TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
KHOA TOÁN-TIN

CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ SƠ CẤP

MỘT VÀI LOẠI DÃY TRUY HỒI

Giảng viên hướng dẫn: ***ThS. Đào Ngọc Minh***

Nhóm sinh viên: ***Nguyễn Thị Phương***
Đinh Hà Phương
Dương Thị Thu Phương
Bùi Thị Phương Thảo

Lớp: ***K57C***

HÀ NỘI, 9/2010

Mục lục

Mở đầu

Các bài toán về dãy số có một lịch sử lâu đời và liên quan đến nhiều lĩnh vực toán học. Dãy số đóng một vai trò cực kỳ quan trọng không chỉ trong toán học mà còn nhiều lĩnh vực của đời sống. Trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, IMO, hay những kỳ thi giải toán của nhiều tạp chí toán học các bài toán về dãy số xuất hiện khá nhiều và được đánh giá ở mức độ khó.

Không tham vọng trình bày tất cả các vấn đề liên quan đến dãy số, nhóm sinh viên chúng tôi chỉ muốn đưa ra cách hiểu "sơ cấp" nhất về một vài loại dãy truy hồi. Qua đó trang bị phần nào cho bạn đọc quan tâm nhiều bài toán rất phổ thông về dãy và có cái nhìn sâu sắc hơn.

Trong chuyên đề này chúng tôi trình bày con đường:

- *Xác định số hạng tổng quát.*
- *Tính tổng riêng hữu hạn.*
- *Tính đơn điệu và sự hôi tụ.*

của một vài loại dãy truy hồi cơ bản, từ đó ứng dụng giải một số bài toán.

1 Dãy afine

1.1 Định nghĩa

Dãy afine là dãy $(u_n)_n \geq 0$ trong một trường $\mathbb{K}$ được xác định bởi $u_{n+1} = au_n + b$

1.2 Số hạng tổng quát

Xét dãy afine $u_{n+1} = au_n + b$ (1) với $a, b \in \mathbb{K}, n \geq 0$

- Nếu $a = 1$ thì (1) là dãy cộng và lúc đó $u_{n+1} = u_0 + nb(\forall n \geq 0)$
- Nếu $a \neq 1$. Ta đặt $v_n = u_n + \dfrac{b}{a-1} \forall n \geq 0$
  Khi đó

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{b}{a-1} = au_n + b + \frac{b}{a-1} \\ &= a(v_n - \frac{b}{a-1}) + b + \frac{b}{a-1} = av_n, \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow v_{n+1} = av_n, \forall n \geq 0$
  $\Longrightarrow (v_n)$ là một dãy nhân với công bội a.
  Do đó $v_n = a^n v_0, \forall n \geq 0$.
  Vậy $u_n = v_n - \dfrac{b}{a-1} = a^n v_0 - \dfrac{b}{a-1} = a^n(u_0) + \dfrac{b}{a-1} - \dfrac{b}{a-1} \forall n \geq 0$
  Vậy số hạng tổng quát của (1) là : $u_n = \begin{cases} u_0 + nb & \text{nếu } a = 1 \\ a^n(u_0 + \dfrac{b}{a-1}) - \dfrac{b}{a-1} & \text{nếu } a \neq 1. \end{cases}$
- Đặc biệt nếu $b = 0$ thì ta có $u_n = a^n u_0$. Và dãy $(u_n)_{n \geq 0}$ là một dãy số nhân với công bội a.

1.3 Tổng riêng hữu hạn

Đặt $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$ ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} + S(n) &= u_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} u_i \\ &= u_0 + \sum_{i=0}^{n} (au_i + b) \\ &= u_0 + a\sum_{i=0}^{n} + nb \\ &= u_0 + aS(n) + nb. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (a-1)S_n = u_{n+1} - (n+1)b - u_0$

- Nếu $a \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_{n+1} - (n+1)b - u_0}{a-1}$

- Nếu $a = 1$ thì $u_n = u_0 + nb$. Khi đó
  $S(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i = \sum\limits_{i=0}^{n}(u_0 + ib) = (n+1)u_0 + (1 + 2 + \cdots + n)b = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}b$
  Vậy $S_n = \begin{cases} (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}b & \text{nếu } a = 1. \\ \dfrac{u_{n+1} - (n+1)b - u_0}{a-1} & \text{nếu } a \neq 1. \end{cases}$

1.4 Tính đơn điệu của dãy afine

Vì u_{n+1} là một hàm bậc nhất của u_n nên dễ dàng khảo sát tính đơn điệu và sự hội tụ của dãy afine.
+ Dãy u_n là dãy tăng nếu ta có $u_n < u_{n+1}$.
+ Dãy u_n là dãy giảm nếu ta có $u_n > u_{n+1}$.

Ví dụ 1. *Tìm số hạng tổng quát và tính tổng của* 2010 *số hạng đầu tiên của dãy số sau:* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1 \end{cases}$

Lời giải. Áp dụng công thức trên ta có số hạng tổng quát của dãy là:

$$u_n = 2^n(1 + \frac{1}{2-1}) - \frac{1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

Tổng của 2010 số hạng đầu tiên của dãy số là:

$$S_{2009} = \frac{u_{2010} - u_0 - (2009+1)1}{2-1} = 2^{2011} - 1 - 1 - 2010 = 2^{2011} - 2012.$$

Ví dụ 2. *Tìm số hạng tổng quát của dãy sau:* $\begin{cases} u_0 = 0; u_1 = 1 \\ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 4, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải. Từ $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 4, \forall n \geq 1$ suy ra $(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = 4, \forall n \geq 1$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n, \forall n \geq 0$ suy ra $v_n - v_{n-1} = 4, \forall n \geq 1$

Do đó $(v_n)_{n\geq 0}$ là cấp số cộng với công sai $d = 4$ và $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

Suy ra $v_n = v_0 + nd = 1 + 4n$

Lại có

$$\begin{aligned} u_n &= u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \cdots + u_1 - u_0 + u_0 \\ &= v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_0 + u_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} v_i + u_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(4i+1) + 0 \\ &= \frac{4n(n-1)}{2} + n = 2n^2 - n. \end{aligned}$$

Nhận xét: Dãy số cấp số cộng và cấp số nhân đã được học ở trung học phổ thông là những trường hợp đặc biệt của dãy afine.

Bài tập đề nghị:

Dạng bài: Cho dãy u_n được xác định:

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ au_n = bu_{n-1} + f(n) \end{cases} \qquad \forall n \geq 2$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $f(n)$ là một đa thức theo n. Tìm công thức tổng quát của dãy (u_n)

Bài tập 1. *Tìm CTTQ của dãy (u_n) được xác định:* $u_1 = 2$, $u_n = 2u_{n-1} + n - 2\ \forall n \geq 2$

Đáp số : $u_n = 2^{n+1} - n - 1$

Bài tập 2. *Tìm CTTQ của dãy số u_n:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n_1} + 2^n \end{cases} \qquad \forall n \geq 2$$

Đáp số : $u_n = 2^n - 3^{n-1}$

Bài tập 3. *Tìm số hạng tổng quát của dãy $(u_n)_n \geq 0$ xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{9}{8} \\ u_{n+1} = nu_n + n.n! \end{cases}$$

Đáp số : $u_n = \dfrac{9}{8}(n-1)! + \dfrac{1}{2}(n-1)n!$

2 Dãy truy hồi tuyến tính cấp hai thực với hệ số hằng

2.1 Định nghĩa

Dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ có dạng $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n (2) \forall a, b \in \mathbb{R}$ được gọi là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai thực với hệ số hằng.

2.2 Số hạng tổng quát

Ký hiệu: $D_{a,b} = (u_n)_{n\geq 0} : u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \forall a, b \in \mathbb{R} (*)$

Vấn đề đặt ra là muốn tìm số hạng tổng quát của dãy (2) thì ta phải làm thế nào? Câu trả lời nằm trong mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1. *$D_{a,b}$ là một $\mathbb{R}$- không gian vectơ 2 chiều.*

Chứng minh. Dễ thấy dãy không $(0)_{n\geq 0}$ thỏa mãn $(*)$ nên $D_{a,b} \neq \varnothing$. Mặt khác với mọi dãy $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in D_{a,b}$ và $x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} xu_{n+2} + yv_{n+2} &= x(au_{n+1} + bu_n) + y(av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(xu_{n+1} + yv_{n+1}) + b(xu_n + yv_n) \in D_{a,b} \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x(u_n)_{n\geq 0} + y(v_n)_{n\geq 0} \in D_{a,b}$
$\Longrightarrow D_{a,b}$ là - $\mathbb{R}$ không gian vectơ
Bây giờ ta sẽ chứng minh không gian vectơ này có 2 chiều.
Thật vậy, xét $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in D_{a,b}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0 \\ v_0 = 0, v_1 = 1 \end{cases}$$

Khi đó nếu $x(u_n)_{n\geq 0} + y(v_n)_{n\geq 0} = (0)_{n\geq 0}$ thì

$$\begin{cases} xu_0 + yv_0 = 0 \\ xu_1 + yv_1 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow x = y = 0$
$\Longrightarrow (u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ độc lập tuyến tính trong $D_{a,b}$
Lấy một dãy tùy ý $(w_n)_{n\geq 0} \in D_{a,b}$ ta sẽ chỉ ra nhờ quy nạp rằng

$$\begin{aligned} & (w_n)_{n\geq 0} = w_0(u_n)_{n\geq 0} + w_1(v_n)_{n\geq 0} \\ \Longleftrightarrow \quad & w_n = w_0u_n + w_1v_n \qquad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

Dễ thấy hệ thức này đúng với $n = 0$ và $n = 1$
Giả sử hệ thức này đã đúng với n và $n + 1$, tức là

$$\begin{cases} w_n = w_0u_n + w_1v_n \\ w_{n+1} = w_0u_{n+1} + w_1v_{n+1} \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= aw_{n+1} + bw_n \\ &= a(w_0u_{n+1} + w_1v_{n+1}) + b(w_0u_n + w_1v_n) \\ &= w_0(au_{n+1} + bu_n) + w_1(av_{n+1} + bv_n) \\ &= w_0u_{n+2} + w_1v_{n+2} \end{aligned}$$

Từ những điều trên ta suy ra $\{(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}\}$ là một cơ sở của $D_{a,b}$.
Vậy $D_{a,b}$ có chiều 2. ■

Ta xét xem $D_{a,b}$ có chứa các dãy nhân hay không? Cho $t \in \mathbb{K}$ dãy

$$(t^n)_n \geq 0 \in D_{a,b} \Leftrightarrow t^{n+2} = at^{n+1} + bt^n$$

nghĩa là $t^2 - at - b = 0$.
Xét phương trình $t^2 - at - b = 0$ (3), với $\Delta = a^2 + 4b$ được gọi là *phương trình đặc trưng* của (2).
Trường hợp 1: $\Delta > 0$. Khi đó (3) có hai nghiệm thực phân biệt t_1 và t_2. Dễ kiểm tra được rằng $\{(t_1^n)_{n\geq 0}, (t_2^n)_{n\geq 0}\}$ là một cơ sở của $D_{a,b}$
Như vậy nghiệm tổng quát của (2) sẽ là $u_n = xt_1^n + yt_2^n \quad \forall n \geq 0$ và $x, y \in \mathbb{R}$

Nhận xét: Nếu biết trước u_0 và u_1 thì x và y là hoàn toàn xác định.

Ví dụ 3. *Tính số hạng tổng quát của dãy $(f_n)_{n\geq 0}$ xác định bởi $f_0 = 0, f_1 = 1$ và $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ với mọi $n \geq 0$*

Lời giải. Dãy đã cho có phương trình đặc trưng: $t^2 - t - 1 = 0$ với hai nghiệm thực phân biệt $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy có dạng:

$$f_n = x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 0$$

Mà theo giả thiết ta có $f_0 = 0, f_1 = 1$ nên ta rút ra

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + y\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ y = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy Fibonacci là:

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \quad \forall n \geq 0$$

Ví dụ 4. *Cho dãy (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi sau:*

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} \end{cases}$$

Lời giải. Dãy cho bởi hệ thức truy hồi ở trên là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai nên ta có phương trình đặc trưng của dãy là $t^2 - 3t + 2 = 0$ $(*)$. Phương trình $(*)$ có $\Delta = 1 > 0$ nên có hai nghiệm thực phân biệt $t_1 = 1, t_2 = 2$
$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của dãy có dạng: $u_n = x1^n + y2^n$ $(x, y \in \mathbb{R})$
Từ $u_0 = 2, u_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow u_n = 1 + 2^n$

<u>*Trường hợp 2*</u>: $\Delta = 0$ Khi đó phương trình (3) có nghiệm kép thực α, và dễ thấy $(\alpha^n)_{n\geq 0}, (n\alpha^{n-1})_{n\geq 0}$ là một cơ sở của $D_{a,b}$.
Do đó nghiệm tổng quát của (2) là $u_n = x\alpha^n + yn\alpha^{n-1} \qquad \forall n \geq 0$

Ví dụ 5. *Tìm số hạng tổng quát của $(u_n)_{n\geq 0}$ xác định bởi: $u_0 = u_1 = 1$ và $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n, \forall n \geq 0$*

<u>*Lời giải:*</u>. Ta có phương trình đặc trưng là: $t^2 - 6t + 9 = 0$, có $\Delta = 0$ nên có nghiệm kép thực là $t = 3$. Do đó số hạng tổng quát của dãy có dạng: $u_n = x3^n + y3^{n-1}$
Do $u_0 + u_1 = 1$ nên suy ra

$$\begin{cases} x = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = 3^n - 2.3^{n-1}$

<u>*Trường hợp 3*</u>: $\Delta < 0$ Khi đó (3) có hai nghiệm phức không thực α, β mà $\alpha = \overline{\beta} = z$. Bây giờ ta xét $(*)$ trên trường số phức $\mathbb{C}$. Khi ấy lập luận tương tự như trên trường số thực ta có tập tất cả các dãy phức thỏa mãn $(*)$ lập thành một không gian vectơ A hai chiều trên $\mathbb{C}$ và nghiệm tổng quát của $(*)$ trong $\mathbb{C}$ là $(x\alpha^n + y\beta^n)_{n\geq 0}, x, y \in \mathbb{C}$
Chứng minh như trong giáo trình ta có $D_{a,b} = \{xz^n + \overline{xz^n} : x \in \mathbb{C}, z = \alpha\}$
$\Longrightarrow D_{a,b} = \{r^n(p\cos n\alpha + q\sin n\alpha)\}$ với $(p, q) \in \mathbb{R}^2; r = |z|, \alpha = \text{Arg } z$

Ta có các bước để tìm số hạng tổng quát của dãy như sau:

- Giải phương trình (3) nhận được các nghiệm $\alpha = \dfrac{a + i\sqrt{-\Delta}}{2}, \beta = \dfrac{a - i\sqrt{-\Delta}}{2}$
- Đặt $r = |\alpha|$ (là module của z) và $\varphi = \text{Arg}\alpha$, ta nhận được

$$u_n = r^n(p\cos n\varphi - q\sin n\varphi), \forall (p, q) \in \mathbb{R}^2$$

- Xác định $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ theo u_0, u_1 cho trước.

Ví dụ 6. *Tính số hạng tổng quát của dãy $(P_n)_n \geq 0$ xác định bởi*

$$\begin{cases} P_0 = 0, P_1 = 1 \\ P_{n+2} = -2P_{n+1} - 4P_n \end{cases} \qquad \forall n \geq 0$$

<u>*Lời giải.*</u> Phương trình đặc trưng $x^2 + 2x + 4 = 0$ có 1 nghiệm phức $z = -1 + i\sqrt{3}$. Ta thấy ngay $\mid z \mid = 2$ và $Arg z = \dfrac{2\pi}{3}$

Do đó số hạng tổng quát của dãy có dạng: $P_n = 2^n(x\cos\frac{2n\pi}{3} + y\sin\frac{2n\pi}{3}) \qquad \forall n \geq 0$
Từ giả thiết $P_0 = 0, P_1 = 1$ ta rút ra

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2^n(x\cos\frac{2n\pi}{3} + y\sin\frac{2n\pi}{3}) = 1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 0, y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy $P_n = 2^n\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3} \qquad \forall n \geq 0$

Chú ý: Để có một cái nhìn sâu sắc hơn chúng ta có thể hiểu trường hợp $1, 2$ một cách sơ cấp như sau:

Với $a \neq 0, b \neq 0$. Đặt $a = \alpha + \beta$ và $b = -\alpha\beta \Rightarrow \alpha \neq 0;\ \beta \neq 0$
Ta có $u_{n+2} = (\alpha + \beta)u_{n+1} - \alpha\beta \Longleftrightarrow u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n)$
Đặt dãy $x_n = u_n - \alpha u_{n-1}, \forall n \geq 1 \Longrightarrow x_{n+2} = \beta x_n + 1$
Xét dãy $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_{n+2} = \beta x_{n+1}$
Ta có $x_2 = \beta x_1;\ x_3 = \beta x_2; \cdots; x_n = \beta x_{n-1}$
Suy ra $x_n = \beta^{n-1}x_1$
Hay $u_n - \alpha u_{n-1} = \beta^{n-1}x_1 \Longleftrightarrow u_n = \alpha u_{n+1} + \beta^n - 1x_1$
Đặt $u_n = \beta^n y_n, \forall n$
Suy ra $\beta^n y_n = \beta^{n-1}\alpha y_{n-1} + \beta^{n-1}x_1 \Longleftrightarrow \beta y_n = \alpha y_{n-1} + x_1 \Longleftrightarrow y_n = \frac{\alpha}{\beta}y_{n-1} + \frac{x_1}{\beta}$
Suy ra (y_n) là dãy afine

Áp dụng công thức tổng quát của dãy afine ta có

* Nếu $\alpha \neq \beta$ thì

$$\begin{aligned} y_n &= (\frac{\alpha}{\beta})^n(y_0 + \frac{\frac{x_1}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}) \\ \Longleftrightarrow \quad y_n &= \frac{\alpha^n}{\beta^n}(y_0 + \frac{x_1}{\alpha - \beta}) - \frac{x_1}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

Thay $y_n = \frac{1}{\beta}u_n; y_0 = u_0; x_1 = u_1 - \alpha u_0$
Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^n}u_n &= \frac{\alpha^n}{\beta^n}(u_0 + \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta}) - \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta} \\ \Longleftrightarrow \quad u_n &= \alpha^n(u_0 + \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta}) - \beta^n\frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

* Nếu $\alpha = \beta$ là nghiệm kép của phương trình: $x^2 - ax - b = 0$, ta có:

$$y_n = y_{n+1} + \frac{x_1}{\beta},$$

$$\forall n \geq 1$$

Suy ra dãy đã cho là một cấp số cộng.

$$
\begin{aligned}
& y_1 = y_0 + \frac{x_1}{\beta} \\
& y_2 = y_1 + \frac{x_1}{\beta} \\
& \dots\dots\dots\dots \\
& y_n = y_{n-1} + \frac{x_1}{\beta} \\
\Longrightarrow\ & y_n = y_0 + n\frac{x_1}{\beta} \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{\beta^n} = u_0 + n\frac{u_1 - \alpha u_0}{\beta} \\
\Longleftrightarrow\ & u_n = \beta u_0 + n\beta^{n-1}(u_1 - \alpha u_0)
\end{aligned}
$$

Bài tập đề nghị: Tìm số hạng tổng quát của dãy $(u_n)_{n\geq 0}$

Bài tập 4.

$$
\begin{cases} u_0 = 3 + i \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3u_n - i\bar{u_n}) \end{cases}
$$

Hướng dẫn. $\forall n \geq 0$

$$
\begin{aligned}
16u_{n+2} &= 12u_{n+1} - i(3\bar{u_n} + iu_n) \\
&= 12u_{n+1} + 3(4u_{n+1} - 3u_n) + u_n
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$

Đáp số : $u_n = 1 - i(1+i)2^{1-n}$

Bài tập 5.

$$
\begin{cases} u_0 = \dfrac{37}{12}, u_1 = \dfrac{35}{12} \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n + 3^{n+1} \end{cases}
$$

Hướng dẫn. Ta tìm dãy $(v_n)_{n\geq 0}$ sao cho $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n + (-1)^n + 3^{n+1}$, dãy này có dạng $v_n = (\alpha n + \beta)(-1)^n + \gamma 3^n$

Bằng phép tính sơ cấp ta có $\alpha = \dfrac{1}{3}, \gamma = \dfrac{3}{4}, \beta \in \mathbb{R}$ tùy ý

Dãy $(w_n)_{n\geq 0}$ được định nghĩa bởi $w_n = u_n - v_n$ thỏa mãn $w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n$

Từ đó suy ra tồn tại $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $w_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$

Như vậy $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n + \dfrac{1}{2}n(-1)^n + \dfrac{3}{4}3^n$

Từ giả thiết u_0, u_1 ta suy ra λ, μ

Đáp số : $u_n = \dfrac{4}{3}(-1)^n + 2^n + \dfrac{1}{4}3^{n+1}$

2.3 Hai dạng đưa về dãy truy hồi tuyến tính cấp hai

Dạng 1: $(u_n)^a = (u_{n-1})^b(u_{n-2})^c$ $(a, b, c = const)$

Phương pháp. Đặt $(v_n) = \ln(u_n)$ ta được dãy truy hồi tuyến tính mới có dạng:

$$v_n = \frac{b}{a}v_{n-1} + \frac{c}{a}v_{n-2}$$

Suy ra số hạng tổng quát của (v_n) suy ra $u_n = e^{v_n}$

Dạng 2:

$$u_n = \frac{au_{n-1}u_{n-2}}{bu_{n-1} + cu_{n-2}}(a, b, c = const)$$

Phương pháp. Đặt $(v_n) = \frac{1}{u_n}$ ta được dãy truy hồi tuyến tính mới có dạng:

$$v_n = \frac{c}{a}v_{n-1} + \frac{b}{a}v_{n-2}$$

Ta có thể tìm ra số hạng tổng quát của (v_n). Từ đó suy ra công thức tổng quát (CTTQ) của (u_n) từ $u_n = \frac{1}{v_n}$

Ví dụ 7. *Xác định số hạng tổng quát của dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ biết rằng $u_0 = a > 0$ và $u_1 = b > 0$; $u_{n+2} = \sqrt[3]{u_n^2 u_{n+1}}$ với mọi $n \geq 0$([1])*

Lời giải. Ta có

$$u_{n+2} = \sqrt[3]{u_n^2 u_{n+1}}(1)$$
$$\iff u_{n+2} = u_{n+1}^{\frac{2}{3}} u_n^{\frac{1}{3}}$$

Nên đặt $v_n = \ln u_n$ ta được dãy truy hồi tuyến tính có dạng $v_{n+2} = \frac{2}{3}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_n(*)$
Phương trình đặc trưng của dãy (1): $t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} = 0$
Phương trình có hai nghiệm $t_1 = 1; t_2 = 3$
Vậy CTTQ của dãy $(v_n)_{n\geq 0}$ có dạng $v_n = x1^n + y3^n; x, y \in \mathbb{R}$
Do

$$u_0 = a; u_1 = b \Longrightarrow v_0 = lna; v_1 = lnb$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} lna = x + y \\ lnb = x + 3y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\ln\frac{a^3}{b}}{2} \\ y = \frac{\ln\frac{b}{a}}{2} \end{cases} \Longrightarrow v_n = \frac{\ln\dfrac{a^3}{b}}{2} + \frac{\ln\dfrac{b}{a}}{2}3^n.$$

CTTQ của dãy(1) là

$$u_n = e^{v_n} = e^{\frac{\ln\frac{a^3}{b}}{2} + \frac{\ln\frac{b}{a}}{2}3^n}$$

Ví dụ 8. *Tính số hạng tổng quát của dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ biết $u_0 = a > 0; u_1 = b > 0$ và $u_{n+2} = \frac{2u_n u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}}(2)$ với mọi $n \geq 0$([2])*

[1] Bài tập 3 trang 53 GT
[2] Bài tập 4 trang 53 GT

Chứng minh. Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ ta được dãy truy hồi tuyến tính mới có dạng:

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n(*)$$

Phương trình đặc trưng của (*) là $2t^2 - t - 1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}; t_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$

Vậy CTTQ của dãy (*) có dạng $v_n = x\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n + y\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n; x, y \in \mathbb{R}$

Do $u_0 = a > 0; u_1 = b > 0$ nên $v_0 = \dfrac{1}{a}; v_1 = \dfrac{1}{b}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} = x + y \\ \dfrac{1}{b} = x\dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + y\dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b + b\sqrt{3} + 4a}{2ab\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{b + b\sqrt{3} - 4a}{2ab\sqrt{3}} \end{cases}$$

Do đó

$$v_n = \frac{-b + b\sqrt{3} + 4a}{2ab\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n + \frac{b + b\sqrt{3} - 4a}{2ab\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n$$

Vậy CTTQ của dãy (2) là $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\dfrac{-b + b\sqrt{3} + 4a}{2ab\sqrt{3}}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n + \dfrac{b + b\sqrt{3} - 4a}{2ab\sqrt{3}}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n}$

Bài tập đề nghị:

Bài tập 6. *Cho dãy* (u_n) *cho bởi hệ thức truy hồi sau:*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1}, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn. Ta có

$$\begin{aligned} & u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1}, \forall n \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & u_{n+1} - 3u_n = \sqrt{8u_n^2 + 1} \\ \Longleftrightarrow\ & u_{n+1}^2 - 6u_{n+1}u_n + u_n^2 = 1(1) \end{aligned}$$

Thay $n + 1 = n$ ta được $u_n^2 - 6u_nu_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1(2)$
Lấy hai vế của (1) trừ đi hai vế của (2) ta có $(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1} - 6u_n) = 0(3)$. Do $u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1}, \forall n \geq 0 \Longrightarrow u_{n+1} > 3u_n > 9u_{n-1}\ u_{n+1} > u_{n-1}$
Vậy (3) $\Longleftrightarrow (u_{n+1} + u_{n-1} - 6u_n)$ và dãy ban đầu trở thành

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 6 + \sqrt{33} \\ u_{n+1} + u_{n-1} - 6u_n = 0, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Dãy cho bởi hệ thức truy hồi ở trên là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai nên ta có phương trình đặc trưng của dãy là $t^2 - 6t + 1 = 0$ (*). Phương trình (*) có $\Delta = 8 > 0$ nên có hai

nghiệm thực phân biệt $t_1 = 3 + \sqrt{8}, t_2 = 3 - \sqrt{8}$
Suy ra nghiệm tổng quát của dãy có dạng $u_n = x(3 + \sqrt{8})^n + y(3 - \sqrt{8})^n; x, y \in \mathbb{R}$
Từ $u_0 = 2, u_1 = 6 + \sqrt{33} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8 + \sqrt{66}}{8} \\ y = \dfrac{8 - \sqrt{66}}{8} \end{cases}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{8 + \sqrt{66}}{8}(3 + \sqrt{8})^n + \frac{8 - \sqrt{66}}{8}(3 - \sqrt{8})^n$$

2.4 Dãy truy hồi tuyến tính cấp k với hệ số hằng

2.4.1 Định nghĩa

Dãy truy hồi tuyến tính cấp k với hệ số hằng là dãy $u_{nn} \geq 0$ được xác định bởi:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n (4); a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0$$

2.4.2 Số hạng tổng quát và tổng riêng hữu hạn

Tương tự hai trường hợp trên, ta xét $D_{a_1, a_2, \cdots, a_k}$ là tập tất cả các dãy truy hồi tuyến tính cấp k. Khi đó ta có bổ đề:

Bổ đề 2.2. *$D_{a_1, a_2, \cdots, a_k}$ là một $\mathbb{R}$ - không gian véc tơ k chiều.*

Định nghĩa 2.3. *Phương trình $t^k - a_1 t^{k-1} - a_2 t^{k-2} - \cdots - a_{k-1} t - a_k = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của dãy truy hồi tuyến tính cấp k*

Bổ đề 2.4. *Nếu phương trình $(*)$ có nghiệm $t = \alpha \neq 0$ (bội $i \geq 2$) thì các dãy $u_{1n}^{\alpha} = \alpha^n, u_{2n}^{\alpha} = n\alpha^{n-1}, \cdots, u_{in}^{\alpha} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+2)\alpha^{n-i+1}$ đều thỏa mãn (4). Còn khi $\alpha \neq 0$ là nghiệm đơn thì dãy $u_{1n} = \alpha^n$ thỏa mãn (4)*

Từ hai bổ đề trên ta nhận được kết quả sau:

Giả sử phương trình đặc trưng $(*)$ có các nghiệm α_1 (bội i_1), α_2 (bội i_2), $\cdots$, α_j (bội i_j). Ở đó $\sum_{i}^{j}(i_j) = k$ (quy ước nghiệm đơn là nghiệm bội cấp 1)
Khi đó ta có hệ $(u_{dn}^{\alpha_t}), t = \overline{1, j}, d = \overline{1, i_j}$ là một cơ sở của $D_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k}$
Vì vậy ta có thể biểu diễn số hạng tổng quát của dãy qua cơ sở $(u_{dn}^{\alpha t})$ bằng công thức sau:

$$\begin{aligned} u_n &= x_1 \alpha_1^n + x_2 n \alpha_2^{n-1} + \cdots + x_i n(n-1)\cdots(n-i_1+2)\alpha_i^{n-i_1+1} + x_{i_1+1}\alpha_2^n + x_{i_1+2} n \alpha_2^{n-1} + \cdots \\ &\quad + x_{i_1+i_2} n(n-1)(n-i_2+2)\alpha^{n-i_2+1} + \cdots + x_{i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+1}\alpha_j^n + \cdots \\ &\quad + x_k n(n-1)\cdots(n-i_j+2)\alpha^{n-i_j+2}\alpha^{n-i_j+1} \end{aligned}$$

Như vậy công thức tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính cấp k hoàn toàn được xác định nếu biết k số hạng của dãy.

Tuy nhiên việc giải phương trình bậc $k \geq 5$ là không có cách làm tổng quát và việc giải hệ với nhiều ẩn là hết sức phức tạp nên ta chỉ xét các trường hợp đặc biệt khi k nhỏ và khi phương trình đặc trưng dễ dàng chỉ ra nghiệm.

Ví dụ 9. *Tìm công thức tổng quát của dãy xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_n = 6u_{n-1} - 11u_{n-2} + 6u_{n-3} \\ u_0 = 2, u_1 = 5, u_2 = 15 \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình đặc trưng: $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$
$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình là:$t_1 = 1; t_2 = 2; t_3 = 3$
$\Rightarrow$ CTTQ có dạng $u_n = x_1 1^n + x_2 2^n + x_3 3^n$
Ta có $\begin{cases} u_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ u_1 = 5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ u_3 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$
$\Rightarrow$ Công thức tổng quát của dãy là

$$u_n = 1 - 2^n + 2.3^n$$

Bài tập đề nghị:

Bài tập 7. *Cho dãy số xác định bởi hệ:*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n - 6u_{n+2} (n \geq 3) \\ u_1 = 0, u_2 = 14, u_3 = -18 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu p nguyên tố thì $u_p \vdots p$

Hướng dẫn. Đây là dãy truy hồi tuyến tính cấp 3, tìm số hạng tổng quát và dùng định lí Fecmat nhỏ chứng minh $u_n \equiv 0 (modp), \forall p$ nguyên tố.

Bài tập 8. *Xác định công thức tổng quát của dãy cho bởi hệ thức sau:*

$$u_{n+4} - u_{n+3} - 3u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0, n \geq 0$$

và $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = -2$

Hướng dẫn. Phương trình đặc trưng của dãy là $t^4 - t^3 - 3t^2 + 5t - 2 = 0$
Phương trình có nghiệm $t_1 = 1$ (bội 3), $t_2 = -2$ (bội 1)
Vậy công thức tổng quát của dãy có dạng

$$u_n = x1^n + yn1^{n-1} + zn(n-1)1^{n-2} + t(-2)^n$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} u_0 = 0 = x + t \\ u_1 = 1 = x + y - 2t \\ u_2 = 3 = x + 2y + 2z + 4t \\ u_3 = -2 = x + 3y + 6z - 8t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5}{24} \\ y = \dfrac{13}{8} \\ z = \dfrac{-5}{6} \\ t = \dfrac{5}{24} \end{cases}$$

Vậy CTTQ của dãy số là

$$u_n = \frac{-5}{24} + \frac{13}{8}n + \frac{-5}{6}n(n-1) + \frac{5}{24}(-2)^n$$

Bài tập 9. *Cho dãy số thực* $(u_n)_n \geq 1$ *được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = 1 \\ u_{n+3} = \dfrac{1 + u_{n+1}u_{n+2}}{u_n + u_{n+1}} \end{cases} \qquad \forall n \geq 1$$

Chứng minh rằng $(u_n)n \geq 1$ *là dãy nguyên dương.*

Hướng dẫn: Chứng minh bằng quy nạp

2.5 Dãy truy hồi $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n + f_n$

$(a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}, k > 3)(**)$

Nếu từ số hạng tổng quát u_n của dãy:

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n; (a_1, a+2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}, k > 3)(*)$$

Liệu ta có thể tìm được số hạng tổng quát u_n của dãy cho như sau hay không

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n + f_n; (a_1, a+2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}, k > 3)(**)$$

Với f_n là một hàm theo biến n

Phương pháp chung để giải dạng toán này như sau:

Số hạng tổng quát của dãy $(**)$ có dạng $u'_n = u_n + u*_n$

Trong đó u_n là số hạng tổng quát của dãy $(*)$ và $u*_n$ là một dãy bất kì thỏa mãn $(**)$ và được gọi là nghiệm riêng của $(**)$

Sau đây là một số trường hợp thường gặp đối với hàm f_n. Để xác định các tham số trong các dạng nghiệm riêng $u*_n$ người ta dùng phương pháp hệ số bất định.

Trường hợp 1: f_n là đa thức bậc m của n hay

$$f_n = P_m(n), m \in \mathbb{N}$$

a. Nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng đều khác 1 thì

$$u*_n = Q_m(n)$$

Trong đó $Q_m(n)$ là đa thức có cùng bậc m với $P_m(n)$

b. Nếu có nghiệm $\lambda = 1$ bội s thì

$$u*_n = n^sQ_m(n), m \in \mathbb{N}$$

Trong đó $Q_m(n)$ là đa thức có cùng bậc m với $P_m(n)$

<u>*Trường hợp 2:*</u> $f_n = P_m(n)\beta^n$ với f_n là đa thức bậc m của n

a. Nếu các nghiệm của PTĐT đều khác β thì

$$u*_n = Q_m(n)\beta^n$$

Trong đó $Q_m(n)$ là đa thức có cùng bậc m với $P_m(n)$

b. Nếu β là nghiệm bội s của PTĐT thì

$$u*_n = n^s Q_m(n)\beta^n$$

<u>*Trường hợp 3:*</u> $f_n = \alpha\cos nx + \beta\sin nx$
Nghiệm riêng $u*_n = a\cos nx + b\sin nx$
<u>*Trường hợp 4:*</u> $f_n = f_{n1} + f_{n2} + \cdots + f_{nk}$
Khi đó $u*_n = u*_{n1} + u*_{n2} + \cdots + u*_{nk}$ Với $u*_{ni}$ là nghiệm riêng ứng với từng hàm $f_{ni}, i = \overline{1,k}$
<u>**Bài tập đề nghị**</u>:

Bài tập 10. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số sau:*

$$u_{n+4} - u_{n+3} - 3u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0 (n \geq 0)$$

Hướng dẫn. PTĐT có nghiệm $t_1 = 1$(bội 3), $t_2 = -2$. Tìm nghiệm riêng dạng $u*_n = n^3 a$ tìm được $a = \dfrac{1}{18}$

Đáp số $u_n = a + bn + cn^2 + d(-2)^n + \frac{1}{8}n^3, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Bài tập 11. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số sau*

$$u_{n+4} - 10u_{n+3} + 35u_{n+2} - 50u_{n+1} + 24u_n = 48.5^n (n \geq 0)$$

Hướng dẫn. PTĐT $t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24 = 0$ có các nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$ khác 5 nên $u*_n = a5^n$
Thay vào ta được $a = 2$ nên số hạng tổng quát của dãy đã cho là:

$$u_n = a + b2^n + c3^n + d4^n + 2.5^n; a, b, c.d \in \mathbb{R}$$

Bài tập 12. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số sau:*

$$u_{n+3} - 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n = (2 - \sqrt{2})\cos\frac{n\pi}{4} + 2\sin\frac{n\pi}{4} (n \geq 0)$$

Hướng dẫn. Nghiệm riêng $u*_n$ có dạng $u*_n = a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4}; a = 1, b = 0$

3 Dãy truy hồi dạng $u_{n+1} = f(u_n)$

Trong phần này ta sẽ khảo sát loại dãy truy hồi dạng $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \geq 0$. Rõ ràng tính chất của dãy hoàn toàn phụ thuộc vào hàm f và phần tử xuất phát u_0.

Giả sử $f : M \to M$ là một ánh xạ cho trước và $u_0 \in M$.

3.1 f đơn điệu trên M

Trường hợp 1: f đơn điệu tăng trên M

Do $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ và f là hàm tăng nên $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_n - u_{n-1}$. Do đó truy hồi theo n ta được $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$.
Suy ra:
+ Nếu $u_1 \leq u_0$ thì $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy tăng.
+ Nếu $u_0 \leq u_1$ thì $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy giảm.

Trường hợp 2: f đơn điệu giảm trên M.

Khi đó ta xét ánh xạ tích $f^2 = f.f$ là một hàm tăng trên M. Vì vậy áp dụng *trường hợp 1* ta suy ra
+ Nếu $u_2 \leq u_0$ thì dãy con $(u_{2n})_{n\geq 0}$ là một dãy tăng và dãy $(u_{2n+1})n \geq 0$ là một dãy giảm.
+ Nếu $u_0 \leq u_2$ thì dãy con $(u_{2n})_{n\geq 0}$ là một dãy giảm và $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ là 1 dãy tăng.

3.2 f liên tục trên M và M đóng trong $\mathbb{R}$.

Giả sử $(u_n)_{n\geq 0}$ hội tụ và nếu nó hội tụ về α thì $\alpha \in M$ (do M đóng trong $\mathbb{R}$).
Vì f liên tục trên M nên $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.
Như vậy $\alpha = f(\alpha)$ tức α là một nghiệm thuộc M của phương trình $f(x) = x$.

Bây giờ chúng ta xét một vài ví dụ:

Ví dụ 10. *Khảo sát dãy số* $(u_n)_{n\geq 0}$ *với* $u_0 = 1$ *và* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$

Lời giải. Dễ thấy $(u_n)_{n\geq 0}$ là một dãy số dương.
Mặt khác:

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n^2+1} - u_n < 0 \\ \Rightarrow\ & u_n < u_0 \qquad \forall n \geq 1 \\ \Rightarrow\ & u_n \in [0,1] \qquad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

Xét ánh xạ: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ trên $[0, 1]$
Ta có $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$
Như vậy f liên tục từ $[0, 1]$ vào $[0, 1]$

Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ thì α là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ trên $[0,1]$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = x \\ &\Leftrightarrow x = x(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow x^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \in [0,1] \end{aligned}$$

Vậy dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ là dãy giảm thực sự và hội tụ về 0.

Ví dụ 11. *Khảo sát sự hội tụ và tính giới hạn (nếu có) của dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ với*

$$u_0 = a > 0; u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \qquad \forall n \geq 0$$

Lời giải. Theo bài ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2+8) \Rightarrow u_{n+1} > 0$, $\forall n \geq 0$
Đặt $f(x) = \frac{1}{6}(x^2+8), x > 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(x^2+8) = x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Lại có $f'(x) = \frac{1}{3}x \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x > 0$
Suy ra $f(x)$ là hàm tăng từ $[0,+\infty)$ vào chính nó.
Hơn nữa $f(0) = \frac{4}{3}; f(2) = 2; f(4) = 4$
Suy ra $f([0,2]) \subset [0,2]; f([2,4]) \subset [2,4]; f([4,+\infty)) \subset [4,+\infty)$
Vậy ta xét các khả năng sau:
Khả năng 1: $\alpha \in [0,2]$. Ta có $u_1 = \frac{1}{6}(a^2+8) \leq a = u_0$ mà f tăng trên $[0,2]$ nên $(u_n)_{n\geq 0}$ dãy tăng. Suy ra dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ hội tụ về 2.
Khả năng 2: $\alpha \in [2,4)$. Khi đó $u_1 = \frac{1}{6}(a^2+8) < a = u_0$. Suy ra dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ là dãy giảm. Do đó $(u_n)_{n\geq 0}$ hội tụ và hội tụ về 2.
Khả năng 3: $a = 4$ khi đó mọi số hạng của dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ đều bằng 4. Vậy nó hội tụ về 4.
Khả năng 4: $a \in (4,+\infty)$. Khi đó dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ là dãy tăng nên nếu $(u_n)_{n\geq 0}$ hội tụ về b thì $b > 4$. Mặt khác b là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ (mâu thuẫn).
Vậy dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ không hội tụ.

Bài tập đề nghị:

Bài tập 13. *Khảo sát các dãy $(u_n)n \geq 0$ được cho bởi*

1. $u_0 = 1$ *và* $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n}$
2. $u_0 = a$ *và* $u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6}$

3. $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *và* $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)}$

4. $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *và* $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1$

5. $u_0 \in \mathbb{R}$ *và* $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$

6. $u_0 \in [-1, 0]$ *và* $u_{n+1} = 1 + (-1)^n\sqrt{1 + u_n}$

7. $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *và* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \cdots + \sqrt{u_0}}}$

Hướng dẫn. 1. Ta giả thiết rằng $\forall n \geq 0$ u_n tồn tại và $u_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$ khi $(n \longrightarrow \infty)$
Vì $u_{n+1}u_n - u_n + 2 = 0$ ta suy ra $l^2 - l + 2 = 0$ vô lý vì $\Delta < 0$
Suy ra u_n phân kỳ.

2. Đáp số: $u_n \longrightarrow \begin{cases} -3 & \textit{nếu } u_0 < 1 \\ 1 & \textit{nếu } u_0 = 1 \\ 2 & \textit{nếu } u_0 > 0 \end{cases}$

3. Một phép quy nạp đơn giản cho thấy $\forall n \geq 0$ u_n tồn tại và $u_n > 0$
Nếu $u_n \longrightarrow l$ khi $n \longrightarrow \infty$ thì $l \in \mathbb{R}_+$ và vì $2u_{n+1}(u_n + 1) - u_n^2 - 3 = 0$ bằng cách chuyển qua giới hạn ta suy ra $l = 1$
$\forall n \geq 0, \mid u_{n+1} - 1 \mid = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2(u_n + 1)} = \dfrac{\mid u_n - 1}{2(u_n + 1)} \mid u_n - 1 \mid \leq \dfrac{1}{2} \mid u_n - 1 \mid$
Từ đó $\mid u_n - 1 \mid \leq \dfrac{1}{2^n} \mid u_0 - 1 \mid$
Đáp số: $u_n \longrightarrow 1$ khi $n \longrightarrow \infty$

4. Một phép quy nạp đơn giản cho thấy, với mọi $n \geq 0$ tồn tại và $u_n > 0$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n} \geq 0.$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n}{u_n} \leq 0.$
Như vậy $(u_n)_{n \geq 0}$ giảm và bị chặn dưới bởi 1.
Chuyển qua giới hạn $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(u_{n+1} - u_n + 1) = 1$

5. Đặt $v_n = u_n + 1$ ta có $v_{n+1} = v_n^2 \forall n \geq 0$, từ đó $v_n = v_0^{2^n}$
$u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \textit{nếu } u_0 < -2 \textit{ hoặc } u_0 > 0 \\ 0 & \textit{nếu } u_0 = -2 \textit{ hoặc } u_0 = 0 \\ -1 & \textit{nếu } -2 < u_0 < 0 \end{cases}$

6. Chứng minh bằng quy nạp theo n
$\begin{cases} u_{2n} \in [-1, 0] \\ u_{2n+1} \in [1, 2] \end{cases}$
$(u_n)_{n \geq 0}$ phân kỳ.

7. $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n} = \sqrt{2}\sqrt{u_n}$
Đặt $v_n = \dfrac{1}{2}u_n$, từ đó ta có $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$, suy ra $v_n = v_1^{\frac{1}{2^{n-1}}} \longrightarrow 1$ khi $n \longrightarrow \infty$
Do đó $u_n \longrightarrow 2$ khi $n \longrightarrow \infty$

Bài tập 14. *Tìm a, b để dãy số sau hội tụ:*

$$\begin{cases} u_0 = b \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \end{cases}$$

4 Mở rộng

4.1 Một vài phương pháp khác

* ***Hai dãy truy hồi tuyến tính phụ thuộc lẫn nhau***.

Cho 2 dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ và $(v_n)_{n\geq 0}$ thỏa mãn $u_1 = a, v_1 = b$ và

$$\begin{cases} u_{n+1} = x_1.u_n + y_1.v_n & (1) \\ v_{n+1} = x_2.u_n + y_2.v_n & (2) \end{cases} \qquad \forall n \geq 0$$

trong đó $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Trong công thức (1) thay $n+1$ bởi $n+2$ ta được

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= x_1.u_{n+1} + y_1.v_{n+1} \\ &= x_1.u_{n+1} + y_1(x_2.u_n + y_2.v_n) \\ &= x_1.u_{n+1} + x_2.y_1.u_n + y_2(y_1.v_n) \\ &= x_1.u_{n+1} + x_2.y_1.u_n + y_2.(u_{n+1} - x_1.u_n) \\ &= (x_1.y_2)u_{n+1} + (x_2.y_1 - x_1.y_2).u_n \end{aligned}$$

Đây là dạng cơ bản của dãy truy hồi tuyến tính với hệ số hằng. Do vậy ta có thể tìm được công thức tổng quát của u_n, từ đó tìm được v_n.

Ví dụ 12. *Tìm công thức số hạng tổng quát của hai dãy cho bởi:*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n & (1) \\ v_{n+1} = 5u_n - v_n & (2) \end{cases} \qquad \forall n \geq 0$$

và thỏa mãn $u_0 = 0, v_0 = 6$

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 3u_{n+1} + 5u_n - v_n \\ &= 3u_{n+1} + 5u_n + 3u_n - u_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} + 8u_n \end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng: $t^2 - 2t - 8 = 0$ có 2 nghiệm $t_1 = 2$ và $t_2 = -4$

Suy ra: $u_n = A.2^n + A.(-4)^n$

Có $u_0 = 0$; $v_0 = 6$ nên $u_1 = 6$. Do vậy

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 4B = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Vậy $u_n = 2^n - (-4)^n$

Theo đầu bài ta có: $u_{n+1} + v_{n+1} = 8u_n$.

Suy ra: $v_{n+1} = -u_{n+1} + 8u_n = 3.2^{n+1} + 3(-4)^{n+1}$.

Bài tập đề nghị:

Bài tập 15. *Cho 2 dãy số* (u_n) *và* (v_n)*:*

$$\begin{cases} u_1 = 1, v_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát của (u_n) *và* (v_n)

Đáp số: $u_n = v_n = 2^{n-1}$

Bài tập 16. *Khảo sát các dãy* $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n} \\ v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$$

Hướng dẫn. Chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n \in \mathbb{N}, u_n$ và v_n tồn tại và đều thuộc $[0, 3]$

Giả sử tồn tại $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ sao cho $u_n \longrightarrow l$ và $v_n \longrightarrow l'$ khi$(n \longrightarrow \infty)$. Khi đó $\begin{cases} l = \sqrt{3 - l'} \\ l' = \sqrt{3 + l} \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} (l + l')(l - l' + 1) = 0 \\ l^2 = 3 - l' \end{cases}$ và $l = 1, l' = 2$ Đặt $a_n = u_n - 1$ và $b_n = v_n - 2$

Ta có $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{1 - b_n} - 1 = \dfrac{-b_n}{\sqrt{1 - b_n} + 1} \\ b_n + 1 = \sqrt{4 + a_n - 2} = \dfrac{a_n}{\sqrt{4 + a_n} + 2} \end{cases}$ từ đó $\begin{cases} | a_{n+1} | \leq | b_n | \\ | b_{n+1} | \leq \dfrac{1}{2} | a_n | \end{cases}$

Ký hiệu $\mu_n = max\{| a_n |, | b_n |\}$, ta có $0 \leq \mu_{n+2} \leq \dfrac{1}{2}\mu_n$

suy ra $\mu_n \longrightarrow 0$ sau đó $a_n \longrightarrow 0, b_n \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$

Đáp số : $u_n \longrightarrow 1, v_n \longrightarrow 2$ khi $n \longrightarrow \infty$

* ***Dãy truy hồi dạng phân tuyến tính***

Cho dãy truy hồi xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{pu_n + q}{ru_n + s} \end{cases}$$

trong đó p, q, r, s là các hằng số, a cho trước. Ta cần tìm số hạng tổng quát của dãy. Giả sử có 2 dãy $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = px_n + qy_n \\ y_{n+1} = rx_n + sy_n \end{cases}$$

và thỏa mãn $x_0 = a$, $y_0 = 1$

Khi đó ta chứng minh được $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ là số hạng tổng quát của dãy đã cho bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy

+ Ta có $u_0 = \dfrac{x_0}{y_0} = a$. Suy ra kết luận đúng với $n = 0$.

+ Giả sử kết luận đúng với n.
  Ta sẽ chứng minh kết luận đúng với $n+1$ tức là $u_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$

  Ta có:

  $$u_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{px_n + q}{rx_n + sy_n} = \frac{p\dfrac{x_n}{y_n} + q}{r\dfrac{x_n}{y_n}} = \frac{pu_n + q}{ru_n + s}$$

  Suy ra kết luận đúng với $n+1$.

  Vậy $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}, \forall n \geq 0$

Ví dụ 13. *Tìm công thức tổng quát của dãy $(u_n)_{n\geq 0}$ xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4} \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n \\ x_0 = 0, y_0 = 1 \end{cases}$$

Ta được $x_{n+2} = 5.x_{n+1} - 6.y_{n+1}$

Phương trình đặc trưng $t^2 - 5t + 6 = 0$ có 2 nghiệm là $t_1 = 2$ và $t_2 = 3$ nên ta có $x_n = A.2^n + B.3^n$.

Ta có $x_0 = 0, y_0 = 1$ nên $x_1 = -2$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \end{cases}$$

Vậy ta có $x_n = 2.2^n - 2.3^n$

Từ hệ suy ra $y_n = -2^n + 2.3^n$

Vậy số hạng tổng quát của dãy là $u_n = \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{2.2^n - 2.3^n}{-2^n + 2.3^n}$.

Ví dụ 14. *([3]) Cho u_n có dạng*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

a.Tính u_{2000}=?
b.Tìm phần nguyên của

$$A = \sum_{n=1}^{2000} u_n \tag{1}$$

<u>*Lời giải.*</u> Ta có $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$
Suy ra $\dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = 1 + \dfrac{3}{u_n - 1}$
Đặt $a_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$
Suy ra

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 1 \end{cases}$$

Suy ra

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Suy ra

$$u_n = 1 + \frac{2}{3^{n+1} - 1}$$

a.Ta có $u_{2000} = \dfrac{3^{2001} + 1}{3^{2001} - 1}$

b. Ta có $A = 2000 + 2\sum\limits_{n=1}^{2000} \dfrac{1}{3^{n+1} - 1}$

Suy ra $2000 < A < 2000 + \dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{2000} \dfrac{1}{3^n} < 2001$
Vậy $[A] = 2000$

<u>**Bài tập đề nghị:**</u>
Khảo sát các dãy $(u_n)_{n \geq 0}$

Bài tập 17.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

Bài tập 18.

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{-u_n + 2} \end{cases}$$

[3]Đề thi Olympic 30/4/2000

Bài tập 19.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2} \end{cases}$$

Hướng dẫn. Dãy thực $(u_n)_n \geq 0$ xác định bởi $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d} \end{cases}$

Nếu $(u_n)_n \geq 0$ có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ thì $cl^2 + (d-a)l - b = 0$ kí hiêu $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$

Bài 17 ứng với $\Delta = 0$ đặt $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$

Bài 18 ứng với $\Delta < 0$

Bài 19 ứng với $\Delta > 0$

* ***Quy về hàm lượng giác***

Nhiều dãy số có công thức truy hồi phức tạp trở thành đơn giản nhờ phép thế lượng giác. Khi trong bài toán xuất hiện những yếu tố gợi cho ta nhớ đến những công thức lượng giác thì ta có thể thử với phương pháp thế lượng giác.

Ví dụ 15. *Cho dãy số $\{(u_n)\}$ sau:*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = 2u_{n-1}^2 - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Xác định công thức tổng quát của dãy.

Lời giải. Từ công thức truy hồi của dãy, ta liên tưởng đến công thức nhân của hàm số côsin

Ta có:

$$\begin{aligned} &u_1 = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \\ &u_2 = 2\cos^2\frac{\pi}{3} - 1 = \cos\frac{2\pi}{3} \\ &u_3 = 2\cos^2\frac{2\pi}{3} - 1 = \cos\frac{4\pi}{3} \\ &u_4 = \cos\frac{8\pi}{3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_n = \cos\frac{2^(n-1)\pi}{3} \end{aligned}$$

Thật vậy:

\+ Với $n = 2$, ta có $u_2 = \cos\dfrac{2^(2-1)\pi}{3} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ (đúng)

\+ Giả sử đúng với $n-1$, tức là $u_(n-1) = \cos\dfrac{2^(n-2)\pi}{3}$

Ta chứng minh đúng với n. Ta có $u_n = 2u_(n-1)^2 - 1 = 2\cos^2\dfrac{2^(n-1)\pi}{3} - 1$

$= \cos \dfrac{2^(n-1)\pi}{3}$

Vậy $u_n = \cos \dfrac{2^(n-1)\pi}{3}, \forall n \geq 2$

Bài tập đề nghị:

Bài tập 20. *Xác định công thức tổng quát của dãy số u_n sau:*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_n = 2 - u_{n-1}^2, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Đáp số: $u_n = -2cos2^{n-1}\alpha$

Bài tập 21. *Xác định công thức tổng quát của dãy số u_n sau:*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ u_n = 4u_{n-1}^3 - 3u_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Đáp số: $u_n = \cos \dfrac{3^{n-1}\pi}{6}$

4.2 Ứng dụng trong giải toán

* **Dùng để tính tích phân**

Ví dụ 16. *Tính tích phân*

a. $I_k(x) = \int_0^\pi \dfrac{\cos kt - \cos kx}{\cos t - \cos x} dt$

b. $u_n = \int_0^\pi cos^n x.cosnxdx;\ n \in \mathbb{N}$

Lời giải. a. Ta có:

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \int_0^\pi \frac{cos(0.t) - cos(0.x)}{cost - cosx} dt \\ &= 0 \\ I_1(x) &= \int_0^\pi \frac{cost - cosx}{cost - cosx} dt \\ &= \int_0 \pi dt \\ &= \pi \\ I_{k+2}(x) &= \int_0^\pi \frac{\cos{(k+2)t} - \cos{(k+2)x}}{\cos t - \cos x} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tích phân từng phần ta được:

$$I_{k+2}(x) - 2\cos x.I_{k+1}(x) + I_k(x) = 0$$

Phương trình đặc trưng: $t^2 - 2\cos x.t + 1 = 0$ có nghiệm là: $t = \cos x \pm i \sin x$.
Vậy $I_k(x) = \dfrac{\pi}{\sin x}\sin kx,\ \forall n \geq 0$

b. Tích phân từng phần ta có:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos^n x d(sinnx) \\
&= \frac{1}{n}\cos^{n-1} x.\sin nx \mid_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx.n.\cos^{n-1} x.(-\sin nx)dx \\
&= \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x.\sin nx.\sin x dx \\
&= \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x.\frac{1}{2}\left(\cos{(n-1)x} - \cos{(n+1)x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x.\cos{(n+1)x}dx \\
&= \frac{1}{2}u_{n_1} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x\left(\cos nx.\cos x - \sin nx \sin x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_n \\
&= \frac{1}{2}u_{n-1}
\end{aligned}$$

Suy ra: $u_0 = \pi; u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1}\forall n \geq 1$ hay $u_n = \dfrac{1}{2^n}\pi,\ \forall n \geq 1$

Bài tập đề nghị

Bài tập 22. *Khảo sát dãy số $(u_n)_{n\geq 0}$ xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + \int_0^1 \mid t - u_n \mid dt \end{cases}$$

Hướng dẫn. Đặt

$$\begin{aligned} F:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & a \longmapsto \int_0^1 \mid t - a \mid dt. \end{aligned}$$

Ta chứng minh $F(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - a & \text{nếu } a \in (-\infty, 0] \\ a^2 - a + \dfrac{1}{2} & \text{nếu } a \in [0, 1] \\ a - \dfrac{1}{2} & \text{nếu } a \in [1, +\infty) \end{cases} \Longrightarrow F(a) \geq \dfrac{1}{4}$

Vậy $u_{n+1} \geq u_n + \dfrac{1}{4}$ rồi cộng lại $u_n \geq u_0 + \dfrac{n}{4}$.

* **Giải một số bài toán hình học**

Ví dụ 17. *Trong mặt phẳng cho n đường thẳng phân biêt, trong đó không có 3 đường thẳng nào đồng quy và đôi một cắt nhau. Hỏi n đường thẳng chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?*

Lời giải. Gọi a_n là số miền do n đường thẳng tạo thành. Ta có $a_1 = 2$.
Ta xét đường thẳng thứ $n+1(d_{n+1})$. Khi đó d_{n+1} cắt n đường thẳng đã cho tại n điểm và bị n đường thẳng chia thành $n+1$ phần, đồng thời mỗi phần thuộc 1 miền của a_n. Mặt khác với mỗi đoạn nằm trong miền a_n sẽ chia miền đó thành 2 miền nên số miền có thêm là $n+1$
Suy ra $a_{n+1} = a_n + n + 1$

Ta có $a_1 = 2$ nên truy hồi ta sẽ được $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Chú ý

+Với giả thiết như ví dụ trên nếu yêu cầu tính số đa giác tạo thành ta có thể tìm được:

$$a_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

+Ta cũng có thể tổng quát bài toán trên đối với không gian như sau: Trong không gian cho n mặt phẳng trong đó 3 mặt phẳng nào cũng cắt nhau và không có 4 mặt phẳng nào cùng đi qua 1 điểm. Hỏi n mặt phẳng chia không gian thành bao nhiêu miền?
Đáp số: $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$

* **Tính tổng**

Ví dụ 18. *Tính tổng sau:*

$$S(n) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

Lời giải. Đặt $x_n = S(n)$ ta có $x_n - x_{n-1} = \sin nx - \sin{(n-1)x}$
và $x_1 = \sin x, x_2 = \sin 2x - \sin x$.

Nghiệm riêng $x_n^* = (acosnx + bsinnx)$, thay vào phương trình ta có

$$\begin{aligned}
& a\cos nx + b\sin nx - a\cos(n-1)x - b\sin(n-1)x \\
= \;& \sin nxa\cos(n-1+1)x + (b-1)\sin(n-1+1)x \\
= \;& a\cos(n-1)x + b\sin(n-1)x \\
\iff \;& a[\cos(n-1)x\cos x - \sin(n-1)x\sin x] + (b-1)[\sin(n-1)x\cos x + \cos(n-1)x\sin x] \\
= \;& a\cos(n-1)x + b\sin(n-1)x \\
\iff \;& [a\cos x + (b-1)\sin x]\cos(n-1)x + [(b-1)\cos x - a\sin x]\sin(n-1)x \\
= \;& a\cos(n-1)x + b\sin(n-1)x.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$x_n^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}.\sin nx - \cos\dfrac{x}{2}.\cos nx}{\sin\dfrac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\cos(n+\dfrac{1}{2})x}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

Do đó $x_n = c - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(n+\dfrac{1}{2})x}{\sin\dfrac{x}{2}}$

Thay vào các giá trị ban đầu ta có $c - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\dfrac{3x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} = sinx \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$

Vậy $S(n) = x_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos(n+\dfrac{1}{2})x}{\sin\dfrac{x}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}.\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$

Bài tập đề nghị: Tính tổng sau:

a.$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1, n \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1$

b.$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, n \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1$

c.$S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2), \forall n \geq 1$

4.3 Ứng dụng trong tin học

Trong khoa học tính toán ngày nay, phép truy hồi là thuật toán cơ bản để lập trình. Ưu điểm của phương pháp truy hồi là ở chỗ nó dùng một công thức nhất định để diễn tả những phép tính lặp đi lặp lại bất chấp số lần lặp lại là bao nhiêu. Nếu số lần lặp lại lên đến con số hàng triệu hàng tỷ thì con người không đủ sức và thời gian để làm, nhưng máy tính thì có thể giải quyết trong chớp mắt. Dưới đây là một số bài toán thể hiện rõ điều trên:

Bài toán tháp Hà Nội - Tower of Ha Noi: Có thể còn ít người Việt Nam biết Tháp Hà Nội, nhưng rất nhiều thanh niên sinh viên trên toàn thế giới lại biết đến nó. Đó là vì, Tháp Hà Nội là tên một bài toán rất nổi tiếng trong Chương trình khoa học tính toán dành cho sinh viên những năm đầu tại các trường đại học ở nhiều nơi trên thế giới.

Tương truyền rằng ngày xửa ngày xưa, lâu lắm rồi, ở một vùng xa xôi viễn đông, thành phố Hà Nội của Việt Nam, vị quân sư của Hoàng đế vừa qua đời, Hoàng đế cần một vị quân sư mới thay thế. Bản thân Hoàng đế cũng là một nhà thông thái, nên ngài đặt ra một bài toán đố, tuyên bố ai giải được sẽ được phong làm quân sư. Bài toán của Hoàng đế là: cho n cái đĩa (ngài không nói chính xác là bao nhiêu) và ba cái trục: A là trục nguồn, B là trục đích, và C là trục trung chuyển. Những cái đĩa có kích cỡ khác nhau và có lỗ ở giữa để có thể lồng vào trục, theo quy định "nhỏ trên lớn dưới". Đầu tiên, những cái đĩa này được xếp tại trục A. Vậy làm thế nào để chuyển toàn bộ các đĩa sang trục B, với điều kiện chuyển từng cái một và luôn phải đảm bảo quy định "nhỏ trên lớn dưới", biết rằng trục C được phép sử dụng làm trục trung chuyển?
Vì địa vị quân sư được coi là vinh hiển nên có rất nhiều người dự thi. Từ vị học giả đến bác nông phu, họ đua nhau trình lên Hoàng đế lời giải của mình. Nhiều lời giải dài tới hàng nghìn bước và nhiều lời giải có chữ "chuyển sang bước tiếp theo". Nhưng hoàng đế thấy mệt mỏi vì những lời giải đó, nên cuối cùng hạ chiếu: "Ta không hiểu những lời giải này. Phải có một cách giải nào khác dễ hiểu và nhanh chóng hơn". May mắn thay, cuối cùng đã có một cách giải như thế.
Thật vậy, ngay sau khi chiếu vua ban ra, một vị cao tăng trông bề ngoài giống như một kỳ nhân hạ sơn tới xin yết kiến hoàng đế. Vị cao tăng nói: "Thưa Bệ hạ, bài toán đố đó dễ quá, hầu như nó tự giải cho nó". Quan trùm cấm vệ đứng hầu ngay bên cạnh vua quắc mắt nhìn gã kỳ nhân, muốn quẳng gã ra ngoài, nhưng Hoàng đế vẫn kiên nhẫn tiếp tục lắng nghe. "Nếu chỉ có 1 đĩa, thì...; nếu có nhiều hơn 1 đĩa ($n > 1$), thì...", cứ thế vị cao tăng bình tĩnh giảng giải. Im lặng được một lát, cuối cùng Hoàng đế sốt ruột gắt: "Được, thế cao tăng có nói rõ cho ta lời giải hay không cơ chứ?". Thay vì giải thích tiếp, gã kỳ nhân mỉm cười thâm thúy rồi biến mất, bởi vì hoàng đế tuy giỏi giang nhưng rõ ràng là chưa hiểu ý nghĩa của phép truy hồi .
Nhưng các bạn sinh viên ngày nay thì có thể thấy cách giải của vị cao tăng là hoàn toàn đúng.

Toàn bộ đoạn chữ nghiêng ở trên được trích nguyên văn từ cuốn sách giáo khoa dành cho sinh viên ngành thuật toán và lập trình - "Giải toán nâng cao và cấu trúc dữ liệu" (intermediate problem solving and data structures) do Paul Henman và Robert Veroff, hai giáo sư Đại học New Mexico, cùng biên soạn với Frank Carrano, giáo sư Đại học Rhode Island (Mỹ).

Lời giải. Với n lẻ: cách xếp các khối như sau. Đầu tiên là xếp được 1 khối nhỏ nhất (bài toán với ($n = 1$). Sau đó xếp 2 khối nhỏ nhất (bài toán với $n = 2$)...

- 1 khối nhỏ nhất qua C (cột đích)
- 2 khối nhỏ nhất qua B (cột trung gian)
- 3 khối nhỏ nhất qua C (cột đích)
- 4 khối nhỏ nhất qua B (cột trung gian)
- Tiếp tục như trên

Với n chẵn: cách xếp các khối như sau. Đầu tiên là xếp được 1 khối nhỏ nhất (bài toán với $n = 1$). Sau đó xếp 2 khối nhỏ nhất (bài toán với $n = 2$)...

- 1 khối nhỏ nhất qua B (cột trung gian)
- 2 khối nhỏ nhất qua C (cột đích)
- 3 khối nhỏ nhất qua B (cột trung gian)
- 4 khối nhỏ nhất qua C (cột đích)
- Tiếp tục như trên

Phát triển của cách làm trên: Muốn chuyển n khối tròn từ cột nguồn sang cột đích thì làm như sau (ở đây ta phải hiểu rõ cột nguồn không nhất thiết là cột A, cột đích là C hay cột trung gian là B mà phải hiểu tổng quát, có thể cột nguồn là B chẳng hạn (trong phép chuyển $(n-1)$ cột từ cột B sang cột C như trong cách làm ở phần nghịch)):
Với n lẻ: Đầu tiên là xếp được 1 khối nhỏ nhất (bài toán với $n = 1$). Sau đó xếp 2 khối nhỏ nhất (bài toán với $n = 2$)...

- 1 khối nhỏ nhất qua cột đích
- 2 khối nhỏ nhất qua cột trung gian
- 3 khối nhỏ nhất qua cột đích
- 4 khối nhỏ nhất qua cột trung gian
- Tiếp tục như trên

Với n chẵn: Đầu tiên là xếp được 1 khối nhỏ nhất (bài toán với n=1). Sau đó xếp 2 khối nhỏ nhất (bài toán với n=2) ...

- 1 khối nhỏ nhất qua cột trung gian
- 2 khối nhỏ nhất qua cột đích
- 3 khối nhỏ nhất qua cột trung gian
- 4 khối nhỏ nhất qua cột đích
- Tiếp tục như trên

- Như vậy thì số lần chuyển cho bài toán là bao nhiêu? Với bài toán tháp Hà Nội chuyển n khối tròn từ cột nguồn A sang cột đích C thông qua cột trung gian B thì cần có $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$ lần chuyển.

Bài toán Hamilton

Nâng câu hỏi của Tháp Hà Nội lên một mức cao hơn, sao cho số lần chuyển đĩa là nhỏ nhất. Các nhà toán học đã phát hiện ra rằng Tháp Hà Nội có cùng bản chất với bài toán tìm Đường Hamilton (Hamilton Path) trên một hình giả phương cấp n (n-Hypercube), một bài toán cũng rất nổi tiếng. Nội dung bài toán như sau:
Một người khách du lịch muốn đi thăm n thành phố được đánh số từ 1 đến n. Mạng lưới giao thông giữa n thành phố này là 2 chiều và được cho bởi ma trận $A[i, j]$ trong đó $A[i, j] = 1$ nếu có đường đi giữa thành phố i và thành phố j, $A[i, j] = 0$ trong trường hợp ngược lại. Thiết lập đường đi cho người khách thông báo tồn tại đường đi hoặc không tồn tại đường đi.

5 Kết luận

Dù có rất nhiều cố gắng song những vẫn đề về dãy số là vô cùng rộng lớn. Qua chuyên đề nhỏ này nhóm sinh viên muốn giới thiệu tới các bạn một vài loại dãy truy hồi và lý giải phần nào sự " hiện diện" của chúng trong chương trình phổ thông cũng như những cuộc thi quan trọng khác.

Rất mong sự phản hồi và đóng góp ý kiến của các bạn.

Tài liệu

[1] Dương Quốc Việt, Đàm Văn Nhỉ, *Giáo trình Đại số sơ cấp*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2007.

[2] Jean-Marie Monier, *Giáo trình toán giải tích tập 1*, Nhà xuất bản giáo dục.

[3] Trần Duy Sơn , *Dãy số*

[4] Tạp chí toán học và tuổi trẻ