

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ (Chuyên đề LTĐH 2011)

Để chứng minh các BĐT ta có thể sử dụng một số bất đẳng thức hoặc dùng phương pháp đánh giá.

I. Sử dụng một số BĐT cơ bản:

Các BĐT cơ bản ở đây là BĐT Cô-Si: Với n số không âm bất kì: $a_1; a_2; \dots; a_n$ ($n \geq 2$) ta luôn có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (I); \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

BĐT Bunhiacôpxki: Với hai bộ số thực bất kì $(a_1; a_2; \dots; a_n), (b_1; b_2; \dots; b_n)$ ta luôn có:
 $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ (II); dấu bằng xảy ra khi và chỉ

Khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. BĐT: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (III); dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

BĐT: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ (IV); trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các số này bằng nhau.

Bài 1: Cho $a > b > 0$. Chứng minh:

$$a/a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3; b/a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3; c/a + \frac{1}{b(a-b)^2} \geq 2\sqrt{2}.$$

Giải: a/ Theo BĐT (I) ta có: $b + (a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{b \cdot (a-b) \cdot \frac{1}{b(a-b)}} = 3$

(đpcm).

Dấu bằng xảy ra khi $b = 1; a = 2$.

Bài 2: Cho $a > 1; b > 1$. Chứng minh: $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

Giải: Theo BĐT (I) ta có: $a\sqrt{b-1} = a\sqrt{(b-1).1} \leq a \cdot \frac{(b-1)+1}{2} = \frac{ab}{2}$; tương tự ta cũng có:

$b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2}$. Cộng các vế của các BĐT này lại ta sẽ được đpcm. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 2$.

Bài 2': a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh:
 $ab + bc + ca - abc \leq 8/27$.

Giải: Theo BĐT (I) ta có: $\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{(1-a) + (1-b) + (1-c)}{3} = \frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc = ab+bc+ca-abc \leq 8/27$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1/3$.

Bài 3: Cho ba số không âm a, b, c . Chứng minh:
 $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$.

Giải: Theo BĐT (I) ta có: $4a^3 + b^3 + c^3 \geq 6\sqrt[6]{(a^3)^4 b^3 c^3} = 6a^2\sqrt{bc}$; tương tự ta cũng có:

$4b^3 + c^3 + a^3 \geq 6b^2\sqrt{ca}$; $4c^3 + a^3 + b^3 \geq 6c^2\sqrt{ab}$ cộng các vế của các BĐT này lại rồi đơn giản ta sẽ được BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 3': Cho ba số dương x, y, z . Chứng minh: $(x+y+z)^6 / x^2 y^2 z^2 \geq 432$.

Bài 4: Tìm GTNN của biểu thức $P = (x+y)^9 / x^3 y^6$ trong đó x, y là các số dương.

Giải: Theo BĐT (I) ta có:

$$x + y = 3 \cdot \frac{x}{3} + 6 \cdot \frac{y}{6} \geq 9 \cdot \sqrt[9]{\left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{y}{6}\right)^6} \Leftrightarrow P = \frac{(x+y)^9}{x^3 y^6} \geq \frac{9^9}{3^3 6^6} = \frac{3^9}{2^6}$$

Vậy GTNN của P bằng $3^9 / 2^6$ khi $y = 2x$.

Bài 5: Ba số thực a, b, c thỏa mãn hệ thức: $a^6 + b^6 + c^6 = 3$. Hãy tìm GTLN của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$

Giải: Theo BĐT (I) ta có:

$$a^6 + 1 + 1 \geq 3a^2; b^6 + 1 + 1 \geq 3b^2; c^6 + 1 + 1 \geq 3c^2 \Rightarrow 9 \geq 3S \Leftrightarrow 3 \geq S$$

Vậy GTLN của S bằng 3 khi $a = b = c = 1$.

Bài 6: x, y là các số thực thỏa mãn các điều kiện: $0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$A = (3-x)(4-y)(2x+3y).$$

Giải: Theo BĐT (I) ta có:

$$\sqrt[3]{2(3-x).3(4-y).(2x+3y)} \leq \frac{(6-2x) + (12-3y) + (2x+3y)}{3} = 6$$

$\Leftrightarrow 6A \leq 6^3 \Leftrightarrow A \leq 36$. Vậy GTLN của A bằng 36 khi $x = 0$ và $y = 2$.

Bài 7: x, y, z là các số không âm có tổng bằng 1. Tìm GTLN của biểu thức:
 $P = xyz(x+y)(y+z)(z+x)$.

Bài 8: a, b, c là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{a^{m+n}}{b^m} + \frac{b^{m+n}}{c^m} + \frac{c^{m+n}}{a^m} \geq a^n + b^n + c^n \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$$

Giải: Theo BĐT (I) ta có: $n \frac{a^{m+n}}{b^m} + mb^n \geq (m+n)^{m+n} \sqrt[n]{\left(\frac{a^{m+n}}{b^m}\right)^n} (b^n)^m = (m+n)a^n$.

Tương tự

ta cũng có: $n \frac{b^{m+n}}{c^m} + mc^n \geq (m+n)b^n$; $n \frac{c^{m+n}}{a^m} + ma^n \geq (m+n)c^n$. Cộng các BĐT này lại rồi đơn giản ta sẽ được BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Chú ý: Nếu $m = n = 1$ thì ta được BĐT: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

Bài 9: Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Giải: Theo BĐT (I) ta có: $\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^3}{b(c+a)} \frac{b}{2} \frac{c+a}{4}} = \frac{3a}{2}$.

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3b}{2}; \quad \frac{c^3}{a(b+c)} + \frac{a}{2} + \frac{b+c}{4} \geq \frac{3c}{2}.$$

Cộng các vế của các BĐT này lại rồi đơn giản ta sẽ được BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 10: Các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z \geq 6$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{x+z} + \frac{z^3}{y+x}.$$

Bài 11: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn hệ thức: $a + b + c = 6$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \left(1 + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 + \frac{1}{b^3}\right)\left(1 + \frac{1}{c^3}\right).$$

Bài 12: Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn hệ thức: $x + y + z = 0$. Chứng minh:

$$S = \sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 6$$

Giải: Theo BĐT (I) ta có: $\sqrt{3 + 4^x} = \sqrt{1 + 1 + 1 + 4^x} \geq \sqrt{4\sqrt[4]{4^x}} = 2.2^{x/4}$. Tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{3 + 4^y} \geq 2.2^{y/4}; \sqrt{3 + 4^z} \geq 2.2^{z/4} \Rightarrow S \geq 2(2^{x/4} + 2^{y/4} + 2^{z/4}) \geq 2.3\sqrt[3]{2^{(x+y+z)/4}} = 6$$

(đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Bài 13: Cho hai số thực dương x, y có tổng bằng 1. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = \frac{x}{\sqrt{1-y}} + \frac{y}{\sqrt{1-x}}.$$

Giải: Dễ thấy S dương. Theo BĐT (I) ta có:

$$S^2 + x + y \geq \frac{x^2}{y} + 2\sqrt{xy} + \frac{y^2}{x} + 2\sqrt{xy} \geq$$

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}xy} + 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}xy} = 3(x + y) \Rightarrow S^2 \geq 2 \Leftrightarrow S \geq \sqrt{2}. \text{ Vậy } \min S = \sqrt{2} \text{ khi } x = y = 1/2.$$

Bài 14: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c \geq 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}}.$$

Bài 15: Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn hệ thức: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$S = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq \sqrt{3}.$$

Bài 16: Cho 3 số dương x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh BĐT:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \leq \frac{3}{2}.$$

Giải: Do $xy + z = xy + z(x + y + z) = (x + z)(y + z)$ nên theo BĐT (I) ta có:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy + z}} = \sqrt{\frac{x}{x + z} \cdot \frac{y}{y + z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x + z} + \frac{y}{y + z} \right). \text{ Tương tự ta cũng có:}$$

$$\sqrt{\frac{yz}{yz + x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x + y} + \frac{z}{x + z} \right); \quad \sqrt{\frac{xz}{xz + y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x + y} + \frac{z}{y + z} \right)$$

Cộng các BĐT trên ta sẽ được BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1/3$.

Bài 17: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $x + y \geq 6$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}.$$

Giải: Theo BĐT (I) ta có:

$$P = \frac{3x}{2} + \frac{6}{x} + \frac{y}{2} + \frac{8}{y} + \frac{3x}{2} + \frac{3y}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{6}{x}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{y}{2} \cdot \frac{8}{y}} + \frac{3}{2} \cdot 6 \\ = 6 + 4 + 9 = 19. \text{ Vậy Min} P = 19 \text{ khi } x = 2 \text{ và } y = 4.$$

Bài 18: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = \frac{3yz}{x} + \frac{4xz}{y} + \frac{5xy}{z}.$$

Giải: Theo BĐT (I) ta có:

$$S = \left(\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \right) + 2 \left(\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z} \right) + 3 \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} \right) \geq 2z + 4y + 6x =$$

$$2(x + z) + 4(x + y) \geq 4\sqrt{xz} + 8\sqrt{xy} = 4. \text{ Vậy Min} S = 4 \text{ khi } x = y = z = 1/3.$$

Bài 19: Cho hai số thực không âm x, y thỏa mãn các điều kiện: $x + y \leq 4; 3x + y \leq 6$.

Tìm GTLN của biểu thức: $P = 9\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{y}$.

Giải: Theo BĐT (I) ta có: $P = 3 \cdot 3\sqrt[3]{x \cdot 1 \cdot 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{y \cdot 3} \leq 3(x + 2) + \frac{2}{\sqrt{3}}(y + 3)$

$$= a(x+y) + b(3x+y) + 6 + 2\sqrt{3} \leq 4a + 6b + 6 + 2\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{2} + 6 \cdot \frac{9-2\sqrt{3}}{6} + 6 + 2\sqrt{3}$$

$$= 9 + 4\sqrt{3}. \text{ (Do)}$$

$$a + 3b = 3 \text{ \& } a + b = 2/\sqrt{3} \Rightarrow a = (2\sqrt{3}-3)/2 \text{ \& } b = (9-2\sqrt{3})/6.$$

Vậy $MaxP = 9 + 4\sqrt{3}$ khi $x=1$ \& $y=3$.

Bài 20: Cho 3 số dương a,b,c. Chứng minh BĐT:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Giải: Theo BĐT (IV) ứng với $n=2$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a+b+c} &= \frac{1}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{1}{a+2b+c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right); \quad \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} \right).$$

Cộng các vế của các

BĐT này lại rồi đơn giản ta sẽ được BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 21: Cho hai số dương a,b có tổng bằng 1. Chứng minh các BĐT sau:

$$a/\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq 6; \quad b/\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \geq 14.$$

Giải: a/ Theo BĐT (IV) ứng với $n=2$ ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq$$

$$\frac{2}{(a+b)^2} + \frac{4}{2ab+a^2+b^2} = 2 + 4 = 6 \text{ (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi } a=b=1/2.$$

$$a=b=1/2.$$

Bài 22: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $a+b+c \leq 3/2$.

Chứng minh:

$$a+b+c + 1/a + 1/b + 1/c \geq 15/2.$$

Bài 23: Ba số dương x,y,z có tích bằng 1. Chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z$.

Giải: Áp dụng BĐT (II) và (I) ứng với $n = 3$ ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} = (x + y + z).$$

$$\frac{x + y + z}{3} \geq (x + y + z) \cdot \sqrt[3]{xyz} = x + y + z \text{ (đpcm)}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = 1.$$

Chú ý: Từ BĐT trên ta suy ra BĐT: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ với a, b, c là các số dương.

Bài 24: Cho $a > c > 0; b > c > 0$. Chứng minh: $\sqrt{c(b-c)} + \sqrt{c(a-c)} \leq \sqrt{ab}$.

Giải: Áp dụng BĐT (II) cho hai bộ số $(\sqrt{c}; \sqrt{a-c})$ & $(\sqrt{b-c}; \sqrt{c})$ ta được:

$(\sqrt{c(b-c)} + \sqrt{c(a-c)})^2 \leq (c + a - c)(b - c + c) = ab$ từ đó suy ra BĐT ccm. Dấu bằng xảy ra khi

$$ab = c(a + b)$$

Bài 25: Cho 4 số dương x, y, a, b thỏa mãn các điều kiện: $a > x; a + b > x + y$. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{x + y} + \frac{(a - x)^2}{a + b - x - y} \geq \frac{a^2}{a + b}.$$

Giải: Áp dụng BĐT (II) cho hai bộ số

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x + y}}; \frac{a - x}{\sqrt{a + b - x - y}} \right) \& (\sqrt{x + y}; \sqrt{a + b - x - y}) \text{ ta}$$

được: $\left(\frac{x^2}{x + y} + \frac{(a - x)^2}{a + b - x - y} \right) (x + y + a + b - x - y) \geq (x + a - x)^2$ từ đó suy ra

BĐT ccm. Dấu bằng xảy ra khi $bx = ay$.

Bài 26: Bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn hệ thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$; x là số thực bất kì. Chứng minh:

$$(x^2 + ax + b)^2 + (x^2 + cx + d)^2 \leq (2x^2 + 1)^2$$

Giải: Áp dụng BĐT (II) ứng với $n = 3$ ta có:

$$(x^2 + ax + b)^2 \leq (x^2 + x^2 + 1^2)(x^2 + a^2 + b^2);$$

$(x^2 + cx + d)^2 \leq (x^2 + x^2 + 1^2)(x^2 + c^2 + d^2) \Rightarrow$
 $(x^2 + ax + b)^2 + (x^2 + cx + d)^2 \leq$
 $(2x^2 + 1)(x^2 + a^2 + b^2 + x^2 + c^2 + d^2) = (2x^2 + 1)^2$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi
 $b=d=1$ & $x=a=c$.

Bài 27: Cho 5 số dương x, y, z, p, q bất kì. Chứng minh:

$$\frac{x}{py + qz} + \frac{y}{pz + qx} + \frac{z}{px + qy} \geq \frac{3}{p + q}.$$

Giải: Theo BĐT (III) ta có:

$$x(py + qz) + y(pz + qx) + z(px + qy) = (p + q)(xy + yz + zx) \leq$$

$(p + q)(x + y + z)^2 / 3$ (*). Áp dụng BĐT (II) cho hai bộ số

$$\left(\sqrt{\frac{x}{py + qz}}; \sqrt{\frac{y}{pz + qx}}; \sqrt{\frac{z}{px + qy}} \right) \text{ và}$$

$(\sqrt{x(py + qz)}; \sqrt{y(pz + qx)}; \sqrt{z(px + qy)})$ ta được:

$$\left(\frac{x}{py + qz} + \frac{y}{pz + qx} + \frac{z}{px + qy} \right) [x(py + qz) + y(pz + qx) + z(px + qy)] \geq (x + y + z)^2$$

Kết hợp với BĐT (*) ta sẽ được BĐT ccm. Dấu bằng xảy ra khi;

$$py + qz = pz + qx = px + qy.$$

Bằng cách giải tương tự ta sẽ chứng minh được các BĐT sau:

$$1/ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2} \text{ với } a, b, c \text{ là các số dương bất kì.}$$

$$2/ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{d+c} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2 \text{ với } a, b, c, d \text{ là các số dương bất kì.}$$

$$3/ \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \geq \frac{a+b+c}{2} \text{ với } a, b, c \text{ là các số dương bất kì.}$$

$$4/ \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{b+a-c} \geq a+b+c \text{ với } a, b, c \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác.}$$

5/ $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{b+a-c} \geq 3$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 28: Cho các số thực x,y,u,v thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh:

$$|u(x-y) + v(x+y)| \leq \sqrt{2}$$

Giải: Theo BĐT (II) :

$$[u(x-y) + v(x+y)]^2 \leq (u^2 + v^2)[(x-y)^2 + (x+y)^2] = 2(x^2 + y^2) = 2$$

Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $u(x+y) = v(x-y)$.

Bài 29: Cho a,b,c là 3 số dương thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{b+a} \geq \frac{1}{2}$$

Giải: Theo BĐT (II) ta có:

$$\left(\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{b+a} \right) [a(b+c) + b(a+c) + c(b+a)] \geq$$

$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2) \geq ab + bc + ca$. Từ đó ta suy ra BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}/3$.

Bài 30: Ba số x,y,z thỏa mãn điều kiện: $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq 4/3$. Chứng minh:

$$-1 \leq x + y + z \leq 4.$$

Giải: Từ điều kiện ta suy ra: $(x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 + (z-1/2)^2 \leq 25/12$. Áp dụng BĐT (II) ta được:

$$[1.(x-1/2) + 1.(y-1/2) + 1.(z-1/2)]^2 \leq 3[(x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 + (z-1/2)^2] \leq :$$

$$\Rightarrow |x + y + z - 3/2| \leq 5/2 \Leftrightarrow -5/2 \leq x + y + z - 3/2 \leq 5/2 \Leftrightarrow -1 \leq x + y + z \leq 4$$

(đpcm).
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 4/3$.

Bài 31: Hai số a,b thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + 16 = 8a + 6b$. Chứng minh:
 $a/10 \leq 4a + 3b \leq 40; b/7b \leq 24a$

Giải: a/ Từ điều kiện ta suy ra: $(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9$. Áp dụng BĐT (II) ta được:

$$[4(a-4) + 3(b-3)]^2 \leq [(a-4)^2 + (b-3)^2](4^2 + 3^2) = 9.25 \Leftrightarrow |4a + 3b - 25| \leq 15$$

$\Leftrightarrow -15 \leq 4a + 3b - 25 \leq 15 \Leftrightarrow 10 \leq 4a + 3b \leq 40$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi $a = 24/5, b = 24/3$
hoặc $a = 16/5, b = 6/5$.

Bài 32: Ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z \leq 0$. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức:

$$S = 2x + 3y - 2z.$$

Bài 33: Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn hệ thức: $a + b + c = \sqrt{3}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = \sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{c^2 + cb + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Giải: Theo BĐT (II) ta có:

$$(a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{4}{3} = \left[\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}b}{2} \right)^2 \right] \left[1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \geq \left(a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right)^2 = (a+b)^2$$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + ab + b^2} \geq \sqrt{3}(a+b)/2$. Tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{c^2 + cb + b^2} \geq \sqrt{3}(c+b)/2 ;$$

$$\sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \sqrt{3}(c+a)/2 \Rightarrow S \geq \sqrt{3}(a+b+c) = 3. \text{ Vậy Min} S = 3 \text{ khi } a = b = c = \sqrt{3}/3.$$

II. Sử dụng phương pháp đánh giá:

Bài 34: Cho 3 số dương a, b, c . Chứng minh các BĐT sau:

$$a / \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{a^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{abc};$$
$$b / \frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}.$$

Giải: a/ Ta có:

$$a^3 + b^3 + abc = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + abc \geq (a+b)ab + abc = ab(a+b+c) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}. \text{ Tương tự ta cũng có các}$$

BĐT:

$$\frac{1}{c^3 + b^3 + abc} \leq \frac{a}{abc(a+b+c)}; \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{b}{abc(a+b+c)}. \text{ Cộng các vế của}$$

các BĐT này lại

thì giả sử ta sẽ được BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

b/ Theo BĐT (I) ta có:

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{2a\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{2abc} \leq \frac{b+c}{4abc}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{1}{b^2 + ac} \leq \frac{a+c}{4abc}; \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{b+a}{4abc}.$$

Cộng các vế của các BĐT này lại rồi đơn giản ta sẽ được BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 35: Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zy} + \frac{1}{1+zx}.$$

Bài 36: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 2. Chứng minh:

$$S = \frac{ab}{2-c} + \frac{cb}{2-a} + \frac{ac}{2-b} \leq 1.$$

Bài 37: Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $1/a + 1/b + 1/c = 3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$S = \frac{ab}{a^3 + b^3} + \frac{cb}{c^3 + b^3} + \frac{ac}{a^3 + c^3}.$$

Bài 38: Cho ba số dương x, y, z có tích bằng 8. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = \sqrt{\log_2^2 x + 1} + \sqrt{\log_2^2 y + 1} + \sqrt{\log_2^2 z + 1}.$$

Giải:

Ta

có:

$$S \geq \sqrt{\frac{(\log_2 x + 1)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(\log_2 y + 1)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(\log_2 z + 1)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\log_2 x + 1| + |\log_2 y + 1| + |\log_2 z + 1|) \\ \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |3 + \log_2 xyz| = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}. \text{ Vậy } \min S = 3\sqrt{2} \text{ khi } x = y = z = 2.$$

Bài 39: Cho 3 số thực x, y, z có tổng bằng 1. Tìm GTNN của biểu thức:
 $S = x^4 + y^4 + z^4 - xyz$.

Giải: Theo BĐT (II) ta có:

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}(x + y + z)^2 \right]^2 = \frac{1}{27}. \text{ Áp dụng}$$

BĐT (I) ta được:

$$S = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{4} + \frac{3}{4} \left(x^4 + y^4 + z^4 + \frac{1}{3^4} \right) - \frac{1}{4 \cdot 27} - xyz \geq \frac{1/27}{4} + \frac{3}{4} \cdot 4 \frac{|xyz|}{3} - \frac{1}{4 \cdot 27} - xyz = |xyz| - xyz \geq 0. \text{ Vậy } \min S = 0 \text{ khi } x = y = z = 1/3.$$

Bài 40: Cho 3 số dương x, y, z bất kì. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = \frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy}.$$

Bài 41: Cho 3 số dương x, y, z bất kì. Chứng

minh: $S = \frac{2x}{y^4 + z^6} + \frac{2y}{z^4 + x^6} + \frac{2z}{x^4 + y^6} \leq \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4}.$

III. Chứng minh BĐT hoặc tìm cực trị bằng phương pháp đổi biến:

Bài 42: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn hệ thức: $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh BĐT:

$$S = \frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{cb} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ac} \geq \sqrt{3}.$$

Giải: Đặt $x = 1/a, y = 1/b, z = 1/c$ thì điều kiện trở thành: $x + y + z = 1$ và BĐT trở thành:

$$S = \sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \sqrt{3}. \text{ Theo BĐT (II) ta có:}$$

$$S \geq \sqrt{(x + 2y)^2 / 3} + \sqrt{(y + 2z)^2 / 3} + \sqrt{(z + 2x)^2 / 3} = 3(x + y + z) / \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ (đpcm).}$$

Đấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1/3$ hay $a = b = c = 3$.

Bài 43: Cho 3 số thực dương x, y, z có tích bằng 1. Chứng minh BĐT:

$$S = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(x+z)} + \frac{1}{z^3(y+x)} \geq \frac{3}{2}.$$

Giải: Đặt $x = 1/a, y = 1/b, z = 1/c$ thì điều kiện trở thành: $abc = 1$ và BĐT trở thành:

$$S = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \geq \frac{3}{2}. \text{Áp dụng BĐT (II) \& (I) ta có}$$

$$\text{ngay: } S \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 1$.

Bài 44: Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $1/x + 1/y + 1/z = 1$. Chứng minh BĐT:

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+xz} + \sqrt{z+yx} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Giải: Đặt $x = 1/a, y = 1/b, z = 1/c$ thì điều kiện trở thành: $a+b+c = 1$ và BĐT trở thành:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}. \text{Ta có:}$$

$$\sqrt{a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc} \geq \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc} = \sqrt{(a+\sqrt{bc})^2} = a + \sqrt{bc}.$$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{b+ac} \geq b + \sqrt{ac}; \sqrt{c+ab} \geq c + \sqrt{ab}$. Cộng các BĐT này lại ta sẽ được BĐT ccm.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1/3$ hay $x = y = z = 3$.

Bài 45: Cho hai số thực x, y khác 0 và thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 2x^2y + y^2x$.

Tìm GTNN và

GTLN của biểu thức: $S = 2/x + 1/y$.

Giải: Đặt $u = 1/x$ & $v = 1/y$ thì điều kiện trở thành:

$$u^2 + v^2 = u + 2v \Leftrightarrow (u - 1/2)^2 + (v - 1)^2 = 5/4. \text{ Theo BĐT (II) ta có:}$$

$$(S - 2)^2 = [2(u - 1/2) + v - 1]^2 \leq (2^2 + 1^2)[(u - 1/2)^2 + (v - 1)^2] \leq 25/4 \Rightarrow -5/2 \leq S - 2 \leq 5/2 \\ \Rightarrow -0,5 \leq S \leq 4,5. \text{ Vậy MinS} = -0,5 \text{ khi } x = -2; y = 2. \text{ MaxS} = 4,5 \text{ khi } x = y = 2/3.$$

Bài 46: Hai số thực x, y thỏa mãn các điều kiện: $y \leq 0$ & $x^2 + x = y + 12$. Tìm GTNN và GTLN

của biểu thức: $A = xy + x + 2y + 17$.

Giải: Từ điều kiện ta suy ra: $y = x^2 + x - 12 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 3$;

đồng thời $A = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$

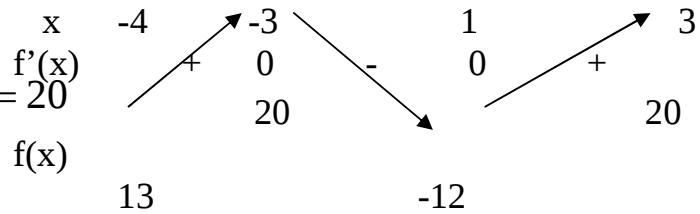
Từ BBT của hàm số ta suy ra:

$$\text{Max}A = \text{Max}f(x) = f(-3) = f(3) = 20$$

$$[-4; 3]$$

$$\text{Min}A = \text{Min}f(x) = f(1) = -12$$

$$[-4; 3]$$



Bài 47: Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = (x+1)(1+1/y) + (y+1)(1+1/x)$$

Bài 48: Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTNN và GTLN

$$\text{của biểu thức: } T = \frac{4x^2 + 2xy - 1}{2xy - 2y^2 + 3}$$

Giải: Từ điều kiện ta suy ra: $T = \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3x^2 + 2xy + y^2}$. Nếu $y = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow T = 1$.

Nếu $y \neq 0$ đặt

$$t = x/y \Rightarrow T = \frac{3t^2 + 2t - 1}{3t^2 + 2t + 1} \Leftrightarrow (3T - 3)t^2 + 2(T - 1)t + T + 1 = 0(*). (*) \text{ không có}$$

nghiệm khi $T = 1$

Với $T \neq 1, (*)$ có $\Delta' = (T - 1)(-2T - 4) \geq 0$ khi $-2 \leq T < 1$. Kết hợp với trên ta có:

$\text{Min}T = -2$ khi $x = \pm\sqrt{10}/10; y = \mp 3\sqrt{10}/10$. $\text{Max}T = 1$ khi $x = \pm 1$ và $y = 0$.

Bài 49: Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện: $x + y = 5/4$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S = 4/x + 1/4y.$$

Bài 50: Cho hai số không âm x, y có tổng bằng 1. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức:

$$S = \sqrt{1 + x^{2008}} + \sqrt{1 + y^{2008}}.$$

Giải: Ta có:

$$S = f(x) = \sqrt{1+x^{2008}} + \sqrt{1+(1-x)^{2008}}. f'(x) = \frac{1004x^{2007}}{\sqrt{1+x^{2008}}} - \frac{1004(1-x)^{2007}}{\sqrt{1+(1-x)^{2008}}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2007} \sqrt{1+(1-x)^{2008}} = (1-x)^{2007} \sqrt{1+x^{2008}} \Leftrightarrow x^{4014} [1+(1-x)^{2008}] =$$

$$(1-x)^{4014} (1+x^{2008}) \Leftrightarrow [x^{4014} - (1-x)^{4014}] + x^{2008} (1-x)^{2008} [x^{2006} - (1-x)^{2006}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)P_1(x) + x^{2008}(1-x)^{2008}(2x-1)P_2(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=1/2.$$

(Vì x và 1-x không đồng thời bằng 0 nên $P_1(x) > 0; P_2(x) > 0$)

Do

$$f(0) = f(1) = 1 + \sqrt{2}; f(1/2) = 2\sqrt{1+1/2^{2008}} \Rightarrow \text{Max}S = 1 + \sqrt{2}; \text{Min}S = 2\sqrt{1+1/2^{2008}}$$