thức. Trong tiết này, ta tiếp tục khai thác bất đẳng thức này. Ta thử suy nghĩ theo một hướng khác là tìm một bộ số $p, q, r \in \mathbb{R}$ sao cho đánh giá sau đây vẫn là đúng

$$(4.38) \quad p(y - z)^2 + q(z - x)^2 + r(x - y)^2 \geq 0.$$

Tất nhiên với p, q, r là những số thực dương thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Bây giờ ta tính đến khả năng rằng có hai hoặc một trong ba số p, q, r là âm. Khi đó, phép chứng minh chưa thể dừng lại; ta cần phải tiếp tục biện luận để đi đến kết quả tường minh. Cụ thể nếu ta có một trong ba số p, q, r là dương, chẳng hạn q , thì ta cần gì ở p, r để bất đẳng thức (4.38) là đúng. Bỏ đề sau đây cho ta một phương án trả lời.

Bổ đề 1. Chứng minh rằng nếu $x \geq y \geq z$ và $q \geq 0, q + r \geq 0, q + p \geq 0$ thì

$$(4.39) \quad p(y - z)^2 + q(z - x)^2 + r(x - y)^2 \geq 0.$$

Chứng minh. Vì tính thứ tự $x \geq y \geq z$ nên ta có $x - y \geq 0$ và $y - z \geq 0$. Thành thử,

$$\begin{aligned}(x - y + y - z)^2 &= (x - y)^2 + 2(x - y)(y - z) + (y - z)^2 \\ &\geq (x - y)^2 + (y - z)^2.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $(x - z)^2 \geq (x - y)^2 + (y - z)^2$. Bất đẳng thức này cho thấy rằng với ba số đã sắp thứ tự thì tổng bình phương khoảng cách của hai số gần nhau không lớn hơn bình phương khoảng cách của hai số xa nhau nhất. Bây giờ sử dụng bất đẳng thức này để có đánh giá sau

$$p(y - z)^2 + q(z - x)^2 + r(x - y)^2 \geq (p + q)(y - z)^2 + (q + r)(x - y)^2 \geq 0$$

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Như vậy ta đã tìm ra một bộ số thực p, q, r tốt nhất có thể để bất đẳng thức (4.38) vẫn đúng. Việc so sánh các biểu thức đồng bậc đối xứng ba biến số mà quy được về dạng (4.38) là phổ biến, dạng khác chỉ là hy hữu. Trong đa số các trường hợp ta phải biện luận, ước lượng các biểu thức p, q, r . Thao tác này là thách thức chủ yếu khi giải các bài toán bất đẳng thức.

Bài toán 4.69. Chứng minh rằng nếu $x, y, z > 0$ thì

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} + \frac{8xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)} \geq 2.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức này có nguồn gốc từ bất đẳng thức lượng giác trong tam giác. Nó có dạng tổng của hai bất đẳng thức ngược chiều, do Jack Garfunkel đặt ra là

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 2.$$

Trở lại với bất đẳng thức cần chứng minh, ta thấy nó tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} - 1 \geq 1 - \frac{8xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Sử dụng các đẳng thức

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) &= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2], \\ (x + y)(y + z)(z + x) - 8xyz &= x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2,\end{aligned}$$

ta được bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2(xy + yz + zx)} \geq \frac{x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2}{(x + y)(y + z)(z + x)}.$$

Bây giờ ta viết bất đẳng thức này về dạng

$$f = p(y-z)^2 + q(z-x)^2 + r(x-y)^2,$$

trong đó

$$\begin{cases} p = y^2(z+x) + z^2(y+x) - x^2(y+z), \\ q = z^2(x+y) + x^2(y+z) - y^2(x+z), \\ r = x^2(z+y) + y^2(z+x) - z^2(x+y). \end{cases}$$

Không mất tổng quát, ta giả sử $x \geq y \geq z$. Để kiểm tra được rằng $p+q \geq 0$, $q+r \geq 0$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $q \geq 0$. Xét hiệu $p-q$,

$$\begin{aligned} p-q &= 2xy(y-x) + 2z(y^2-x^2) \\ &= 2(y-x)(xy+yz+zx) \leq 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $p \leq q$, mặt khác $p+q \geq 0$. Thành thử $q \geq 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh $f \geq (p+q)(y-z)^2 + (q+r)(x-y)^2 \geq 0$. $\square$

Trong cách giải các bài toán theo hướng trên, chúng ta đã sử dụng, không chứng minh, một số đẳng thức. Thành thử, để cho cố định hướng nhanh chóng, ta cần ghi nhớ một số đẳng thức đối xứng. Đây là điều hạn chế nhất của phương pháp này. Chẳng hạn đẳng thức sau đây

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Trong quá trình biến đổi luôn phải chú ý rút các nhân tử $x-y$, $y-z$, $z-x$ làm nhân tử chung.

Với chỉ ba biến số x, y, z ta có thể lập được các biểu thức đối xứng tùy ý. Vấn đề tiếp theo là so sánh các biểu thức (biểu thức đồng bậc) đó ra sao.

Bài toán 4.70. Xét ba số thực dương a, b, c , chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a+b} + \frac{b^2 - bc + c^2}{b+c} + \frac{c^2 - ca + a^2}{c+a} \right).$$

4.11 Chọn phần tử nhỏ nhất và dạng Schur

Mục này xét một số bất đẳng thức đơn giản, mà phép chứng minh chỉ dựa trên phép biến đổi tương đương. Đây là ý tưởng của bạn Lê Việt Thắng.

Bài toán 4.71. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Chứng minh. Không mất tổng quát, giả sử $c = \min(a, b, c)$. Sử dụng khai triển

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc + (a + b + c)[(a - b)^2 + (a - c)(b - c)], \\ a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) &= 6abc + (a + b)(a - c)(b - c) + 2c(a - b)^2. \end{aligned}$$

Do đó, ta viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$(a + b - c)(a - b)^2 + c(a - c)(b - c) \geq 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng vì c là số nhỏ nhất trong ba số. $\square$

Bài toán 4.72. Chứng minh rằng nếu a, b, c là số thực dương thì

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát, ta giả sử $c = \min(a, b, c)$. Ta sử dụng khai triển

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 3 = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)(y-z)}{xz}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết được dưới dạng

$$\left[\frac{1}{ab} - \frac{1}{(a+c)(b+c)} \right] (a-b)^2 + \left[\frac{1}{ac} - \frac{1}{(a+c)(a+b)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0.$$

$\square$

Một cách khái quát, ta có thể giải một lớp lớn bất đẳng thức ba biến số bằng cách chọn một số là nhỏ nhất, chẳng hạn $c = \min(a, b, c)$ sau đó viết bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$p(a-b)^2 + q(a-c)(b-c) \geq 0.$$

Bước cuối cùng, ta phải chứng minh $p, q \geq 0$. Sau đây là một số phép khai triển thường dùng nữa

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= (a-b)^2 + (a-c)(b-c), \\ (a+b)(b+c)(c+a) &= 8abc + (a+b)(a-c)(b-c) + 2c(a-b)^2, \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{3}{2} + \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(a+b-2c)(a-c)(b-c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Bài toán 4.73. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài cạnh của một tam giác thì

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}.$$

Chứng minh. Sử dụng các đồng nhất thức đã biết, ta quy bất đẳng thức trên về dạng

$$p(a-b)^2 + q(a-c)(b-c) \geq 0,$$

trong đó

$$p = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{(a+c)(b+c)} - \frac{(a-c)(b-c)}{(a^2 + b^2 + c^2)(a+c)(b+c)}$$

$$q = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{a+b+2c}{(a+c)(b+c)} - \frac{(a-b)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a+c)(b+c)}.$$

Giả sử rằng $c = \max(a, b, c)$ và ta dễ có $p, q \geq 0$. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.74. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b}.$$

Bài toán 4.75. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thì

$$\frac{1}{3} \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}}.$$

4.12 Một số kiểu ước lượng thông dụng

Mục này trình bày một số kỹ thuật thiết lập các đánh giá trung gian. Một lần nữa, thông tin về dấu đẳng thức có tính chất gợi ý quan trọng nhất khi định hướng tới các ước lượng kiểu này.

Bài toán 4.76. Chứng minh bất đẳng thức Nesbitt cho ba số thực dương.

Chứng minh.

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{pa^k}{a^k + b^k + c^k}, \quad p = k = \frac{3}{2}.$$

Thực vậy, thay p, k vào bất đẳng thức, ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2}) \geq 3a^{1/2}(b+c).$$

Lại theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^{3/2} + b^{3/2} + b^{3/2} \geq 3a^{1/2}b, \quad a^{3/2} + c^{3/2} + c^{3/2} \geq 3a^{1/2}c.$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều, ta suy ra điều phải chứng minh. Trở lại bài toán, ta có điều cần chứng minh vì

$$\frac{a^{3/2}}{a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2}} + \frac{b^{3/2}}{a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2}} + \frac{c^{3/2}}{a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2}} = 1.$$

$\square$

Bài toán 4.77. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

Chứng minh. Ta sẽ tìm p sao cho

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^p}{a^p + b^p + c^p}.$$

Bình phương hai vế bất đẳng thức, ta được

$$a^3 a^{2p} + a^3 (b^p + c^p)^2 + 2a^p a^3 (b^p + c^p) \geq a^3 a^{2p} + a^{2p} (b+c)^3,$$

Đơn giản bất đẳng thức về dạng

$$(b^p + c^p)^2 + 2a^p (b^p + c^p) \geq a^{2p-3} (b+c)^3.$$

Ta dự đoán rằng $p = 2$ sẽ cho bất đẳng thức đúng. Thực vậy, vì $\frac{b+c}{2} \leq \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$. Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{4}t^4 + a^2 t^2 - at^3 \geq 0,$$

hay $t^2(\frac{1}{2}t - a)^2 \geq 0$, trong đó $t = b+c$.

Hoặc ta cũng có thể chọn $b = c = 1$, và sau đó tìm p sao cho

$$a^p - 2a^{2p-3} + 1 \geq 0.$$

Xét hàm $f(a) = a^p - 2a^{2p-3} + 1$. Tính đạo hàm $f(a)$ và cần $f'(1) = 0$. Từ đó suy ra $p = 2$.

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều nữa, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.78. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là các số thực không âm và $p = \frac{5}{3}$ thì

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + p(b+c+d)^2}} \geq \frac{a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{5}{4}} + b^{\frac{5}{4}} + c^{\frac{5}{4}} + d^{\frac{5}{4}}}.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với trường hợp $a = 1$, ta đặt $x = b^{\frac{1}{4}}$, $y = c^{\frac{1}{4}}$, $z = d^{\frac{1}{4}}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p(x^4 + y^4 + z^4)^2}} \geq \frac{1}{1 + x^5 + y^5 + z^5}.$$

Bình phương hai vế, ta viết bất đẳng thức trên về dạng

$$3(x^{10} + y^{10} + z^{10}) + 6(x^5y^5 + y^5z^5 + x^5z^5) + 6(x^5 + y^5 + z^5) \geq 5(x^8 + y^8 + z^8) + 10(x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4).$$

Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$3x^{10} + 2x^5 \geq 5x^8, \quad 6y^5z^5 + 2y^5 + 2z^5 \geq 10y^5z^5.$$

Làm các bất đẳng thức tương tự, rồi cộng chúng với nhau ta sẽ suy ra ngay được điều phải chứng minh. ⁸ $\square$

Bài toán 4.79. Xét ba số thực không âm a, b, c sao cho

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq \sqrt{2}.$$

Chứng minh. Ta muốn tìm p sao cho

$$\frac{a}{1+bc} \leq \frac{\sqrt{2}a^p}{a^p + b^p + c^p}.$$

Với $p = 1$, ta cần chứng tỏ rằng $(a+b+c)^2 \leq 2(1+bc)^2$, đây là hệ quả trực tiếp của

$$(b+c-a)^2 + 2b^2c^2 \geq 0.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

⁸Một câu hỏi tương tự là làm sao tìm ra được bất đẳng thức trên với số $\frac{5}{4}$. Về mặt kỹ thuật, ta có thể thao tác hết như bài toán trước. Ta cần tìm p sao cho bất đẳng thức sau đúng.

$$\frac{a}{\sqrt{a + \frac{5}{3}(b+c+d)^2}} \geq \frac{a^p}{a^p + b^p + c^p + d^p}.$$

Chỉ cần xét $b = c = d = 1$. Thế thì bất đẳng thức trên có dạng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 15}} \geq \frac{a^p}{a^p + 3}.$$

Bình phương hai vế bất đẳng thức và rút gọn cho ta

$$a^{2p+2} + 6a^{p+2} + 9a^2 \geq a^{2p+2} + 15a^{2p}.$$

Xét hàm $f(a) = 6a^{p+2} - 15a^{2p} + 9a^2$. Ta biết rằng dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$, do đó ta tính đạo hàm $f(a)$ và cho $f'(1) = 0$. Giải phương trình này cho ta $p = \frac{5}{4}$.

Bài toán 4.80. Xét ba số thực không âm a, b, c , chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + \frac{1}{4}ca + a^2}} \geq \frac{2}{3}(a + b + c).$$

Chứng minh. Lời giải của Võ Quốc Bá Cẩn. Với mọi $x \geq 0$, ta có

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x + 1}} \geq x - \frac{1}{3}.$$

Nếu $x \leq \frac{1}{3}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu $x \geq \frac{1}{3}$, thì ta biến đổi nó về dạng

$$\frac{36x^4}{4x^2 + x + 4} - (3x - 1)^2 = \frac{(x - 1)^2(15x - 4)}{4x^2 + x + 4} \geq 0.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên, thay x lần lượt bởi $a/b, b/c, c/a$, ta có

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2}} \geq a - \frac{1}{3}b, \quad \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2}} \geq b - \frac{1}{3}c, \quad \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + \frac{1}{4}ca + a^2}} \geq c - \frac{1}{3}a.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 4.81. Cho $p = \frac{1}{3}$, chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{a}{(a+b)^p} + \frac{b}{(b+c)^p} + \frac{c}{(c+a)^p} \geq \frac{1}{2^p}(a^{1-p} + b^{1-p} + c^{1-p})$$

Chứng minh. Lời giải của Võ Quốc Bá Cẩn. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $x > 0$ thì bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{4x^3 \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \geq 5x^2 - 1$$

Thực vậy, nếu $x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, bất đẳng thức tầm thường. Nếu $x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$, ta xét hàm

$$f(x) = \frac{128x^9}{(x^3 + 1)(5x^2 - 1)^3}$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{384x^8(1-x)(2x^2 - 3x - 3)}{(x^3 + 1)^2(5x^2 - 1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$$

Để dàng xác minh được rằng $f'(x) > 0$ với $1 < x < \frac{3+\sqrt{33}}{4}$, $f'(x) < 0$ với $\frac{1}{\sqrt{5}} < x < 1$ và $x > \frac{3+\sqrt{33}}{4}$, thì

$$f(x) \geq \min \left\{ f(1), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} = 1 \quad \forall x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Do đó, bất đẳng thức trên đúng. Bây giờ sử dụng bất đẳng thức này bằng cách thay số x với $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$, $\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$ tương ứng, ta thu được

$$\frac{a\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{a+b}} \geq \frac{5}{4}a^{2/3} - \frac{1}{4}b^{2/3}, \quad \frac{b\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{b+c}} \geq \frac{5}{4}b^{2/3} - \frac{1}{4}c^{2/3}, \quad \frac{c\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{5}{4}c^{2/3} - \frac{1}{4}a^{2/3}$$

Cộng các bất đẳng thức trên cho ta điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra với $a = b = c$. $\square$

Bài toán 4.82. Cho $n \geq 3$ số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = r, \quad \text{và} \quad \max\{a_i\} \leq (1 - r^2)/2r$$

chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i^2} \geq \frac{n}{1+r^2}.$$

Chứng minh. Với mọi số thực dương x , ta tìm k sao cho

$$\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{1+r^2} + k(x-r).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(4.40) \quad (r-x) \left[\frac{r+x}{(1+r^2)(1+x^2)} + k \right] \geq 0.$$

Ta cần chọn k sao cho $x = r$ là một nghiệm của đa thức trong dấu ngoặc vuông, từ đó $k = -2r/(1+r^2)^2$, ta viết (4.40) dưới dạng tương đương

$$(r-x)^2(2rx + r^2 - 1) \leq 0.$$

Điều này chỉ đúng nếu $x \leq (1-r^2)/2r$. Bây giờ sử dụng bất đẳng thức vừa thiết lập cho các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ rồi cộng các bất đẳng thức thu được, ta sẽ có ngay điều phải chứng minh. Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài toán 4.83. Chứng minh rằng với mọi số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a_1^2 + 1} + \sqrt{a_2^2 + 1} + \dots + \sqrt{a_n^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}x + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln x$ với $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{(x-1)(-2x^2 + x - 1 - 2x^2\sqrt{2(x^2+1)})}{x\sqrt{2(x^2+1)}(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{x^2+1})}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Qua 1 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên

$$f(x) \leq f(1) = 0 \quad \forall x > 0$$

hay

$$\sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln x \quad \forall x > 0.$$

Sử dụng bất đẳng thức này cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ rồi cộng lại, ta được

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + 1} &\leq \sqrt{2} \sum_{i=1}^n a_i - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\sum_{i=1}^n \ln a_i\right) \\ &= \sqrt{2} \sum_{i=1}^n a_i - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. $\square$

Cách làm trên đây cho ta một ý tưởng giải quyết lớp các bài toán bất đẳng thức dạng hoán vị, hoặc những bài toán đối xứng có giả thiết tích các số bằng hằng số. Tuy nhiên, sau khi khảo sát một số bài toán khác, chúng tôi thấy rằng kỹ thuật này cũng không hoàn toàn vạn năng theo nghĩa là có những bài mà về mặt hình thức cũng tương tự như trên, nhưng kỹ thuật đó lại đổ vỡ. Lý do là hàm số cần xét không có tính chất ta mong muốn.

Bài toán 4.84. Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 8(a + b + c + d) \geq 24.$$

Chứng minh. Tìm k sao cho

$$\frac{1}{a} + 8a \geq 6 + k\left(a^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi mỗi số bằng $\frac{1}{2}$. Phân tích thành nhân tử, ta viết bất đẳng thức trên dưới dạng

$$(4.41) \quad \left(a - \frac{1}{2}\right) \left[\frac{8a-2}{a} - k\left(a + \frac{1}{2}\right) \right] \geq 0.$$

Ta cần chọn k sao cho biểu thức trong ngoặc vuông nhận $a = \frac{1}{2}$ làm nghiệm, từ đó ta có $k = 4$. Với $k = 4$, bất đẳng thức (4.41) tương đương với $(1-a)(2a-1)^2 \geq 0$. Điều này hiển nhiên đúng với $0 < a < 1$. Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức này bốn lần, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 4.85. Xét ba số thực dương x, y, z , chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + \frac{16x}{y+z}} + \sqrt{1 + \frac{16y}{z+x}} + \sqrt{1 + \frac{16z}{x+y}} \geq 9.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát, ta có thể chọn $x + y + z = 1$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + \frac{16x}{1-x}} \geq 1 + 2x.$$

Bình phương hai vế bất đẳng thức này, nhóm nhân tử chung, với lưu ý rằng $x - \frac{1}{3}$ là một nhân tử, ta thu được bất đẳng thức tương đương $x(x - \frac{1}{3})^2 \geq 0$.

Làm hai bất đẳng thức tương tự, cộng chúng với nhau ta sẽ có ngay điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 4.86. Xét bốn số thực không âm a, b, c, d , chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)(a+d)} \geq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh. Lời giải của Naoki Sato. Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$(a+b)(a+c)(a+d) \leq \left(\frac{a+b+a+c+a+d}{3} \right)^3 = \left(a + \frac{b+c+d}{3} \right)^3.$$

Do đó

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)(a+d)} \geq \frac{a^3}{\left(a + \frac{b+c+d}{3} \right)^3}.$$

⁹Cũng có dạng này, bất đẳng thức sau đây chặt hơn và chưa giải quyết ngay được theo cách trên đây. Với bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 10(a+b+c+d) \geq 28.$$

Sau khi lựa chọn k thích hợp, ta phân tích được $(2a-1)^2(2-3a) \geq 0$. Điều này chỉ đúng nếu $\max(a, b, c, d) \leq \frac{2}{3}$. Có lẽ phải biện luận các trường hợp khác nữa nếu muốn đi theo hướng này.

Không mất tổng quát, ta giả sử rằng $a + b + c + d = 4$. Thế thì

$$\frac{a^3}{\left(a + \frac{b+c+d}{3}\right)^3} = \left(\frac{a}{a + \frac{4-a}{3}}\right)^3 = \left(\frac{3a}{2a+4}\right)^3 = \frac{27}{8} \left(\frac{a}{a+2}\right)^3,$$

do đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum_{\text{cyclic}} \left(\frac{a}{a+2}\right)^3 \geq \frac{4}{27}.$$

Ta sẽ chứng tỏ

$$\left(\frac{x}{x+2}\right)^3 \geq \frac{2x-1}{27}$$

với mọi $x \in [0, 4]$.

Điều này là bởi vì

$$\left(\frac{x}{x+2}\right)^3 - \frac{2x-1}{27} = \frac{2(x-1)^2(-x^2+6x+4)}{27(x+2)^3},$$

và $-x^2 + 6x + 4 \geq 0$ với $3 - \sqrt{13} \leq x \leq 3 + \sqrt{13}$, khoảng này bao hàm cả đoạn $0 \leq x \leq 4$.

Do đó,

$$\sum_{\text{cyclic}} \left(\frac{a}{a+2}\right)^3 \geq \frac{2(a+b+c+d) - 4}{27} = \frac{4}{27}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 4.87. Xét $n \geq 2$ số thực dương thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1,$$

chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{na_1^2 - a_1 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{na_2^2 - a_2 + 1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{na_n^2 - a_n + 1}} \\ \leq n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}). \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta chứng minh rằng nếu x là một số thực sao cho $0 \leq x \leq 1$ thì

$$\frac{1}{\sqrt{nx^2 - x + 1}} \leq 1 - x + \sqrt{\frac{x}{n}}.$$

Ta viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$1 - \frac{1}{\sqrt{nx^2 - x + 1}} \geq x - \sqrt{\frac{x}{n}}.$$

Thực hiện phép biến đổi liên hợp cho ta bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(nx - 1)x}{(1 + \sqrt{nx^2 - x + 1})\sqrt{nx^2 - x + 1}} \geq \frac{(nx - 1)x}{(1 + \sqrt{nx})\sqrt{nx}}.$$

Dễ xác minh được bất đẳng thức này đúng với $0 \leq x \leq 1/n$ hoặc $1/n \leq x \leq 1$.

Bây giờ lần lượt thay x bởi $a_1, a_2, \dots, a_n$ cho ta

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{na_i^2 - a_i + 1}} \leq n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

4.13 Ước lượng qua tam thức bậc hai

Mục này xét đến các ước lượng bất đẳng thức thông qua tam thức bậc hai. Việc xác định các hệ số của tam thức dựa trên hai thông tin quan trọng là thông tin về dấu đẳng thức và yêu cầu khi phân tích, biến đổi tương đương. Cách này làm này giúp ta giải được những bài toán bất đẳng thức tương đối chặt, và khó. Nhược điểm dễ thấy nhất là sau phép ước lượng trung gian, ta cần phải chứng minh bất đẳng thức có bậc khá cao.

Bài toán 4.88. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 - ab} + \frac{1}{1 - bc} + \frac{1}{1 - ca} \leq \frac{9}{2}.$$

Chứng minh. Vì đẳng thức đã cho nên ta có $\max(ab, bc, ca) \leq \frac{1}{2}$. Ta sẽ tìm k, l sao cho

$$\frac{1}{1 - x} \leq k\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) + l\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}.$$

Nhóm nhân tử chung cho ta bất đẳng thức tương đương

$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \left[\frac{2}{3}k\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}l - \frac{1}{1 - x}\right] \leq 0.$$

Ta cần tìm đẳng thức liên hệ giữa k và l sao cho $\frac{1}{3}$ là một nghiệm của

$$g(x) = \frac{2}{3}k\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}l - \frac{1}{1-x}.$$

Thay giá trị $x = \frac{1}{3}$ vào $g(x)$ ta có $l = \frac{9}{4} - \frac{2}{3}k$. Lại thay l vào $g(x)$ để $g(x)$ chỉ còn phụ thuộc vào k . Lúc này ta chỉ cần chọn k sao cho $\frac{1}{2}$ là một nghiệm của

$$\frac{4}{9}k - \frac{1}{1-x} = 0.$$

Từ đó ta chọn được $k = \frac{9}{2}$, và $l = -\frac{1}{4}$. Vậy ta có đánh giá sau

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{9}{2}\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}.$$

Khai triển và rút gọn cho ta

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{13}{12}, \text{ với mọi } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức này với x thay lần lượt bằng ab, bc , và ca , cuối cùng ta cần chứng minh rằng

$$18(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (ab + bc + ca) \leq 5.$$

Viết bất đẳng thức này dưới dạng đồng bậc

$$18(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq 5(a^2 + b^2 + c^2)^2 + (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Khai triển và rút gọn cho ta

$$5(a^4 + b^4 + c^4) + \sum_{\text{cyclic}} a^3(b+c) + abc(a+b+c) \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Chú ý rằng ta có bất đẳng thức quen thuộc

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 4.89. Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3}.$$

Chứng minh. Từ giả thiết dễ dàng suy ra $\max(ab, bc, cd, da) \leq \frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi mỗi trong bốn số bằng $\frac{1}{2}$ nên ta cần chọn k, l sao cho

$$\frac{1}{1-x} \leq k\left(x^2 - \frac{1}{16}\right) + l\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3}, \text{ với mọi } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Biến đổi bất đẳng thức này về dạng

$$\left(x - \frac{1}{4}\right) \left[\frac{3}{4}k\left(x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}l - \frac{1}{1-x} \right] \geq 0.$$

Cần tìm một đẳng thức liên hệ giữa k và l sao cho

$$g(x) = \frac{3}{4}k\left(x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}l - \frac{1}{1-x}$$

nhận $\frac{1}{4}$ làm nghiệm. Thay giá trị $x = \frac{1}{4}$ vào $g(x)$ cho ta $l = \frac{16}{9} - \frac{1}{2}k$. Lại thay l vào $g(x)$ thì $g(x)$ chỉ còn phụ thuộc k , và ta có thể viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left[\frac{9}{16}k - \frac{1}{1-x} \right] \geq 0.$$

Chọn k sao cho $\frac{9}{16}k - \frac{1}{1-x} \geq 0$ với $x \leq \frac{1}{2}$. Từ đó ta chọn $k = \frac{32}{9}$. Suy ra $l = 0$. Vậy

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{32}{9}\left(x^2 - \frac{1}{16}\right) + \frac{4}{3}.$$

Rút gọn về phải cho ta

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{32}{9}x^2 + \frac{10}{9} \text{ với mọi } x \leq \frac{1}{2}.$$

Bây giờ sử dụng bất đẳng thức này để chứng minh bất đẳng thức ban đầu. Ta chỉ cần chứng tỏ

$$\frac{32}{9}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2) + \frac{40}{9} \leq \frac{16}{3}.$$

Lưu ý rằng $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$, theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có điều phải chứng minh.¹⁰ $\square$

Bài toán 4.90. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn

$$a + b + c = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}.$$

¹⁰Bạn Trần Lê Bách có đưa ra cách giải đơn giản nữa bằng việc sử dụng trực tiếp đánh giá sau đây

$$\frac{1}{1-ab} \leq \frac{4}{3} + \frac{32}{9}\left(a^2b^2 - \frac{1}{16}\right).$$

Chứng minh. Từ giả thiết bài toán ta có $\max(ab, bc, ca) \leq \frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi mỗi số bằng $\frac{1}{3}$. Do đó, ta cần tìm k, l sao cho

$$\frac{1}{1-x} \leq k\left(x^2 - \frac{1}{81}\right) + l\left(x - \frac{1}{9}\right) + \frac{9}{8}.$$

Ta tìm được hệ thức liên hệ $l = \frac{81}{64} - \frac{2}{9}k$, và chọn được $l = \frac{57}{64}, k = \frac{27}{16}$. Cuối cùng chuyển bài toán cần chứng minh về dạng

$$27(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 12(ab + bc + ca) \leq 5.$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$ thì bất đẳng thức này chuyển về dạng

$$27q^2 - 54r + 12q \leq 5.$$

Bây giờ áp dụng bổ đề 4.35, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 4.91. Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-abc} + \frac{1}{1-bcd} + \frac{1}{1-cda} + \frac{1}{1-dab} \leq \frac{32}{7}.$$

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra

$$\max(abc, bcd, cda, dab) \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Chú ý rằng đẳng thức trong bất đẳng thức cần chứng minh thỏa mãn khi bốn số bằng nhau. Coi $x = abc$, ta tìm k sao cho ước lượng sau đây thỏa mãn

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{8}{7} + k\left(x^2 - \frac{1}{64}\right).$$

Dễ dàng viết bất đẳng thức này về dạng tương đương

$$(8x-1) \left[\frac{1}{7(1-x)} - \frac{4}{49}(8x+1) \right] \leq 0.$$

Ta cần chọn k sao cho biểu thức trong ngoặc vuông nhận $8x-1$ làm nhân tử. Muốn vậy, $k = \frac{64}{7(1-x)(8x+1)}$, với $x = \frac{1}{8}$. Từ đó suy ra $k = \frac{256}{49}$. Với giá trị này của k ta thu được bất đẳng thức

$$(4.42) \quad \frac{1}{1-x} \leq \frac{8}{7} + \frac{256}{49} \left(x^2 - \frac{1}{64} \right).$$

Thực vậy bất đẳng thức này đúng vì ta viết nó được dưới dạng tương đương $(8x - 1)^2(4x - 3) \leq 0$. Điều này đúng với mọi $x \leq 1/3\sqrt{3}$. Sử dụng ước lượng (4.42) lần lượt cho abc, bcd, cda, dab , bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$(abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \leq \frac{1}{64}.$$

Đây chính là bất đẳng thức ???. Phép chứng minh khá đơn giản bằng cách nhóm và sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân. $\square$

Bài toán 4.92. Xét bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} + \frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-bd} \leq \frac{96}{15}.$$

Chứng minh. Từ giả thiết bài toán, ta có $\max(ab, bc, cd, da) \leq \frac{1}{4}$. Đẳng thức trong bất đẳng thức cần chứng minh đạt được khi mỗi số bằng $\frac{1}{4}$. Từ đó, ta nghĩ tới lựa chọn k, l sao cho

$$\frac{1}{1-x} \leq k\left(x^2 - \frac{1}{256}\right) + l\left(x - \frac{1}{16}\right) + \frac{16}{15}.$$

Nếu chuyển giả thiết bài toán về dạng $a + b + c + d = 4$, thì ta cần tìm k, l sao cho

$$\frac{1}{16-x} \leq k(x^2 - 1) + l(x - 1) + \frac{1}{15}.$$

Từ đó, $l = \frac{1}{225} - 2k$, và $k = \frac{9}{2430}$. Ta có ước lượng

$$\frac{1}{16-x} \leq \frac{1}{2700}x^2 + \frac{9}{2430}x + \frac{123201}{131220}.$$

Bạn đọc tự hoàn thành bài toán này, coi như một bài tập. $\square$

Bạn đọc có thể sử dụng kiến thức trong mục này để giải các bất đẳng thức ??, ?? và các bài sau.

Bài toán 4.93. Xét ba số thực dương x, y, z , hãy tìm số p sao cho

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{x^p}{x^p + y^p + z^p}.$$

Bài toán 4.94. Xét ba số thực không âm x, y, z , hãy tìm số k sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{x(y+z)}{x^2 + (y+z)^2} \leq \frac{kx + y + z}{x + y + z}.$$

Bài toán 4.95. Xét $n \geq 3$ số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$, với $r = \frac{n+1}{n-1}$, và $p = \frac{n+1}{n}$ thì chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + r(a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2}} \geq \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}.$$

Bài toán 4.96. Xét tám số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_8$ thỏa mãn

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_8^3 = 1,$$

chứng minh rằng

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 8} \frac{1}{1 - x_i x_j x_k} \leq 64.$$

Bài tập chương 4

Bài toán 4.97. Chứng minh rằng nếu $x, y, z \geq 0$, thì

$$(x^3 + y^3 + z^3 - xyz)^3 \geq (x^3 + y^3)(y^3 + z^3)(z^3 + x^3).$$

Bài toán 4.98. Xét ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$ab + bc + ca + abc = 4,$$

chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 13abc \geq 16.$$

Bài toán 4.99. Các số thực a, b, c thỏa mãn

$$a + b + c = 2, \text{ và } ab + bc + ca - abc \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(1-a)yz + (1-b)zx + (1-c)xy \leq \frac{1}{4}(ax + by + cz)^2.$$

Bài toán 4.100. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thì

$$26(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2} + 27abc \geq 18(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 4.101. Ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $(1 - xy)(1 - yz)(1 - zx) \geq (\frac{8}{9})^3$.

Bài toán 4.102. Xét bốn số thực không âm a, b, c, d , chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{(2a + b + c + d)^2}{(b + c + d)^2 + a^2} \leq 10.$$

Bài toán 4.103. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì

$$\frac{a^4}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b^4}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c^4}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}.$$

Bài toán 4.104. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Hãy chứng minh rằng giá trị lớn nhất của k để bất đẳng thức sau đúng là $\frac{11}{54}$

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq \frac{4}{27} + k[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Bài toán 4.105. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$, thì

$$\frac{8}{27}(ab + bc + ca)^3 \leq (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq \frac{1}{64}(a + b + c)^6.$$

Bài toán 4.106. Cho ba số thực không âm x, y, z , chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^2}{z^2 + zx + x^2} + \frac{4xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 4.107. Chứng minh rằng nếu $x, y, z, t \geq 0$ thì

$$\left(\frac{3x}{y + z + t} \right)^{3/4} \geq \frac{4x}{x + y + z + t}.$$

Bài toán 4.108. Xét ba số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x + y + z = 1,$$

chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 24(x^2 + y^2 + z^2) + 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?