MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN DÃY TỔNG

Huỳnh Chí Hào
Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

A. Một số kiến thức có liên quan.

Định nghĩa 1

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$

Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn** nếu tồn tại một số M và một số m sao cho $m \le u_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Định lý 1

1) Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
2) Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Định lí 2

1) Mọi dãy tăng và không bị chặn trên thì tiến tới $+\infty$.
2) Mọi dãy giảm và không bị chặn dưới thì tiến tới $-\infty$.

Định lý 3

1) Nếu một dãy (u_n) hội tụ đến a thì mọi dãy con trích từ (u_n) cũng hội tụ đến a.

2) (u_n) hội tụ đến a $\Leftrightarrow$ (u_{2n}) và (u_{2n+1}) hội tụ đến a

Định lý 4

1) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ và $u_n \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \infty$

2) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ và $u_n \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

B. Các bài toán.

Bài toán 1.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 2$, $\forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 > 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1) \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{u_n(u_n-1)} = \frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} \qquad (n = 1,2,...) \qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}-1}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

  1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.
  Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \geq 2$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \to +\infty$ ta có:

$$a = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ (vô lý)}$$

  2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right) = 1$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}\right) = 1$ ⊗ .

Bài toán 2.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2011} + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2}+\dfrac{u_2}{u_3}+...+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \ge 1,\ \forall n \ge 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2011}>0,\ \text{vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2011}+u_n \Rightarrow u_n^2=2011(u_{n+1}-u_n)$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}=2001\frac{(u_{n+1}-u_n)}{u_n.u_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}=2011\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right) \qquad (n=1,2,...) \qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}}=2011\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=2011\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right) \qquad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

  1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

  Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a\ge 1$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có:

$$a=\frac{a^2}{2011}+a \Leftrightarrow a=0 \ \text{(vô lý)}$$

  2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}}=0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2}+\dfrac{u_2}{u_3}+...+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2011\left(1-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)=2011$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2}+\dfrac{u_2}{u_3}+...+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)=2011 \otimes$.

Bài toán 3.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2010u_n}{2011}, \forall n \geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2-1}+\dfrac{u_2}{u_3-1}+\ldots+\dfrac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)$

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 2$, $\forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{2011} > 0,\ \text{vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2010u_n}{2011} \Rightarrow u_n^2 + 2010u_n = 2011u_{n+1}$$
$$\Rightarrow u_n(u_n-1) = 2011(u_{n+1}-u_n)$$
$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}-1} = 2011\frac{(u_{n+1}-1)-(u_n-1)}{(u_{n+1}-1)(u_n-1)}$$
$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}-1} = 2011\left(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right) \quad (n=1,2,\ldots) \qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2-1}+\frac{u_2}{u_3-1}+\ldots+\frac{u_n}{u_{n+1}-1} = 2011\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right) \qquad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

  1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

  Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \geq 2$ .Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \to +\infty$ ta có:

$$a = \frac{a(a-1)}{2011} + a \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ (vô lý)}$$

  2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2-1}+\dfrac{u_2}{u_3-1}+\ldots+\dfrac{u_n}{u_{n+1}-1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2011\left(1-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}\right) = 2011$.
- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2-1}+\dfrac{u_2}{u_3-1}+\ldots+\dfrac{u_n}{u_{n+1}-1}\right) = 2011$. ⊗

Bài toán 4.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4u_{n-1}} + u_{n-1}}{2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1^2}+\dfrac{1}{u_2^2}+...+\dfrac{1}{u_n^2}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0$, $\forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + u_{n-1}}{2} - u_{n-1} = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - u_{n-1}}{2} = \frac{2u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + u_{n-1}} > 0$$

  Suy ra: (u_n) tăng.
- Tính tổng:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{2u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + u_{n-1}} \Rightarrow u_n^2 = (u_n + 1)u_{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n} \qquad (n = 1, 2, ...) \qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + ... + \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} = 6 - \frac{1}{u_n} \qquad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

  1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a > 0$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \to +\infty$ ta có:

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

  2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1^2}+\dfrac{1}{u_2^2}+...+\dfrac{1}{u_n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(6 - \dfrac{1}{u_n}\right) = 6$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1^2}+\frac{1}{u_2^2}+...+\frac{1}{u_n^2}\right)=6$ ⊗ .

Bài toán 5.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2010 \\ u_n^2 + 2009u_n - 2011u_{n+1} + 1 = 0, \forall n \ge 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+2010}+\frac{1}{u_2+2010}+...+\frac{1}{u_n+2010}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \ge 2010$, $\forall n \ge 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)^2}{2010}>0 \Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_n^2+2009u_n-2011u_{n+1}+1=0 \Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{u_n^2+2009u_n+1}{2011}$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1}-1=\frac{u_n^2+2009u_n+1}{2011}-1$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1}-1=\frac{(u_n-1)(u_n+2010)}{2011}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n+2010}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1} \quad (n=1,2,...) \quad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1+2010}+\frac{1}{u_2+2010}+...+\frac{1}{u_n+2010}=\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{2009}-\frac{1}{u_{n+1}-1}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

  1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.
  Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a\ge 2010$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có:

$$a^2+2009a-2011a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ (vô lý)}$$

  2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-1)=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1}=0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+2010}+\frac{1}{u_2+2010}+...+\frac{1}{u_n+2010}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)=\frac{1}{2009}$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1+2010}+\dfrac{1}{u_2+2010}+\ldots+\dfrac{1}{u_n+2010}\right)=\dfrac{1}{2009}$ ⊗ .

Bài toán 6.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2009} \\ u_{n+1}=2009u_n^2+u_n, \forall n\geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2}+\dfrac{u_2}{u_3}+\ldots+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n>0$, $\forall n\geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}-u_n=2009u_n^2>0\Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$2009u_n^2=u_{n+1}-u_n\Rightarrow\frac{2009u_n^2}{u_nu_{n+1}}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_nu_{n+1}}\Rightarrow\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{2009}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)\qquad (n=1,2,...)\qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\ldots+\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{2009}\left[\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)+\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2009}\left(2009-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a>0$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có:

$$a=2009a^2+a\Leftrightarrow a=0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}}=0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2}+\dfrac{u_2}{u_3}+\ldots+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2009}\left(2009-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)\right]=1$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=1$ ⊗ .

Bài toán 7.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=u_n^2+u_n, \forall n\geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_2+1}+...+\frac{1}{u_{n+1}+1}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n>1,\ \forall n\geq 3$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}-u_n=u_n^2>0\Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng:

$$u_{n+1}=u_n^2+u_n\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n(u_n+1)}=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}} \qquad (n=1,2,...) \qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_2+1}+...+\frac{1}{u_{n+1}+1}=2-\frac{1}{u_{n+1}}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

  1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a>0$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có:

$$a=a^2+a\Leftrightarrow a=0 \text{ (vô lý)}$$

  2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=+\infty\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}}=0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_2+1}+...+\frac{1}{u_{n+1}+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=2$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_2+1}+...+\frac{1}{u_{n+1}+1}\right)=2$ ⊗ .

Bài toán 8.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1u_2...u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}\right)$

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 1$, $\forall n \geq 1$
- Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} = 1 + u_1u_2...u_n \Rightarrow u_{n+1} - 1 = u_n\left(1 + u_1u_2...u_{n-1} - 1\right)$$
$$\Rightarrow u_{n+1} - 1 = u_n\left(u_n - 1\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{u_n\left(u_n-1\right)} = \frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_n}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Suy ra: $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + \left(\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1}-1}$

- Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{u_{n+1}-1}\right) = 2 - \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1}$
- Vì $u_{n+1} - 1 = u_1u_2...u_n > u_1\left(1+u_1\right)^{n-1} = 2^{n-1}$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n-1}-1\right) = +\infty$
- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}\right) = 2 - \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1} = 2$ ⊗ .

Bài toán 9.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\left(u_n+1\right)\left(u_n+2\right)\left(u_n+3\right)+1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+2}+\frac{1}{u_2+2}+...+\frac{1}{u_n+2}\right)$

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0$, $\forall n \geq 1$

- Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}=\sqrt{\left(u_n^2+3u_n+1\right)^2}=u_n^2+3u_n+1\Rightarrow u_{n+1}+1=\left(u_n+1\right)\left(u_n+2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{\left(u_n+1\right)\left(u_n+2\right)}=\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{u_{n+1}+1} \qquad (n=1,2,...)$$

Suy ra: $\frac{1}{u_1+2}+\frac{1}{u_2+2}+...+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{u_1+1}-\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{u_{n+1}+1}$

- Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+2}+\frac{1}{u_2+2}+...+\frac{1}{u_n+2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u_{n+1}+1}\right)=\frac{1}{2}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}+1}$
- Vì $u_{n+1}=u^2+3u_n+1\Rightarrow u_{n+1}>3u_n>3^{n-1}\Rightarrow u_{n+1}+1>3^{n-1}+1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}+1\right)=+\infty$
- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1+2}+\frac{1}{u_2+2}+...+\frac{1}{u_n+2}\right)=\frac{1}{2}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{2}$ ⊗ .

Bài toán 10.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2007u_n+2}{2010}, \forall n\geq 1\end{cases}$

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1-1}{u_2-2}+\frac{u_2-1}{u_3-2}+...+\frac{u_n-1}{u_{n+1}-2}\right)$

Lời giải

- Biến đổi $u_{n+1}=\frac{u_n^2+2007u_n+2}{2010} \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{2010}$ (1)

  Vì $u_1=3$ nên $3=u_1<u_2<u_3<\ldots<u_n$, suy ra dãy $\{u_n\}$ tăng.
- Giả sử dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists L\in\mathbb{R}$: $\lim u_n=L$ ($L>3$)

  Suy ra $\lim u_{n+1}=\lim\frac{u_n^2+2007u_n+2}{2010}$ hay $L=\frac{L^2+2007L+2}{2010}$

  $\Leftrightarrow L^2-3L+2=0\Leftrightarrow L=1$ hoặc $L=2$ (vô lý vì $L>3$)

  Do đó $\{u_n\}$ không bị chặn trên hay $\lim u_n=+\infty$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}=0$
- Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (u_n-1)(u_n-2)=2010(u_{n+1}-u_n)$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n-1}{u_{n+1}-2}=2010\left(\frac{1}{u_n-2}-\frac{1}{u_{n+1}-2}\right) (*)$$

- Cho n lần lượt nhận các giá trị 1, 2, 3, ….n, sau đó cộng vế theo vế ta được:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i-1}{u_{i+1}-2}=2010\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-2}\right)$$

- Vậy $\lim S_n=2010$ ⊗ .

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **Phan Huy Khải**. *Các bài toán về dãy số*. NXBGD 2007.

[2] **Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Thủy Thanh**. *Giới hạn dãy số & hàm số*. NXBGD 2002.

[3] **Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Văn Tiến**.
Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT. NXBGD 2009.

[4] **Phạm Văn Nhâm**. *Một số lớp bài toán về dãy số* . Luận văn thạc sĩ khoa học 2011.

[5] *Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30/4 lần thứ XV – 2009*.

[6] *Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30/4 lần thứ XVI – 2010*.