# Mục lục

# GIỚI HẠN CỦA CÁC DÃY SỐ SINH BỞI CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH

NGUYỄN TÀI CHUNG
**GV THPT Chuyên Hùng Vương, Gia Lai.**

Giới hạn của các dãy số sinh bởi các đại lượng trung bình đã xuất hiện rải rác trong các kì thi học sinh giỏi. Bài viết này nhằm trình bày một cách đầy đủ và có hệ thống các bài toán về giới hạn của các dãy số sinh bởi các đại lượng trung bình.

## 0.1 Giới hạn của các dãy số sinh bởi các đại lượng trung bình

**Định nghĩa 1.** *Ta gọi trung bình bậc $r$ của $n$ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là biểu thức xác định bởi:*

$$\Delta_r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}},$$

*nếu $r \neq 0$, và*

$$\Delta_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \lim_{r\to 0} \Delta_r(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

**Chú ý 1.** *Đặc biệt khi $r = 1$ ta có trung bình cộng, khi $r = -1$ ta có trung bình điều hòa, khi $r = 2$ ta có trung bình bình phương (hay còn gọi là trung bình toàn phương).*

**Nhận xét 1.** *Ta chứng minh được nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số dương khác 1 thì*

$$\Delta_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \qquad (*)$$

*Do đó khi $r = 0$, ta có trung bình nhân. Còn $(*)$ được chứng minh như sau: Ta có*

$$\ln\left[\Delta_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right] = \ln\left[\lim_{r\to 0} \Delta_r(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right]$$

$$= \ln\left[\lim_{r\to 0}\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}\right] = \lim_{r\to 0}\left[\ln\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$= \lim_{r\to 0}\left[\frac{\ln\left(\dfrac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)}{r}\right] \overset{Lopitan}{=} \lim_{r\to 0}\left[\frac{\left(\dfrac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)'}{\dfrac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}}\right]$$

$$= \lim_{r\to 0}\left[\frac{\left(\dfrac{a_1^r \ln a_1 + a_2^r \ln a_2 + \cdots + a_n^r \ln a_n}{n}\right)}{\dfrac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}}\right] = \frac{\ln(a_1 a_2 \ldots a_n)}{n}$$

$$= \ln\left[(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}\right].$$

*Do đó*

$$\Delta_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

**Nhận xét 2.** *Theo nhận xét* **1**, *trang 2 ta có ngay: Với* $a > 0, b > 0$ *thì*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m = \sqrt{ab}.$$

*Tuy nhiên ta có thể chứng minh sơ cấp hơn như sau (không sử dụng quy tắc Lôpitan): Ta có*

$$\begin{aligned}\frac{\ln\sqrt{ab}}{m} &= \ln(ab)^{\frac{1}{2m}} = \ln\left(a^{\frac{1}{2m}}b^{\frac{1}{2m}}\right) \le \ln\left(\frac{a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)\\ &= \ln\left[\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{m}} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{m}} - 1\right) + 1\right]\\ &< \frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{m}} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{m}} - 1\right).\end{aligned}$$

*Vậy*

$$\ln\sqrt{ab} \le \ln\left(\frac{a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m \le \frac{1}{2}\left[m\left(a^{\frac{1}{m}} - 1\right) + m\left(b^{\frac{1}{m}} - 1\right)\right],\ \forall m = 1, 2, \ldots$$

*Từ đây, cho* $m \to +\infty$ *ta được*

$$\lim_{m\to\infty}\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m = \ln\sqrt{ab} \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m = \sqrt{ab}.$$

**Nhận xét 3.** *Ta chứng minh được kết quả: Dãy*

$$\Delta_r(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

*là sắp được theo* $r$ *như là một hàm đồng biến của hàm số biến* $r \in \mathbb{R}$. *Kết quả này rất quan trọng, nó định hướng cho ta trong quá trình so sánh các dãy số được thành lập từ các đại lượng trung bình.*

**Nhận xét 4.** *Đối với các dãy số được thành lập từ các đại lượng trung bình thì giới hạn của các dãy số thường là bằng nhau và thường thì ta tìm được số hạng tổng quát của các dãy số đó.*

### 0.1.1 Trường hợp cùng chỉ số

**Bài toán 1 (Cộng cùng-nhân cùng).** *Cho dãy số* $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ *và* $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ *được xác định như sau*

$$x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}, y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}.$$

*Chứng minh rằng hai dãy số đã cho có giới hạn và* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

**Giải.** Từ giả thiết suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots$ thì $x_n > 0, y_n > 0$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} = y_{n+1} \Rightarrow x_n \geq y_n, \forall n = 2, 3, \ldots$$

Suy ra

$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{y_n y_n} = y_n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy

$$y_n \geq y_{n-1} \geq \cdots \geq y_2 = \sqrt{ab}.$$

Tương tự ta có

$$x_{n+1} \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 = \frac{a+b}{2}.$$

Vậy nên

$$\sqrt{ab} \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_n \leq x_n \leq \cdots \leq x_3 \leq x_2 = \frac{a+b}{2}.$$

Suy ra dãy số $(x_n)$ giảm, bị chặn dưới bởi $\sqrt{ab}$, còn dãy $(y_n)$ tăng và bị chặn trên bởi $\frac{a+b}{2}$. Do đó chúng hội tụ. Đặt

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \beta.$$

Khi đó từ giả thiết $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$ cho $n \to +\infty$ ta được

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Vậy hai dãy số đã cho có giới hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

**Bài toán 2 (Cộng cùng-điều hòa cùng).** *Cho hai số dương* $a, b$. *Xét các dãy số* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *và* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *như sau*

$$a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}, \forall n = 1, 2, ...$$

*Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

**Giải.**

**Cách 1.** Dễ thấy với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ ta có

$$a_n > 0,\ \ b_n > 0,\ \ b_{n+1} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}.$$

Vì vậy

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.\frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Suy ra

$$a_nb_n = \cdots = a_1b_1 = ab, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \frac{a_n - \sqrt{a_nb_n}}{a_n + \sqrt{a_nb_n}}\\
=&\frac{\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_nb_n}}{\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} + \sqrt{a_nb_n}} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} - 2\sqrt{a_nb_n}}{a_{n-1} + b_{n-1} + 2\sqrt{a_nb_n}}\\
=&\frac{a_{n-1} + b_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{a_{n-1} + b_{n-1} + 2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}} = \left(\frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Do đó, phép quy nạp theo $n$ chứng tỏ rằng

$$\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \left(\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{b_1}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)^{2^{n-1}},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)^{2^{n-1}} = 0 \ \left(\text{do } \left|\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right| < 1\right).$$

Theo trên suy ra

$$\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \frac{a_n - \sqrt{ab}}{a_n + \sqrt{ab}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \sqrt{ab}}{a_n + \sqrt{ab}} = 0.$$

Đặt

$$\frac{a_n - \sqrt{ab}}{a_n + \sqrt{ab}} = x_n \Leftrightarrow a_nx_n + \sqrt{ab}x_n = a_n - \sqrt{ab} \Leftrightarrow a_n = \frac{\sqrt{ab}(x_n + 1)}{1 - x_n}.$$

Khi đó

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{ab}(x_n + 1)}{1 - x_n} = \sqrt{ab}\ (\text{do } \lim_{n\to+\infty} x_n = 0).$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{ab}{a_n} = \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

**Cách 2.** Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}} \le \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{a_n}.\frac{1}{b_n}}} = \sqrt{a_nb_n} \le \frac{a_n+b_n}{2} = a_{n+1}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Với mọi $n = 2, 3, \ldots$ ta có

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \le \frac{a_n+a_n}{2} = a_n,$$

$$b_{n+1} \ge b_n \Leftrightarrow \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \ge b_n \Leftrightarrow a_nb_n \ge b_n^2 \Leftrightarrow a_n \ge b_n \text{ (đúng)}.$$

Hay ta viết lại

$$\frac{2ab}{a+b} = b_2 \le \cdots \le b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n \le \cdots \le a_2 = \frac{a+b}{2}.$$

Vậy kể từ số hạng thứ hai trở đi dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ giảm và bị chặn dưới bởi số $\frac{2ab}{a+b}$ nên có giới hạn, dãy số $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ tăng và bị chặn trên bởi số $\frac{a+b}{2}$ nên có giới hạn. Đặt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$$

Khi đó từ giả thiết $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$ cho $n \to +\infty$ ta được

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Vậy hai dãy số đã cho có giới hạn và

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Từ $\lim_{n\to\infty} (a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} (ab) = ab$ ta có $\lim_{n\to\infty} a_n. \lim_{n\to\infty} b_n = ab$. Do đó $\alpha\beta = ab$, mà $\alpha = \beta \ge 0$ nên suy ra $\alpha = \beta = \sqrt{ab}$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

**Bài toán 3 (Nhân cùng-điều hòa cùng).** *Cho các dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ xác định như sau*

$$a_1 = a > 0,\ b_1 = b > 0,\ a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}},\ b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n} \quad (\forall n = 1, 2, \ldots)$$

*Chứng minh hai dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và hai giới hạn đó bằng nhau.*

**Hướng dẫn.** Theo giả thiết ta có

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}{2},\ \ \frac{1}{b_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{a_n}.\frac{1}{b_n}},\forall n=1,2,\dots$$

Đặt $\frac{1}{a_n}=x_n$, $\frac{1}{b_n}=y_n$. Khi đó $x_1=\frac{1}{a}>0$, $y_1=\frac{1}{b}>0$ và

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},\ \ y_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\forall n=1,2,\dots$$

Vậy theo bài toán **1** suy ra hai dãy $(x_n)$, $(y_n)$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$. Do đó hai dãy $(a_n)$, $(b_n)$ hội tụ và

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n.$$

**Bài toán 4 (Trung bình bậc r cùng-nhân cùng).** *Cho trước ba số dương $a$, $b$ và $r$. Xét hai dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ và $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau*

$$x_1=a,y_1=b,x_{n+1}=\left(\frac{x_n^r+y_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}},y_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}.$$

*Chứng minh rằng hai dãy số đã cho hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.*

**Giải.** Từ giả thiết suy ra với mọi $n=1,2,\dots$ thì $x_n>0,y_n>0$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x_{n+1}=\left(\frac{x_n^r+y_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}\geq\left(\sqrt{x_n^r.y_n^r}\right)^{\frac{1}{r}}=\sqrt{x_ny_n}=y_{n+1},\forall n=1,2,\dots$$

Suy ra

$$y_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geq\sqrt{y_ny_n}=y_n,\forall n=2,3,\dots$$

Vậy

$$y_n\geq y_{n-1}\geq\cdots\geq y_2=\sqrt{ab}.$$

Tương tự ta có

$$x_{n+1}=\left(\frac{x_n^r+y_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}\leq\left(\frac{x_n^r+x_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}=x_n,\forall n=2,3,\dots$$

Suy ra

$$x_{n+1}\leq x_n\leq\cdots\leq x_2=\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Vậy nên

$$\sqrt{ab}\leq y_2\leq y_3\leq\cdots\leq y_n\leq x_n\leq\cdots\leq x_3\leq x_2=\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Suy ra dãy số $(x_n)$ giảm, bị chặn dưới bởi $\sqrt{ab}$ còn dãy $(y_n)$ tăng và bị chặn trên bởi $\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$. Do đó chúng hội tụ. Đặt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

Khi đó từ giả thiết $x_{n+1} = \left(\frac{x_n^r+y_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}, \forall n = 1, 2, \ldots$ cho $n \to +\infty$ ta được.

$$\alpha = \left(\frac{\alpha^r+\beta^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} \Leftrightarrow \alpha^r = \frac{\alpha^r+\beta^r}{2} \Leftrightarrow \alpha^r = \beta^r \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Vậy hai dãy số đã cho có giới hạn và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

### 0.1.2 Trường hợp lệch chỉ số

**Bài toán 5 (Cộng cùng-cộng lệch).** *Cho trước $a, b \in \mathbb{R}$. Xét hai dãy $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ và $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau:*

$$u_1 = a, v_1 = b, u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2}$$

*Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n, \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.*

**Giải.** Ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2},\ \ v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ ta có

$$u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} + \lambda\frac{u_n+3v_n}{4} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}\right)u_n + \left(\frac{1}{2}+\frac{3\lambda}{4}\right)v_n.$$

Ta chọn $\lambda$ sao cho

$$\frac{1}{2}+\frac{3\lambda}{4} = \lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}\right) \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=-1\\ \lambda=2.\end{array}\right.$$

Vậy với $\lambda \in \{-1, 2\}$, ta có:

$$u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}\right)(u_n+\lambda v_n), \forall n = 1, 2, \ldots$$

Đặt $u_n + \lambda v_n = x_n$, suy ra

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}\right)x_n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu $x_1 = a + \lambda b$, công bội $q = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}$. Do đó

$$x_n = (a+\lambda b)\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}\right)^{n-1}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Lần lượt lấy $\lambda = -1, \ \lambda = 2$ ta được:

$$\begin{cases} u_n - v_n = (a-b)\cdot\frac{1}{4^{n-1}} \\ u_n + 2v_n = a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{1}{3}(a+2b) + (a-b)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}} \\ v_n = \frac{1}{3}\left[a + 2b - (a-b)\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right] \end{cases}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{3}(a+2b)$.

**Bài toán 6 (Nhân cùng-nhân lệch).** *Cho trước hai số dương a và b. Xét hai dãy số $(u_n), (v_n)$ như sau:*

$$u_1 = a,\ v_1 = b,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

*Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.*

**Hướng dẫn.** Dễ thấy với mọi $n = 1, 2, \dots$ ta có $u_n > 0$ và $v_n > 0$. Gọi $x_n = \ln u_n,\ y_n = \ln v_n \ (\forall n = 1, 2, \dots)$. Khi đó $x_1 = \ln a,\ y_1 = \ln b$ và với mọi $n = 1, 2, \dots$, ta có

$$x_{n+1} = \frac{\ln u_n + \ln v_n}{2} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{\ln u_{n+1} + \ln v_n}{2} = \frac{x_{n+1} + y_n}{2}.$$

Theo bài tập **5** ta có

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\ln a + 2\ln b}{3} = \frac{\ln ab^2}{3} = \ln\left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Vì hàm số mũ liên tục nên suy ra

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln u_n} = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = e^{\ln\left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

**Bài toán 7 (Điều hòa cùng-điều hòa lệch).** *Cho trước hai số dương a và b. Xét hai dãy số $(u_n),\ (v_n)$ như sau:*

$$u_1 = a,\ v_1 = b,\ u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}},\ v_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{v_n}} \ (\forall n = 1, 2, \dots)$$

*Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.*

**Hướng dẫn.** Từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}{2}, \; \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{v_n}}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Vậy đặt $\frac{1}{u_n} = x_n, \; \frac{1}{v_n} = y_n$. Khi đó

$$x_1 = \frac{1}{a} > 0, \; y_1 = \frac{1}{b} > 0, \; x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \; y_{n+1} = \frac{x_{n+1} + y_n}{2}.$$

Đến đây ta sử dụng kết quả bài toán **5**.

**Bài toán 8 (Trung bình bậc r cùng-trung bình bậc r lệch).** *Cho trước hai số dương $a, b$ và cho trước $r \neq 0$. Xét hai dãy số $(u_n), (v_n)$ như sau:*

$$u_1 = a, \; v_1 = b, \; u_{n+1} = \left(\frac{u_n^r + v_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}, \; v_{n+1} = \left(\frac{u_{n+1}^r + v_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

*Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.*

**Hướng dẫn.** Dễ thấy rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ta có $u_n > 0, \; v_n > 0$. Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, và với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^r + \lambda v_{n+1}^r &= \frac{u_n^r + v_n^r}{2} + \lambda \frac{u_{n+1}^r + v_n^r}{2} = \frac{u_n^r + v_n^r}{2} + \lambda \frac{\frac{u_n^r + v_n^r}{2} + v_n^r}{2} \\ &= \frac{u_n^r + v_n^r}{2} + \lambda \frac{u_n^r + 3v_n^r}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4}\right) u_n^r + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{4}\right) v_n^r. \end{aligned}$$

Tương tự như bài tập **5**, ta chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty} u_n^r = \lim_{n\to\infty} v_n^r = \frac{a + 2b}{3}.$$

Do đó và vì hàm số $f(x) = x^{\frac{1}{r}}$ liên tục trên $(0; +\infty)$ nên

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} (v_n^r)^{\frac{1}{r}} = \left(\lim_{n\to\infty} v_n^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a + 2b}{3}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Chú ý 2.** *Hàm sin hypebôlic và hàm cos hypebôlic lần lượt là hàm*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

**Bài toán 9 (Cộng cùng-nhân lệch).** *Cho trước hai số dương $a, b$. Xét các dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ và $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau:*

$$x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

*Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

**Giải.**

**Trường hợp 1:** $a = b$. Khi đó $a_n = b_n = a, \forall n = 1, 2, \ldots$ Bởi vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

**Trường hợp 2:** $a < b$. Vì 0<a<b nên $0 < \frac{a}{b} < 1$. Do đó đặt

$$\frac{a}{b} = \cos v \ \left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có

$$a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b\cos v + b}{2} = \frac{b(1+\cos v)}{2} = b\cos^2\frac{v}{2},$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b} = \sqrt{b^2\cos^2\frac{v}{2}} = b\cos\frac{v}{2},$$

$$a_2 = \frac{b\cos^2\frac{v}{2} + b\cos\frac{v}{2}}{2} = \frac{b\cos\frac{v}{2}\left(1+\cos\frac{v}{2}\right)}{2} = b\cos\frac{v}{2}\cos^2\frac{v}{2^2},$$

$$b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{b\cos\frac{v}{2}\cos^2\frac{v}{2^2}b\cos\frac{v}{2}} = b\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2},$$

$$a_3 = \frac{b\cos\frac{v}{2}\cos^2\frac{v}{2^2} + b\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}}{2} = b\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cos^2\frac{v}{2^3},$$

$$b_3 = \sqrt{a_3 b_2} = \sqrt{b^2\cos^2\frac{v}{2}\cos^2\frac{v}{2^2}\cos^2\frac{v}{2^3}} = b\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cos\frac{v}{2^3},$$

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$a_n = b\left(\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cdots\cos\frac{v}{2^{n-1}}\right)\cos^2\frac{v}{2^n}, \forall n = 2, 3, \ldots$$

$$b_n = b\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cdots\cos\frac{v}{2^{n-1}}\cos\frac{v}{2^n}, \forall n = 2, 3, \ldots$$

Theo công thức $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ (với $\sin x \neq 0$), ta có

$$b_n = b\frac{\sin v}{2\sin\frac{v}{2}}.\frac{\sin\frac{v}{2}}{2\sin\frac{v}{2^2}}\ldots\frac{\sin\frac{v}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{v}{2^{n-1}}}.\frac{\sin\frac{v}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{v}{2^n}} = b\frac{\sin v}{2^n\sin\frac{v}{2^n}}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \lim_{n\to\infty} \frac{\sin v}{2^n \sin \frac{v}{2^n}} = b\frac{\sin v}{v} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{v}{2^n}}{\sin \frac{v}{2^n}} = b\frac{\sin v}{v}.$$

Từ $a_n = b_n \cos \frac{v}{2^n}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(b_n \cos \frac{v}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} b_n . \lim_{n\to\infty} \cos \frac{v}{2^n} = \lim_{n\to\infty} b_n = b\frac{\sin v}{v}.$$

**Trường hợp 3:** $a > b$. Vì $a > b > 0$ nên $\frac{a}{b} > 1$. Gọi $\alpha$ là số để $\frac{a}{b} = \cosh \alpha$, tức là

$$\frac{a}{b} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

Ta có:

$$1 + \cosh x = 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(2 + e^x + e^{-x}\right) = 2\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 = 2\cosh^2 \frac{x}{2}.$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2} . \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2} = 2\sinh \frac{x}{2} . \cosh \frac{x}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Vì hàm số $f(x) = \ln x$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ nên

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

Đặt $e^x - 1 = y$, khi đó

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \cosh x = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

Ta có:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b\cosh \alpha + b}{2} = \frac{b(1+\cosh \alpha)}{2} = b\cosh^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b} = \sqrt{b^2 \cosh^2 \frac{\alpha}{2}} = b\cosh \frac{\alpha}{2},$$

$$a_2 = \frac{b\cosh^2 \frac{\alpha}{2} + b\cosh \frac{\alpha}{2}}{2} = b\cosh \frac{\alpha}{2} . \frac{1 + \cosh \frac{\alpha}{2}}{2} = b\cosh \frac{\alpha}{2} \cosh^2 \frac{\alpha}{2^2},$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{b^2\cosh^2\frac{\alpha}{2}\cosh^2\frac{\alpha}{2^2}}=b\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2^2},$$

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$a_n=b\left(\cosh\frac{\alpha}{2}.\cosh\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cosh\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)\cosh^2\frac{\alpha}{2^n},\forall n=2,3,\ldots$$
$$b_n=b\cosh\frac{\alpha}{2}.\cosh\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cosh\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cosh\frac{\alpha}{2^n},\forall n=2,3,\ldots$$

Theo công thức $\cosh x=\dfrac{\sinh 2x}{2\sinh x}$ (với $\sinh x\neq 0$), ta có

$$b_n=b\frac{\sinh\alpha}{2\sinh\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sinh\frac{\alpha}{2}}{2\sinh\frac{\alpha}{2^2}}\cdots\frac{\sinh\frac{\alpha}{2^{n-2}}}{2\sinh\frac{\alpha}{2^{n-1}}}.\frac{\sinh\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2\sinh\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{b\sinh\alpha}{2^n\sinh\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b\sinh\alpha}{2^n\sinh\frac{\alpha}{2^n}}=b\frac{\sinh\alpha}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sinh\frac{\alpha}{2^n}}=b\frac{\sinh\alpha}{\alpha}$$

Từ $a_n=b_n\cosh\dfrac{\alpha}{2^n}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.\lim_{n\to\infty}\cosh\frac{\alpha}{2^n}=b\frac{\sinh\alpha}{\alpha}.$$

**Bài toán 10 (Đề thi Ôlympic 30/04/2004).** *Cho hai số dương $a,b$ không đổi thỏa mãn $a<b$. Xét các dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ như sau*

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=\sqrt{a_1b},\ a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=\sqrt{a_2b_1},\ldots,a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}.$$

*Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

**Hướng dẫn.** Bài toán này là trường hợp đặc biệt của bài toán **9**.

**Bài toán 11 (Điều hòa cùng-nhân lệch).** *Cho các dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ xác định như sau:*

$$a_1>0,\ b_1>0,\ a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}},\ b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}\ \ (\forall n=1,2,\ldots)$$

*Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**Giải.** Từ giả thiết suy ra $a_n>0,b_n>0,\forall n=1,2,\ldots$ Ta có

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}{2},\ \ \frac{1}{b_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{a_{n+1}}.\frac{1}{b_n}},\forall n=1,2,\ldots$$

Vậy đặt $\frac{1}{a_n} = x_n,\ \frac{1}{b_n} = y_n$. Khi đó

$$x_1 = \frac{1}{a_1} > 0,\ y_1 = \frac{1}{b_1} > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}.$$

Đến đây ta sử dụng kết quả bài toán **9**.

**Lưu ý.** Ngoài cách giải trên ta còn có thể giải trực tiếp cũng được kết quả.

**Bài toán 12 (HSG Quốc gia - 1993 - Bảng A).** *Cho $a_0 = 2$, $b_0 = 1$. Lập hai dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ theo quy tắc sau*

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}.$$

*Chứng minh rằng các dãy $(a_n)$ và $(b_n)$ có cùng một giới hạn chung khi $n$ dần tới dương vô cực. Tìm giới hạn chung đó.*

**Hướng dẫn.** Bài toán này chỉ là một trường hợp riêng của bài toán **11**.

**Bài toán 13 (Nhân cùng-cộng lệch).** *Cho trước hai số dương $a$ và $b$. Xét hai dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ như sau:*

$$a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}, b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}.$$

*Chứng minh rằng hai dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và hai giới hạn đó bằng nhau.*

**Giải.** Bằng quy nạp, dễ dàng suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $a_n > 0$ và $b_n > 0$.

**Trường hợp 1.** $a = b$. Khi đó $a_n = a = b_n, \forall n = 1, 2, \ldots$, suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

**Trường hợp 2.** $a > b$. Khi đó $a_1 > b_1$. Giả sử $a_k > b_k$ (với $k \in \mathbb{N}^*$). Khi đó

$$b_k < \sqrt{a_kb_k} < a_k \Rightarrow b_k < a_{k+1} < a_k.$$

Suy ra

$$b_k = \frac{b_k + b_k}{2} < \frac{a_{k+1} + b_k}{2} < \frac{a_k + b_k}{2} < \frac{a_k + a_k}{2} = a_k \Rightarrow b_k < b_{k+1} < a_k.$$

Do đó

$$b_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_k}{2} < \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} \Rightarrow 2b_{k+1} < a_{k+1} + b_{k+1} \Rightarrow a_{k+1} > b_{k+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra

$$a_n > b_n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do đó

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} < \sqrt{a_n a_n} = a_n,\ b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2} > \frac{b_{n+1} + b_n}{2} \Rightarrow b_{n+1} > b_n.$$

Vậy

$$b = b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_2 < a_1 = a.$$

Suy ra dãy $(a_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi số $b$, dãy $(b_n)$ tăng và bị chặn trên bởi số $a$, do đó hai dãy số này hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = y$. Từ $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots,$ cho $n \to +\infty$ ta được

$$y = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

**Trường hợp 3.** $a < b$. Khi đó $a_1 < b_1$. Giả sử $a_k < b_k$ (với $k \in \mathbb{N}^*$). Khi đó

$$a_k < \sqrt{a_k b_k} < b_k \Rightarrow a_k < a_{k+1} < b_k.$$

Suy ra

$$b_k = \frac{b_k + b_k}{2} > \frac{a_{k+1} + b_k}{2} > \frac{a_k + b_k}{2} > \frac{a_k + a_k}{2} = a_k \Rightarrow b_k > b_{k+1} > a_k.$$

Do đó

$$b_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_k}{2} > \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} \Rightarrow 2b_{k+1} > a_{k+1} + b_{k+1} \Rightarrow a_{k+1} < b_{k+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra

$$a_n < b_n, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do đó

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > \sqrt{a_n a_n} = a_n,\ b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2} < \frac{b_{n+1} + b_n}{2} \Rightarrow b_{n+1} < b_n.$$

Vậy

$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \cdots < b_2 < b_1 = b.$$

Suy ra dãy $(a_n)$ tăng và bị chặn trên bởi số $b$, dãy $(b_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi số $a$, do đó hai dãy số này hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = y$. Từ $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots,$ cho $n \to +\infty$ ta được

$$y = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Kết luận : Trong mọi trường hợp ta đều có hai dãy số $(a_n)$, $(b_n)$ có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**Bài toán 14 (Điều hoà cùng-cộng lệch).** *Cho trước hai số dương $a$ và $b$. Xét hai dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ như sau:*

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}},\ \ b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}.$$

*Chứng minh rằng hai dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và hai giới hạn đó bằng nhau.*

**Giải.** Bằng quy nạp, dễ dàng suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $a_n > 0$ và $b_n > 0$.
**Trường hợp 1.** $a = b$. Khi đó $a_n = a = b_n, \forall n = 1, 2, \ldots$, suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

**Trường hợp 2.** $a > b$. Khi đó $a_1 > b_1$. Giả sử $a_k > b_k$ (với $k \in \mathbb{N}^*$). Khi đó

$$\frac{1}{a_k} < \frac{1}{b_k} \Rightarrow \frac{2}{a_k} < \frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} < \frac{2}{b_k}.$$

Suy ra

$$b_k < \frac{2}{\dfrac{1}{a_k} + \dfrac{1}{b_k}} < a_k \Rightarrow b_k < a_{k+1} < a_k.$$

Do đó

$$b_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_k}{2} < \frac{a_{k+1} + a_{k+1}}{2} \Rightarrow b_{k+1} < a_{k+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp toán học suy ra $a_n > b_n, \forall n = 1, 2, \ldots$ Vậy $\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} > \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_n}$. Do đó

$$a_{n+1} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}} < \frac{2}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_n}} = a_n,\ \ b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2} > \frac{b_{n+1} + b_n}{2} \Rightarrow b_{n+1} > b_n.$$

Ta viết lại

$$b = b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_2 < a_1 = a.$$

Suy ra dãy $(a_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi số $b$, dãy $(b_n)$ tăng và bị chặn trên bởi số $a$, do đó hai dãy số này hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = y$. Từ $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots,$ cho $n \to +\infty$ ta được

$$y = \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

**Trường hợp 3.** $a < b$. Khi đó $a_1 < b_1$. Giả sử $a_k < b_k$ (với $k \in \mathbb{N}^*$). Khi đó

$$\frac{1}{a_k} > \frac{1}{b_k} \Rightarrow \frac{2}{b_k} < \frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} < \frac{2}{a_k}.$$

Suy ra
$$a_k < \frac{2}{\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}} < b_k \Rightarrow a_k < a_{k+1} < b_k.$$
Vậy
$$b_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_k}{2} > \frac{a_{k+1}+a_{k+1}}{2} \Rightarrow b_{k+1} > a_{k+1}.$$
Theo nguyên lí quy nạp toán học suy ra $a_n < b_n, \forall n = 1, 2, \ldots$ Vậy $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n} < \frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n}$. Do đó
$$a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}} > \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n}} = a_n, \;\; b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_n}{2} < \frac{b_{n+1}+b_n}{2} \Rightarrow b_{n+1} < b_n.$$
Ta viết lại
$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \cdots < b_2 < b_1 = b.$$
Suy ra dãy $(a_n)$ tăng và bị chặn trên bởi số $b$, dãy $(b_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi số $a$, do đó hai dãy số này hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = y$. Từ $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots,$ cho $n \to +\infty$ ta được
$$y = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$
Kết luận : Trong mọi trường hợp ta đều có hai dãy số $(a_n)$, $(b_n)$ có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**Bài toán 15 (Cộng cùng-điều hoà lệch).** *Cho trước hai số dương $a$ và $b$. Xét hai dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ như sau:*
$$a_1 = a,\, b_1 = b,\, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\, b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{b_n}}.$$
*Chứng minh rằng hai dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và hai giới hạn đó bằng nhau.*

**Hướng dẫn.** Đặt $\frac{1}{a_n} = x_n$, $\frac{1}{b_n} = y_n$. Ta đươc
$$x_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}}, \;\; y_{n+1} = \frac{x_{n+1}+y_n}{2}.$$
Sau đó sử dụng kết quả bài toán **14**

**Bài toán 16 (Nhân cùng-điều hoà lệch).** *Cho trước hai số dương $a$ và $b$. Xét hai dãy số $(a_n)$ và $(b_n)$ như sau:*

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ b_{n+1} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_n}}.$$

*Chứng minh rằng hai dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và hai giới hạn đó bằng nhau.*

**Hướng dẫn.** Đặt $\dfrac{1}{a_n} = x_n,\ \dfrac{1}{b_n} = y_n$. Ta được

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_{n+1} + y_n}{2}.$$

Sau đó sử dụng kết quả bài toán **13**

**Bài toán 17 (Trung bình bậc r cùng-nhân lệch).** *Cho $r \neq 0, a > 0, b > 0$, xét các dãy số $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ và $(b_n)_{n=0}^{+\infty}$ như sau:*

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ a_{n+1} = \left(\frac{a_n^r + b_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\ (\forall n = 0, 1, 2, \ldots).$$

*Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.*

**Giải.**

**Trường hợp 1:** $r > 0$.

**Trường hợp 1.1:** $a = b$. Khi đó $a_n = a = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

**Trường hợp 1.2:** $a < b$. Khi đó

$$a^r < b^r \Rightarrow 0 < \frac{a^r}{b^r} < 1.$$

Do đó đặt

$$\frac{a^r}{b^r} = \cos v\ \left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có

$$a_1^r = \frac{a^r + b^r}{2} = \frac{b^r \cos v + b^r}{2} = \frac{b^r(1 + \cos v)}{2} = b^r \cos^2 \frac{v}{2},$$

$$b_1^r = \left(\sqrt{a_1 b}\right)^r = \left(\sqrt{b^2 \cos^{\frac{2}{r}} \frac{v}{2}}\right)^r = \left(b \cos^{\frac{1}{r}} \frac{v}{2}\right)^r = b^r \cos \frac{v}{2},$$

$$a_2^r = \frac{b^r \cos^2 \frac{v}{2} + b^r \cos \frac{v}{2}}{2} = \frac{b^r \cos \frac{v}{2}\left(1 + \cos \frac{v}{2}\right)}{2} = b^r \cos \frac{v}{2} \cos^2 \frac{v}{2^2},$$

$$\begin{aligned}
b_2^r &= \sqrt{a_2 b_1} = \left(\sqrt{b^2 \cos^{\frac{2}{r}} \frac{v}{2} \cos^{\frac{2}{r}} \frac{v}{2^2}}\right)^r = b^r \cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2},\\
a_3^r &= \frac{b^r \cos\frac{v}{2}\cos^2\frac{v}{2^2} + b^r\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}}{2} = b^r\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cos^2\frac{v}{2^3},\\
b_3 &= \sqrt{a_3 b_2} = b^r\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cos\frac{v}{2^3}.
\end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$\begin{aligned}
a_n^r &= b^r\left(\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cdots\cos\frac{v}{2^{n-1}}\right)\cos^2\frac{v}{2^n}, \forall n = 2,3,\ldots\\
b_n^r &= b^r\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2^2}\cdots\cos\frac{v}{2^{n-1}}\cos\frac{v}{2^n}, \forall n = 2,3,\ldots
\end{aligned}$$

Theo công thức $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ (với $\sin x \neq 0$), ta có

$$b_n^r = b^r\frac{\sin v}{2\sin\frac{v}{2}}.\frac{\sin\frac{v}{2}}{2\sin\frac{v}{2^2}}\cdots\frac{\sin\frac{v}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{v}{2^{n-1}}}.\frac{\sin\frac{v}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{v}{2^n}} = b^r\frac{\sin v}{2^n\sin\frac{v}{2^n}}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} b_n^r = b^r\lim_{n\to\infty}\frac{\sin v}{2^n\sin\frac{v}{2^n}} = b^r\frac{\sin v}{v}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{v}{2^n}}{\sin\frac{v}{2^n}} = b^r\frac{\sin v}{v}$$

Từ $a_n^r = b_n^r\cos\dfrac{v}{2^n}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n^r = \lim_{n\to\infty}\left(b_n^r\cos\frac{v}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} b_n^r.\lim_{n\to\infty}\cos\frac{v}{2^n} = \lim_{n\to\infty} b_n^r = b^r\frac{\sin v}{v}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b\left(\frac{\sin v}{v}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Trường hợp 1.3:** $a > b > 0$. Khi đó $\dfrac{a^r}{b^r} > 1$. Gọi $\alpha$ là số để

$$\frac{a^r}{b^r} = \cosh\alpha.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
a_1^r &= \frac{a^r+b^r}{2} = \frac{b^r\cosh\alpha + b^r}{2} = \frac{b^r(1+\cosh\alpha)}{2} = b^r\cosh^2\frac{\alpha}{2},\\
b_1^r &= \left(\sqrt{a_1 b}\right)^r = \left(\sqrt{b^2\cosh^{\frac{2}{r}}\frac{\alpha}{2}}\right)^r = b^r\cosh\frac{\alpha}{2},\\
a_2^r &= \frac{b^r\cosh^2\frac{\alpha}{2} + b^r\cosh\frac{\alpha}{2}}{2} = b^r\cosh\frac{\alpha}{2}.\frac{1+\cosh\frac{\alpha}{2}}{2} = b^r\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh^2\frac{\alpha}{2^2},
\end{aligned}$$

$$b_2^r = \left(\sqrt{b^2 \cosh^{\frac{2}{r}} \frac{\alpha}{2} \cosh^{\frac{2}{r}} \frac{\alpha}{2^2}}\right)^r = b^r \cosh \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{\alpha}{2^2},$$

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$a_n^r = b^r \left(\cosh \frac{\alpha}{2}. \cosh \frac{\alpha}{2^2} \ldots \cosh \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) \cosh^2 \frac{\alpha}{2^n}, \forall n = 2, 3, \ldots$$
$$b_n^r = b^r \cosh \frac{\alpha}{2}. \cosh \frac{\alpha}{2^2} \ldots \cosh \frac{\alpha}{2^{n-1}} \cosh \frac{\alpha}{2^n}, \forall n = 2, 3, \ldots$$

Theo công thức $\cosh x = \dfrac{\sinh 2x}{2 \sinh x}$ (với $\sinh x \neq 0$), ta có

$$b_n^r = b^r \frac{\sinh \alpha}{2 \sinh \frac{\alpha}{2}}. \frac{\sinh \frac{\alpha}{2}}{2 \sinh \frac{\alpha}{2^2}} \cdots \frac{\sinh \frac{\alpha}{2^{n-2}}}{2 \sinh \frac{\alpha}{2^{n-1}}}. \frac{\sinh \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2 \sinh \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{b^r \sinh \alpha}{2^n \sinh \frac{\alpha}{2^n}}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} b_n^r = \lim_{n\to\infty} \frac{b^r \sinh \alpha}{2^n \sinh \frac{\alpha}{2^n}} = b^r \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sinh \frac{\alpha}{2^n}} = b^r \frac{\sinh \alpha}{\alpha}.$$

Từ $a_n^r = b_n^r \cosh \dfrac{\alpha}{2^n}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n^r = \lim_{n\to\infty} b_n^r. \lim_{n\to\infty} \cosh \frac{\alpha}{2^n} = b^r \frac{\sinh \alpha}{\alpha}.$$

Bởi vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b \left(\frac{\sinh \alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Trường hợp 2:** $r < 0$.

**Trường hợp 2.1:** $a = b$. Khi đó $a_n = a = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

**Trường hợp 2.2:** $a > b$. Khi đó

$$a^r < b^r \Rightarrow 0 < \frac{a^r}{b^r} < 1.$$

Do đó đặt

$$\frac{a^r}{b^r} = \cos v \quad \left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right).$$

Tương tự như trường hợp 1.2, ta chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b \left(\frac{\sin v}{v}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Trường hợp 2.3:** $a < b$. Khi đó $\frac{a^r}{b^r} > 1$. Gọi $\alpha$ là số để $\frac{a^r}{b^r} = \cosh\alpha$. Tương tự như trường hợp 1.3, ta chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b\left(\frac{\sinh\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Lưu ý.** Bài toán **9** là trường hợp riêng của bài toán **17** khi $r = 1$. Bài toán **11** là trường hợp riêng của bài toán **17** khi $r = -1$. Bài toán **13** có thể xem là bổ sung cho trường hợp $r = 0$ chưa được xét ở bài toán **17**.

### 0.1.3 Phối hợp ba, bốn dãy số.

**Bài toán 18.** *Cho ba số thực $a, b, c$. Xét 3 dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau:*

$$x_1 = a,\ y_1 = b,\ z_1 = c,$$
$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{2},\ z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

*Chứng minh rằng các dãy số này hội tụ và tính giới hạn của chúng.*

**Giải.** Với mọi $n = 2, 3, \ldots$ Ta có

$$x_n + y_n + z_n = \frac{y_{n-1} + z_{n-1}}{2} + \frac{z_{n-1} + x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} = x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}.$$

Sử dụng liên tiếp các kết quả trên ta thu được:

$$x_n + y_n + z_n = x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} = \cdots = x_1 + y_1 + z_1 = a + b + c. \tag{1}$$

Đặt $M = a + b + c$, khi đó từ (1) ta có

$$\begin{aligned} y_n + z_n &= \frac{z_{n-1} + x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-1}}{2} \\ &= \frac{a + b + c}{2} + \frac{x_{n-1}}{2} = \frac{M}{2} + \frac{x_{n-1}}{2}, \forall n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n = M - (y_n + z_n) = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}x_{n-1}, \forall n = 2, 3, \ldots$$

Sử dụng liên tiếp các kết quả trên ta thu được:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{M}{2} - \frac{x_{n-1}}{2} = \frac{M}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{M}{2} - \frac{x_{n-2}}{2}\right] = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^2}x_{n-2} \\ &= M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^2}\left[\frac{M}{2} - \frac{x_{n-3}}{2}\right] = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) - \frac{1}{2^3}x_{n-3} \end{aligned}$$

$$= \cdots = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right) + (-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}x_1$$
$$= \frac{M}{2}.\frac{1+\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{2}} + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}x_1 = \frac{M}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}a, \forall n = 2, 3, \ldots$$

Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0,\ \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = 0.$$

Do đó
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{M}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}a\right] = \frac{M}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Tương tự ta chứng minh được
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{a+b+c}{3}.$$

**Cách khác.** Ta có
$$x_n - y_n = \frac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2} - \frac{z_{n-1}+x_{n-1}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - y_{n-1}\right), \forall n \geq 2.$$

Do đó
$$x_n - y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a-b) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Tương tự ta chứng minh được
$$\lim_{n\to\infty}(y_n - z_n) = 0,\quad \lim_{n\to\infty}(z_n - x_n) = 0.$$

Ta có
$$\begin{aligned}\left|x_n - \frac{a+b+c}{3}\right| &= \left|x_n - \frac{x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}}{3}\right| \\ &= \left|\frac{y_{n-1}-x_{n-1}}{6} + \frac{z_{n-1}-x_{n-1}}{6}\right| \\ &\leq \frac{1}{6}\left|x_{n-1}-y_{n-1}\right| + \frac{1}{6}\left|x_{n-1}-z_{n-1}\right|.\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a+b+c}{3}$. Tương tự ta chứng minh được
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a+b+c}{3},\quad \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{a+b+c}{3}.$$

**Bài toán 19.** *Cho 3 số dương $a, b, c$. Lập 3 dãy $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(w_n)_{n=1}^{+\infty}$ theo quy luật sau: $u_1 = a, v_1 = b, w_1 = c$ và*
$$u_{n+1} = \sqrt{v_n w_n}, v_n = \sqrt{w_n u_n}, w_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

*Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n, \lim\limits_{n\to\infty} v_n, \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

**Hướng dẫn.**

**Cách 1.** Giải trực tiếp, tương tự như bài toán **18**.

**Cách 2.** Dễ thấy với mọi $n = 1, 2, \ldots$ thì $u_n > 0, v_n > 0, w_n > 0$. Do đó từ giả thiết ta có

$$\ln u_{n+1} = \frac{\ln v_n + \ln w_n}{2},\ \ln v_{n+1} = \frac{\ln w_n + \ln u_n}{2},\ \ln w_{n+1} = \frac{\ln u_n + \ln v_n}{2}.$$

Gọi $x_n = \ln u_n,\ y_n = \ln v_n,\ z_n = \ln w_n$. Khi đó

$$x_1 = \ln a,\ y_1 = \ln b,\ z_1 = \ln c,$$

$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{2},\ z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Đến đây ta sử dụng bài toán **18**.

**Bài toán 20.** *Cho 3 số dương* $a, b, c$. *Lập dãy* $(u_n)_{n=1}^{+\infty}, (v_n)_{n=1}^{+\infty}, (w_n)_{n=1}^{+\infty}$ *theo quy luật sau:* $u_1 = a, v_1 = b, w_1 = c$ *và*

$$u_{n+1} = \frac{2v_n w_n}{v_n + w_n}, v_{n+1} = \frac{2w_n u_n}{w_n + u_n}, w_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\,(n = 1, 2, \ldots).$$

*Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n, \lim\limits_{n\to\infty} v_n, \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

**Hướng dẫn.** Đặt $\frac{1}{u_n} = x_n,\ \frac{1}{v_n} = y_n,\ \frac{1}{w_n} = z_n$. Khi đó

$$x_1 = \frac{1}{a},\ y_1 = \frac{1}{b},\ z_1 = \frac{1}{c},$$

$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{2},\ z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Đến đây ta sử dụng bài toán **18**.

**Bài toán 21.** *Cho ba số dương* $a, b, c$ *và cho* $r \neq 0$. *Xét ba dãy số* $(x_n)_{n=1}^{+\infty}, (y_n)_{n=1}^{+\infty}, (z_n)_{n=1}^{+\infty}$ *như sau:* $x_1 = a,\ y_1 = b,\ z_1 = c$ *và với mọi* $n = 1, 2, \ldots$ *thì*

$$x_{n+1} = \left(\frac{y_n^r + z_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}},\ y_{n+1} = \left(\frac{z_n^r + x_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}},\ z_{n+1} = \left(\frac{x_n^r + y_n^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

*Chứng minh rằng các dãy số này hội tụ và tính giới hạn của chúng.*

**Giải.** Dễ thấy với mọi $n = 1, 2, \ldots$ thì $x_n > 0,\ y_n > 0,\ z_n > 0$. Gọi Gọi $M = a^r + b^r + c^r$. Khi đó với mọi $n = 1, 2, \ldots$, ta có

$$x_{n+1}^r + y_{n+1}^r + z_{n+1}^r = x_n^r + y_n^r + z_n^r = \cdots = x_1^r + y_1^r + z_1^r = a^r + b^r + c^r = M.$$

Do đó

$$y_{n+1}^r + z_{n+1}^r = \frac{z_n^r + x_n^r}{2} + \frac{x_n^r + y_n^r}{2} = \frac{1}{2}\left(x_n^r + y_n^r + z_n^r\right) + \frac{x_n^r}{2} = \frac{M}{2} + \frac{x_n^r}{2}$$
$$\Rightarrow M - x_{n+1}^r = \frac{M}{2} + \frac{x_n^r}{2} \Rightarrow x_{n+1}^r = -\frac{x_n^r}{2} + \frac{M}{2}.$$

Đặt $x_n^r = g_n$. Khi đó

$$g_{n+1} = -\frac{1}{2}g_n + \frac{M}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Bởi vậy bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$g_n = 2\left(\frac{M}{3} - a^r\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{M}{3}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \frac{M}{3}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{M}{3}\right)^{\frac{1}{r}}$. Tương tự ta chứng minh được:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \left(\frac{M}{3}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \left(\frac{a^r + b^r + c^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Nhận xét 5.** *Các bài toán* **18**, **19** *là trường riêng của bài toán* **21** *này ứng với* $r = 1$, $r = -1$. *Bài toán* **20** *cũng có thể xem là bổ sung cho trường hợp* $r = 0$ *không được xét ở bài tập* **21**.

**Bài toán 22.** *Cho bốn số thực* $a, b, c, d$. *Lập bốn dãy số* $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{+\infty}$ *theo quy luật sau:* $x_1 = a, y_1 = b, z_1 = c, g_1 = d$ *và*

$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n + g_n}{3}, y_{n+1} = \frac{z_n + g_n + x_n}{3}, \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$z_{n+1} = \frac{g_n + x_n + y_n}{3}, g_{n+1} = \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

*Tìm*

$$\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n, \lim_{n\to\infty} z_n, \lim_{n\to\infty} g_n.$$

**Giải.** Với mọi $n = 2, 3, \ldots$ Ta có

$$\begin{aligned} x_n + y_n + z_n + g_n &= \frac{y_{n-1} + z_{n-1} + g_{n-1}}{3} + \frac{z_{n-1} + g_{n-1} + x_{n-1}}{3} \\ &+ \frac{g_{n-1} + x_{n-1} + y_{n-1}}{3} + \frac{+x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}}{3} \\ &= x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} + g_{n-1}. \end{aligned}$$

Sử dụng liên tiếp các kết quả trên ta thu được:

$$x_n+y_n+z_n+g_n=x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}+g_{n-1}=\cdots=a+b+c+d. \tag{1}$$

Đặt $M=a+b+c+d$, khi đó từ (1) ta có

$$\begin{aligned}y_n+z_n+g_n&=\frac{z_{n-1}+g_{n-1}+x_{n-1}}{3}+\frac{g_{n-1}+x_{n-1}+y_{n-1}}{3}\\&+\frac{x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}}{3}=\frac{2(a+b+c+d)}{3}+\frac{x_{n-1}}{3}\\&=\frac{2M}{3}+\frac{x_{n-1}}{3},\forall n=2,3,\ldots\end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n=M-(y_n+z_n+g_n)=\frac{1}{3}M-\frac{1}{3}x_{n-1},\forall n=2,3,\ldots$$

Sử dụng liên tiếp các kết quả trên ta thu được:

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{M}{3}-\frac{x_{n-1}}{3}=\frac{M}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{M}{3}-\frac{x_{n-2}}{3}\right]=M\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{3^2}x_{n-2}\\&=M\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left[\frac{M}{3}-\frac{x_{n-3}}{3}\right]=M\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}\right)-\frac{1}{3^3}x_{n-3}\\&=\cdots=M\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\right)+(-1)^n\frac{1}{3^{n-1}}x_1\\&=\frac{M}{3}.\frac{1+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}x_1=\frac{M}{4}\left(1+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}a,\forall n=2,3,\ldots\end{aligned}$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=0,\ \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}=0.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{M}{4}\left(1+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}a\right]=\frac{M}{4}=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}g_n=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

**Bài toán 23.** *Cho $a,b,c,d\in(0;+\infty)$. Lập bốn dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(w_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(t_n)_{n=1}^{+\infty}$ theo quy luật sau: $u_1=a,v_1=b,w_1=c,t_1=d$ và*

$$u_{n+1}=\sqrt[3]{v_nw_nt_n},v_{n+1}=\sqrt[3]{w_nt_nu_n},w_{n+1}=\sqrt[3]{t_nu_nv_n},t_{n+1}=\sqrt[3]{u_nv_nw_n}$$

*Chứng minh các dãy số này hội tụ và tìm giới hạn của chúng.*

**Hướng dẫn.** Dễ thấy với mọi $n = 1, 2, ...$ thì $u_n > 0, v_n > 0, w_n > 0, t_n > 0$. Gọi $x_n = \ln u_n,\ y_n = \ln v_n,\ z_n = \ln w_n\ g_n = \ln t_n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&x_1 = \ln a,\ y_1 = \ln b,\ z_1 = \ln c, g_1 = \ln d,\\
&x_{n+1} = \frac{y_n + z_n + g_n}{3},\ y_{n+1} = \frac{z_n + g_n + x_n}{3}, \forall n = 1, 2, \dots\\
&z_{n+1} = \frac{g_n + x_n + y_n}{3}\ g_{n+1} = \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, \forall n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Đến đây ta sử dụng bài toán **22**.

**Bài toán 24.** *Cho bốn số dương $a, b, c, d$. Lập bốn dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}, (v_n)_{n=1}^{+\infty}, (w_n)_{n=1}^{+\infty}, (t_n)_{n=1}^{+\infty}$ theo quy luật sau: $u_1 = a, v_1 = b, w_1 = c, t_1 = d$ và*

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{3v_n w_n t_n}{v_n w_n + w_n t_n + t_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{3w_n t_n u_n}{w_n t_n + t_n u_n + u_n w_n}, \forall n = 1, 2, \dots\\
w_{n+1} &= \frac{3t_n u_n v_n}{t_n u_n + u_n v_n + v_n t_n},\ t_{n+1} = \frac{3u_n v_n w_n}{u_n v_n + v_n w_n + w_n u_n}, \forall n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

*Chứng minh các dãy số này hội tụ và tìm giới hạn của chúng.*

**Hướng dẫn.** Đặt $\frac{1}{u_n} = x_n,\ \frac{1}{v_n} = y_n,\ \frac{1}{w_n} = z_n,\ \frac{1}{t_n} = g_n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{a},\ y_1 = \frac{1}{b},\ z_1 = \frac{1}{c}, g_1 = \frac{1}{d},\\
&x_{n+1} = \frac{y_n + z_n + g_n}{3},\ y_{n+1} = \frac{z_n + g_n + x_n}{3}, \forall n = 1, 2, \dots\\
&z_{n+1} = \frac{g_n + x_n + y_n}{3}\ g_{n+1} = \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, \forall n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Đến đây ta sử dụng bài toán **22**.

**Bài toán 25.** *Cho bốn số dương $a, b, c, d$ và cho $r \neq 0$. Xét bốn dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(t_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau: $x_1 = a,\ y_1 = b,\ z_1 = c,\ t_1 = d$ và*

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(\frac{y_n^r + z_n^r + t_n^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}},\ y_{n+1} = \left(\frac{z_n^r + t_n^r + x_n^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}},\ \forall n = 1, 2, \dots\\
z_{n+1} &= \left(\frac{t_n^r + x_n^r + y_n^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}},\ t_{n+1} = \left(\frac{x_n^r + y_n^r + z_n^r}{3}\right)^{\frac{1}{r}}, \forall n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

*Chứng minh rằng các dãy số này hội tụ và tính giới hạn của chúng.*

**Giải.** Dễ thấy với mọi $n = 1, 2, \dots$ thì $x_n > 0,\ y_n > 0,\ z_n > 0,\ t_n > 0$. Gọi $M = a^r + b^r + c^r + d^r$. Khi đó với mọi $n = 1, 2, \dots$, ta có

$$x_{n+1}^r + y_{n+1}^r + z_{n+1}^r + t_{n+1}^r = x_n^r + y_n^r + z_n^r + t_n^r = \dots = x_1^r + y_1^r + z_1^r + t_1^r = M.$$

Vậy

$$\begin{aligned} y_{n+1}^r + z_{n+1}^r + t_{n+1}^r &= \frac{z_n^r + t_n^r + x_n^r}{3} + \frac{t_n^r + x_n^r + y_n^r}{3} + \frac{x_n^r + y_n^r + z_n^r}{3} \\ &= \frac{x_n^r}{3} + \frac{2\left(x_n^r + y_n^r + z_n^r + t_n^r\right)}{3} = \frac{x_n^r}{3} + \frac{2M}{3} \\ &\Rightarrow M - x_{n+1}^r = \frac{x_n^r}{3} + \frac{2M}{3} \Rightarrow x_{n+1}^r = -\frac{x_n^r}{3} + \frac{M}{3}. \end{aligned}$$

Đặt $x_n^r = g_n$. Khi đó $g_{n+1} = -\frac{1}{3}g_n + \frac{M}{3}, \forall n = 1, 2, \ldots$ Do đó bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$g_n = 3\left(\frac{M}{4} - a^r\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{M}{4}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Bởi vậy $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \frac{M}{4}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{r}}$. Tương tự ta chứng minh được:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \left(\frac{M}{4}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \left(\frac{a^r + b^r + c^r + d^r}{4}\right)^{\frac{1}{r}}$$

**Nhận xét 6.** *Ta có thể mở rộng cho $k$ $(k \geq 2)$ dãy số. Trong các lời giải trên thì việc tìm ra các bất biến là rất quan trọng, nó giúp ta tính được các giới hạn của các dãy số. Chẳng hạn ở bài toán* **2** *ở trang 4 có bất biến là*

$$a_n b_n = \cdots = a_1 b_1 = ab, \forall n = 1, 2, \ldots$$

*còn ở bài toán* **22** *ở trang 24 có bất biến là*

$$x_n + y_n + z_n + g_n = x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} + g_{n-1} = \cdots = a + b + c + d.$$

**Bài toán 26 (Đề nghị Olympic 30/04/2011).** *Cho ba số thực dương $a, b, c$ và các dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ như sau: $u_0 = a$, $v_0 = b$, $w_0 = c$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}, \ v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}, \ w_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}}.$$

*Chứng minh rằng ba dãy số đã cho hội tụ và chúng có cùng một giới hạn.*

**Giải.** Dễ thấy với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $u_n > 0, \ v_n > 0, \ w_n > 0$. Theo các bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$$

suy ra $u_1 \geq v_1 \geq w_1$. Bằng quy nạp, ta dễ dàng suy ra

$$u_n \geq v_n \geq w_n, \forall n = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

Từ (*) suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} &u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3} \leq u_n \\ &\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \leq \frac{3}{w_n} \Rightarrow w_{n+1} = \frac{3}{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{w_n}} \geq w_n. \end{aligned}$$

Do đó $0 < w_n \leq w_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n, \forall n = 1, 2, \ldots$ Hay viết rõ ra là

$$\begin{aligned} 0 < \frac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}} &= w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_{n+1} \\ &\leq u_{n+1} \leq u_n \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1 = \frac{a+b+c}{3}. \end{aligned}$$

Nghĩa là kể từ số hạng $w_1$, dãy số $(w_n)$ tăng và bị chặn trên bởi $\dfrac{a+b+c}{3}$ nên hội tụ. Kể từ số hạng $u_1$, dãy số $(u_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi $\dfrac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}$ nên hội tụ.

Gọi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha, \quad \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lambda$, khi đó $\lambda > 0, \quad \lambda \leq \alpha$ và

$$0 < \lambda \leq \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} (3u_{n+1} - u_n - w_n) = 3\alpha - \alpha - \lambda = 2\alpha - \lambda.$$

Vậy dãy $(v_n)$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2\alpha - \lambda$. Suy ra

$$\begin{aligned} &(2\alpha - \lambda)^3 = \lim_{n\to\infty} v_n^3 = \lim_{n\to\infty} v_{n+1}^3 = \lim_{n\to\infty} (u_n v_n w_n) = \alpha (2\alpha - \lambda) \lambda \\ \Rightarrow &(2\alpha - \lambda)^2 = \alpha\lambda \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 5\alpha\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)(4\alpha - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \lambda \end{aligned}$$

(ta loại trường hợp $4\alpha - \lambda = 0$ vì nó mâu thuẫn với $\lambda > 0,\ \lambda \leq \alpha$). Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 2\alpha - \lambda = \alpha.$$

Vậy ba dãy số $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

**Bài toán 27.** *Cho ba dãy số* $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ *như sau:* $u_0 > 0,\ v_0 > 0,\ w_0 > 0$ *và*

$$w_{n+1} = \frac{3u_n v_n w_n}{u_n v_n + v_n w_n + w_n u_n}, v_{n+1} = \frac{u_n v_n + v_n w_n + w_n u_n}{u_n + v_n + w_n}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}.$$

*Hãy tìm giới hạn của ba dãy số đã cho.*

**Giải.** Dễ thấy với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $u_n > 0,\ v_n > 0,\ w_n > 0$, và

$$u_{n+1}v_{n+1}w_{n+1} = u_nv_nw_n = \cdots = u_0v_0w_0.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n + w_n}{3} - \frac{u_nv_n + v_nw_n + w_nu_n}{u_n + v_n + w_n} \\ &= \frac{u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 - (u_nv_n + v_nw_n + w_nu_n)}{3\left(u_n + v_n + w_n\right)} \geq 0. \\ v_{n+1} - w_{n+1} &= \frac{(u_nv_n)^2 + (v_nw_n)^2 + (w_nu_n)^2}{(u_n + v_n + w_n)(u_nv_n + v_nw_n + w_nu_n)} - \\ &- \frac{(u_nv_n)(v_nw_n) + (v_nw_n)(w_nu_n) + (u_nv_n)(w_nu_n)}{(u_n + v_n + w_n)(u_nv_n + v_nw_n + w_nu_n)} \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n \geq v_n \geq w_n$. Do đó mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n + w_n}{3} - u_n = \frac{(v_n - u_n) + (w_n - u_n)}{3} \leq 0$$

Như vậy ta có

$$0 < \frac{3u_0v_0w_0}{u_0v_0 + v_0w_0 + w_0u_0} = w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n \leq u_n \leq \cdots \leq u_1 = \frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$$

Như vậy, kể từ số hạng $w_1$ thì dãy số $(w_n)$ tăng và bị chặn trên bởi $\dfrac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$ nên hội tụ. Kể từ số hạng $u_1$, dãy số $(u_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi $\dfrac{3u_0v_0w_0}{u_0v_0 + v_0w_0 + w_0u_0}$ nên hội tụ. Gọi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lambda$, khi đó $\lambda > 0,\quad \lambda \leq \alpha$ và

$$0 < \lambda \leq \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} (3u_{n+1} - u_n - w_n) = 3\alpha - \alpha - \lambda = 2\alpha - \lambda.$$

Do đó từ $v_{n+1} = \dfrac{u_nv_n + v_nw_n + w_nu_n}{u_n + v_n + w_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, cho $n \to +\infty$ ta được

$$\begin{aligned} 2\alpha - \lambda &= \frac{\alpha(2\alpha - \lambda) + (2\alpha - \lambda)\lambda + \lambda\alpha}{\alpha + \lambda + 2\alpha - \lambda} = \frac{2\lambda\alpha - \lambda^2 + 2\alpha^2}{3\alpha} \\ &\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 5\lambda\alpha + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)\left(4\alpha - \lambda\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \alpha \\ 4\alpha = \lambda \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $4\alpha = \lambda$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 2\alpha - \lambda = \frac{\lambda}{2} - \lambda = -\frac{\lambda}{2} < 0,$$

điều này mâu thuẫn với trên. Vậy trường hợp (1) không thể xảy ra (ta lý luận cách khác là từ $4\alpha = \lambda$ suy ra mâu thuẫn với $\lambda > 0,\ \lambda \leq \alpha$).

Trường hợp 2: $\lambda = \alpha$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 2\alpha - \lambda = \alpha$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \alpha$$

Từ $u_n v_n w_n = u_0 v_0 w_0, \forall n \in \mathbb{N}$, cho $n \to +\infty$ suy ra

$$\alpha^3 = u_0 v_0 w_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \sqrt[3]{u_0 v_0 w_0}$$