



MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN DÃY TRUY HỒI

Huỳnh Chí Hòa

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

A. Một số kiến thức có liên quan.

Định nghĩa 1

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$

Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn** nếu tồn tại một số M và một số m sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Định lý 1: (Tiêu chuẩn Weierstrass)

- 1) Một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.
- 2) Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
- 3) Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Định lý 2: (Nguyên lý kẹp)

Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ sao cho:
$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$$

Định lý 3: Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |a|$

Định lý 4: Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Định lý 5: Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức truy hồi $u_{n+1} = f(u_n)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục. Khi đó, nếu $(u_n) \rightarrow a$ thì a là nghiệm của phương trình $f(x) = x$.

Định lý 6: Cho dãy số (u_n) với $u_1 = a$ là một số thực cho trước và $u_{n+1} = f(u_n)$. Khi đó

- 1) Nếu $f(x)$ là hàm số đồng biến và $x_1 \leq x_2$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- 2) Nếu $f(x)$ là hàm số đồng biến và $x_1 \geq x_2$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Định lý 7: Cho dãy số (u_n) với $u_1 = a$ là một số thực cho trước và $u_{n+1} = f(u_n)$. Khi đó

- 1) Nếu $f(x)$ là hàm số nghịch biến và $x_1 \leq x_2$ thì (u_{2n}) là dãy số tăng và (u_{2n+1}) là dãy số giảm.
- 2) Nếu $f(x)$ là hàm số nghịch biến và $x_1 \geq x_2$ thì (u_{2n}) là dãy số giảm và (u_{2n+1}) là dãy số tăng.

Định lý 8: (LAGRANGE)

Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

- **Hệ quả:** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên miền xác định D , thỏa mãn điều kiện $|f'(x)| \leq c < 1$ với c là hằng số và phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất β thuộc D , khi đó dãy số (u_n) ($n = 1, 2, \dots$) xác định bởi $x_0 \in D$ và $u_{n+1} = f(u_n)$ có giới hạn là β khi n dần tới vô tận.

B. Các bài toán.

Bài toán 1 (Giáo trình giải tích 1 của Jean-Maria Monier)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}^2 + 1}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Đây là dãy truy hồi dạng $u_n = f(u_{n-1})$
- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$, vậy (u_n) bị chặn dưới.
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} - u_n = -\frac{u_n^3}{u_n^2 + 1} < 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ giảm.}$$

- Do (u_n) giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a = \frac{a}{a^2 + 1} \Leftrightarrow a = 0$
- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ $\otimes$

Bài toán 2 (Giáo trình giải tích 1 của Jean-Maria Monier)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2011}{u_{n-1}} \right), \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0, \forall n \geq 1$
- Mặt khác ta lại có: $u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2011}{u_{n-1}} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u_{n-1} \cdot \frac{2011}{u_{n-1}}} = \sqrt{2011}$, vậy (u_n) bị chặn dưới.
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2011}{u_n} \right) - u_n = \frac{2011 - u_n^2}{2u_n} \leq 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ giảm.}$$

- Do (u_n) giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq \sqrt{2011}$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2011}{a} \right) \Leftrightarrow a = \sqrt{2011}$

- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2011}$ $\otimes$

Bài toán 3 (Bài tập giải tích W.J.KACZKOR-M.T.NOWAK)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_n = \sqrt{3u_{n-1} - 2}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp ta chứng minh được rằng: $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n - 2} - u_n \geq 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$
- Do (u_n) tăng và bị chặn nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $\frac{3}{2} \leq a \leq 2$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a = \sqrt{3a - 2} \Leftrightarrow a = 2$
- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ $\otimes$

Bài toán 4 (Bài tập giải tích W.J.KACZKOR-M.T.NOWAK)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \sqrt{6 + u_{n-1}}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp ta chứng minh được rằng: $0 \leq u_n < 3, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}^2 - u_n^2 = -u_n^2 + u_n + 6 > 0 \text{ (do } 0 \leq u_n < 3) \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$
- Do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $0 \leq a \leq 3$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a = \sqrt{6 + a} \Leftrightarrow a = 3$
- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ $\otimes$

Bài toán 5 (Bài tập giải tích W.J.KACZKOR-M.T.NOWAK)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{2(2u_{n-1} + 1)}{u_{n-1} + 3}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp ta chứng minh được rằng: $0 < u_n < 2, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)(u_n - 2)}{u_n + 3} > 0 \text{ (do } 0 < u_n < 2) \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0,$$

vậy (u_n) tăng.

- Do (u_n) tăng và bị trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $0 < a \leq 2$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a = \frac{2(2a + 1)}{a + 3} \Leftrightarrow a = 2$
- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \otimes$

Bài toán 6 (Bài tập giải tích W.J.KACZKOR-M.T.NOWAK)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_n(1 - u_{n+1}) > \frac{1}{4}, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Từ cách cho dãy số ta suy ra: $0 < u_n < 1, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n + (1 - u_{n+1})}{2} \geq \sqrt{u_n(1 - u_{n+1})} > \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ giảm.}$$

- Do (u_n) giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $0 < a < 1$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a(1 - a) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (2a - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2} \otimes$

Bài toán 7 (Bài tập giải tích W.J.KACZKOR-M.T.NOWAK)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Ta chứng minh $u_n < u_{n+1}, \forall n = 1, 2, \dots$ (2) bằng phương pháp quy nạp
 - + Với $n = 1$ thì (2) đúng
 - + Giả sử (2) đúng khi $n \leq k$. Ta chứng minh (2) cũng đúng khi $n = k + 1$. Tức là chứng minh: $u_{k+1} \leq u_{k+2}$
 Thật vậy: Theo công thức truy hồi xác định dãy thì

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} < \sqrt{u_{k+1}} + \sqrt{u_k} = u_{k+2}$$
- + Vậy (2) cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (2) đúng với mọi $\forall n = 1, 2, \dots$
- Như thế (u_n) tăng.
- Mặt khác khi $n \geq 3$, ta có: $u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_{n-2}} < 2\sqrt{u_n} \Rightarrow u_n^2 < 4u_n \Rightarrow u_n < 4$
- Do (u_n) tăng và bị trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $0 < a \leq 4$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a = 2\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 4$
- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ $\otimes$

Bài toán tương tự

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_2 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Hướng dẫn

Chứng minh dãy trên giảm và bị chặn dưới bởi 4. Kết quả $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Bài toán 8 (Các bài toán về dãy số - Phan Huy Khải)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{-1}{3 + u_{n-1}}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

- Bằng quy nạp chứng minh được $u_n > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ với mọi $n=1,2,\dots$ (Bạn đọc tự kiểm tra)
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3+u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 + 3u_n + 1}{3+u_n} < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0,$$

vậy (u_n) giảm.

- Do (u_n) giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có: $a = -\frac{1}{3+a} \Leftrightarrow a^2 + 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$
- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ $\otimes$

Bài toán 9 (HSG Đồng Tháp năm 2009)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n^2 - \frac{1}{2}u_n^3 \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số.

Lời giải

- Xét hàm số $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$ với $x \in [0;1]$, ta có

$$f'(x) = 3x - \frac{3}{2}x^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0;1]$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $[0;1]$ và $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0;1]$

- Chứng minh: $u_n \in [0;1], \forall n \geq 1$.

Thật vậy: $u_1 = \frac{1}{2} \in [0;1]$.

Giả sử $u_k \in [0;1], \forall k > 1$ thì

$$\begin{cases} u_{k+1} = \frac{3}{2}u_k^2 - \frac{1}{2}u_k^3 \Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1 \Rightarrow u_{k+1} \in [0;1] \\ 0 \leq u_k \leq 1 \end{cases}$$

Vậy $u_n \in [0;1], \forall n \geq 1$.

Do f tăng nên $f(u_n) - f(u_{n-1})$ cùng dấu với $u_n - u_{n-1}$

Suy ra: $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_n - u_{n-1}$. Lập luận tiếp tục ta đi đến $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_2 - u_1$

- Vì $u_2 - u_1 = \frac{5}{16} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{16} < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n \quad \forall n \geq 1$

Suy ra (u_n) là dãy giảm

- Lại do $u_1 = \frac{1}{2}$ nên suy ra được $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$
- Do (u_n) giảm và bị chặn nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^3 = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Do $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ nên $a = 0$. Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ $\otimes$

Bài toán 10 (Giải tích những bài tập nâng cao – Tô Văn Ban)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{u_n}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số.

Lời giải

- Bằng quy nạp chứng minh được $0 \leq u_n \leq 2$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ (Bạn đọc tự kiểm tra)
- Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$ với $x \in [0; 2]$, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{2 + \sqrt{x}}} > 0 \quad \forall x \in (0; 2] \Rightarrow f(x) \text{ tăng trên } [0; 2]$$

- Vì $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = u_1$, suy ra (u_n) là dãy tăng
- Do (u_n) tăng và bị chặn nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $0 \leq a \leq 2$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{a}} \quad (2)$$

Chứng minh phương trình (2) có nghiệm duy nhất $a \in [0; 2]$ (Bạn đọc tự chứng minh)

- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ $\otimes$

Bài toán 11 (Giải tích những bài tập nâng cao – Tô Văn Ban)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 2^{\frac{u_n}{2}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số.

Lời giải

- Bằng quy nạp chứng minh được $1 \leq u_n \leq 2$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ (Bạn đọc tự kiểm tra)

- Xét hàm số $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ với $x \in [1; 2]$, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{x}{2}} \cdot \ln 2 > 0 \quad \forall x \in [1; 2] \Rightarrow f(x) \text{ tăng trên } [1; 2]$$

- Vì $u_2 = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} > \sqrt{2} = u_1$, suy ra (u_n) là dãy tăng
- Do (u_n) tăng và bị chặn nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $1 \leq a \leq 2$
- Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$2^{\frac{a}{2}} = a \Leftrightarrow a = 2$$

- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ $\otimes$

Bài toán 12 (Các bài toán về dãy số - Phan Huy Khải)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 1, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Lời giải

- Ta thấy với mọi $n \geq 2$ thì $-1 < u_n < 0$. Giả sử rằng (u_n) có giới hạn là a thì $-1 \leq a \leq 0$ và a là nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$. Do $-1 \leq a \leq 0$ nên chọn $a = 1 - \sqrt{3}$

- Xét hiệu sau đây:

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - (1 - \sqrt{3})| &= \left| \left(\frac{u_n^2}{2} - 1 \right) - (1 - \sqrt{3}) \right| = \frac{1}{2} |u_n + (1 - \sqrt{3})| |u_n - (1 - \sqrt{3})| \\ &= \frac{1}{2} (|u_n| + \sqrt{3} - 1) |u_n - (1 - \sqrt{3})| \\ &< \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - (1 - \sqrt{3})| < \dots < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} |u_2 - (1 - \sqrt{3})| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

- Như thế ta có: $0 < |u_{n+1} - (1 - \sqrt{3})| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$ mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 0$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1} - (1 - \sqrt{3})| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - (1 - \sqrt{3})) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 1 - \sqrt{3}$$

- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - \sqrt{3}$ $\otimes$

Bài toán 13 (Các bài toán về dãy số - Phan Huy Khải)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{u_n^2}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Lời giải

- Bằng quy nạp chứng minh được $1 < u_n < 2$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ (Bạn đọc tự kiểm tra)
- Giả sử rằng (u_n) có giới hạn là a thì $1 \leq a \leq 2$ và a là nghiệm của phương trình

$$1 + x - \frac{x^2}{2} = x \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}. \text{ Do } 1 \leq a \leq 2 \text{ nên chọn } a = \sqrt{2}$$

- Xét hiệu sau đây:

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{2}| &= \left| 1 + u_n - \frac{u_n^2}{2} - \sqrt{2} \right| = \frac{1}{2} |(u_n - \sqrt{2})(u_n - 2 + \sqrt{2})| \\ &= \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{2}| |u_n - 2 + \sqrt{2}| \\ &= \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{2}| (u_n - 2 + \sqrt{2}) \\ &< \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \sqrt{2}| < \dots < \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} |u_1 - \sqrt{2}| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

- Như thế ta có: $0 < |u_{n+1} - \sqrt{2}| < \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right)$ mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) = 0$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1} - \sqrt{2}| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \sqrt{2}$$

- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$ $\otimes$

Bài toán 14 (Các bài toán về dãy số - Phan Huy Khải)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2011 \\ u_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 - 1}}, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Lời giải

- Bằng quy nạp chứng minh được $u_n > \sqrt{3}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ (Bạn đọc tự kiểm tra)
- Giả sử rằng (u_n) có giới hạn là a thì $a \geq \sqrt{3}$ và a là nghiệm của phương trình

$$a = \sqrt{3} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \Leftrightarrow (a - \sqrt{3})^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1} \Leftrightarrow (a^2 - \sqrt{3}a)^2 - 2(a^2 - \sqrt{3}a) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \sqrt{3}a = -1 \\ a^2 - \sqrt{3}a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$$

- Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ trên $(\sqrt{3}; +\infty)$, thì $u_{n+1} = f(u_n)$ và $f(a) = a$

Ta có:
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \forall x \in (\sqrt{3}; +\infty)$$

- Xét hiệu sau đây và kết hợp với định lý Lagrange ta suy ra:

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| = |f'(c_n)(u_n - a)| = |f'(c_n)| |u_n - a| \quad (c_n \in (u_n; a) \vee c_n \in (a; u_n))$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - a| < \dots < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_1 - a|$$

- Như thế ta có: $0 < |u_{n+1} - a| < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_1 - a|$ mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_1 - a| = 0$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1} - a| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - a) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$$

- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} \otimes$

Bài toán 15 (OLP TOÁN SINH VIÊN)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2011 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + u_n^2) - 2012, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải

- Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - 2012$ với $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và ta có

$$f'(x) = \frac{x}{1 + x^2} \Rightarrow |f'(x)| = \left| \frac{x}{1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

- Giả sử rằng (u_n) có giới hạn là a thì a là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - 2012 \quad (2)$$

- Ta chứng minh (2) có nghiệm duy nhất. Thật vậy

$$x = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - 2012 \Leftrightarrow g(x) = x + 2012 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = 0 \quad (3)$$

Ta có: $g(x)$ là hàm số liên tục và $g'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác: $g(0).g(-2012) = -2012. \frac{1}{2} \ln(1 + 2011^2) < 0$

Suy ra: phương trình (3) có nghiệm duy nhất. Gọi nghiệm đó là a

- Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| = |f'(c)| |u_n - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

- Như thế ta có: $0 < |u_{n+1} - a| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| = 0$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1} - a| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - a) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$$

- Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ $\otimes$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] **Phan Huy Khải.** Các bài toán về dãy số. NXBGD 2007.
- [2] **Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Thủy Thanh.** Giới hạn dãy số & hàm số. NXBGD 2002.
- [3] **Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Văn Tiến.**
Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT. NXBGD 2009.
- [4] **Phạm Văn Nhâm.** Một số lớp bài toán về dãy số. Luận văn thạc sĩ khoa học 2011.
- [5] Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30/4 lần thứ XV – 2009.
- [6] Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30/4 lần thứ XVI – 2010.
- [7] **Tô Văn Ban.** Giải tích những bài tập nâng cao. NXBGD 2005
- [8] **W.J.KACZKOR – M.T.NOWAW.**
Đoàn Chi (Biên dịch) – GS.TSKH Nguyễn Duy Tiến (hiệu đính).
Bài tập giải tích I – Số thực – Dãy số và chuỗi số. NXBĐHSP2003.
- [9] **Jean - Maria Monier .** Giáo trình giải tích I. NXBGD 1999.