

Chuyên mục: [Đại số và Giải tích - Olympic](#)

Tìm số hạng tổng quát của dãy số bằng hàm Hypebolic (Phần 1)

Dư Quốc Đạt

Thứ bảy, 02 Tháng 6 2012 07:28

BBT: Đây là bài viết của thầy Dư Quốc Đạt, giáo viên trường THPT Nguyễn Hữu Cầu, huyện Hóc Môn, TP.HCM gửi đến cho Diễn đàn VMF

I. Lời nói đầu:

Bài toán tìm công thức tính số hạng tổng quát của một dãy số cho dưới dạng truy hồi là một bài toán rất đa dạng và thường gặp trong những đề thi Olympic, thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế. Có nhiều hướng tiếp cận bài toán này và có nhiều cách giải khác nhau.

Trong bài viết này tôi giải quyết bài toán bằng cách sử dụng các hàm hypebolic.

Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các đồng nghiệp qua địa chỉ email: duquocdat2009@gmail.com.



II. Nội dung:

II.1. Giới thiệu các hàm Hypebolic.

Hàm sinh hypebolic định bởi: $\mathop{\rm sh}\nolimits x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ có tập xác định $\mathbb{R}$

Xử lý công thức: 26%

• Hàm cos hyperbolic định bởi: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và tập giá trị $[1, +\infty)$

• Hàm tan hyperbolic định bởi: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và tập giá trị $(-1, 1)$

• Hàm cot hyperbolic định bởi: $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và tập giá trị $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Các tính chất sau bạn đọc có thể tự chứng minh:

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

3. $\sinh(x \pm y) = \cosh x \sinh y \pm \sinh x \cosh y$

4. $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$

5. $\sinh(3x) = 4\sinh^3 x + 3\sinh x$

6. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

7. $\cosh(3x) = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$

8. $\cosh(4x) = 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1 = 8\sinh^4 x + 8\sinh^2 x + 1$

9. $\sinh(4x) = 8\sinh^3 x \cosh x + 4\sinh x \cosh x = 8\sinh^3 x \sqrt{1 + \sinh^2 x} + 4\sinh x \sqrt{1 + \sinh^2 x}$

10. $\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

$$11. \text{th}\left(\begin{array}{l} 3x \\ \end{array} \right) = \frac{{t{h^3}x + 3thx}}{{1 + 3t{h^2}x}}$$

II.2 Các dạng thường gặp.

1. Dạng 1: $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Cho} \\ \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_{n+1}} = 2u_n^2 - 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

* Trường hợp 1:

Nếu $u_1 = 1$ thì ta được $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Nếu $u_1 = -1$ thì ta được $u_n = -1, \forall n \geq 2$

* Trường hợp 2:

-

Nếu $-1 < u_1$

Chứng minh quy nạp ta được: $u_n = \cos\left(\frac{2^{n-1}\alpha}{2}\right)$.

* Trường hợp 3: Nếu $u_1 > 1$ thì ta đặt $u_1 = \cosh \alpha$. Chứng minh quy nạp ta được $u_n = \cosh\left(\frac{2^{n-1}\alpha}{2}\right)$

Lưu ý: $u_1 = \cosh \alpha \Leftrightarrow u_1 = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$. Giải phương trình ta chỉ cần chọn một nghiệm e^α .

Khi đó: $u_n = \frac{\left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\right)^{2^{n-1}} + \left(\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\right)^{2^{n-1}}}{2}$

* Trường hợp 4: Nếu $u_1 < -1$

Các dạng dãy số quy về dạng 1

1.1. Dạng: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

Đặt $u_n = 2x_n$ ta được: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}u_1 \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

1.2. Dạng: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = au_n^2 - \frac{2}{a}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$ $\left(a \neq 0 \right)$

Đặt $u_n = \frac{2}{a}x_n$ ta được: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{a}{2}u_1 \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

1.3. Dạng: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$ $\left(a \neq 0, c = \frac{b^2 - 2b - 8}{4a} \right)$

Ta đặt: $u_n = px_n + q$, thế vào giả thiết và tìm p, q để ta được: $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$

1.4. Dạng: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2a^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$ $(a \neq 0)$

Đặt $u_n = 2a^{2^{n-1}}x_n$ ta được: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2a}u_1 \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

1.5. Dạng: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = 2a^{2^n}u_n^2 - a^{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$ $(a \neq 0)$

Đặt $u_n = a^{2^{n-1}}x_n$ ta được: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a}u_1 \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \end{array} \right.$

1.6. Dạng: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } u_1 \geq -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

Ta xét các trường hợp sau:

* **Trường hợp 1:** Nếu $-2 \leq u_1 \leq 2$ thì ta đặt $u_1 = 2\cos \alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$ rồi áp dụng công thức $1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, chứng minh quy nạp ta được: $u_n = 2\cos \frac{\alpha}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

* **Trường hợp 2:** Nếu $u_1 > 2$ thì ta đặt $u_1 = 2\cosh \alpha$ rồi áp dụng công thức $1 + \cosh \alpha = 2\cosh^2 \frac{\alpha}{2}$, chứng minh quy nạp ta được: $u_n = 2\cosh \frac{\alpha}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1.7. Dạng:
$$\begin{cases} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = 2u_n \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $\sinh \alpha = u_1$, giải phương trình để tìm e^α

Chứng minh quy nạp ta được: $u_n = \sinh \left(\frac{2^{n-1} \alpha}{2} \right) = \frac{e^{\frac{\alpha}{2^{n-1}}} - e^{-\frac{\alpha}{2^{n-1}}}}{2}$

Dạng mở rộng:
$$\begin{cases} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = b \left(u_n + c \right) \sqrt{u_n^2 + c^2 + a^2} - c \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
 Với $a, b > 0$ và $ab = 2$

1.8. Dạng:
$$\begin{cases} \text{Cho } u_1 > 1 \\ u_{n+1} = a \cdot u_n + b \sqrt{u_n^2 - 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
 với $a > 0$ và $a^2 - b^2 = 1$

Đặt
$$\begin{cases} \cosh \beta = a \\ \sinh \beta = b \end{cases}$$
, giải hệ để tìm e^β và đặt
$$\begin{cases} \cosh \alpha = u_1 \\ \sinh \alpha = \sqrt{u_1^2 - 1} \end{cases}$$
, giải hệ để tìm e^α

Ta được: $u_2 = \cosh \alpha \cdot \cosh \beta + \sinh \alpha \cdot \sinh \beta = \cosh (\alpha + \beta)$

Chứng minh quy nạp ta được: $u_n = \cosh \left[\alpha + (n-1)\beta \right] = \frac{e^{\alpha + (n-1)\beta} + e^{-\alpha - (n-1)\beta}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Dạng mở rộng:
$$\begin{cases} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{a + \sqrt{cu_n^2 + b}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
 với $\alpha > 0, a > 0$ và $a^2 - b = 1$

Biến đổi: $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{a + \sqrt{cu_n^2 + b}}{u_n} = a \left(\frac{1}{u_n} \right) + \sqrt{c + b \left(\frac{1}{u_n^2} \right)}$. Đặt $x_n = \frac{1}{u_n}$ ta đưa về dạng trên

1.9. Dạng:
$$\begin{cases} \text{Cho } u_1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n^2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dạng này ta chia trường hợp như sau:

* Nếu $\{u_1\}=1$ hay $\{u_1\}=-1$ thì $\{u_n\}=1$ hay $\{u_n\}=-1$

* Nếu $-1 < \{u_1\} < 1$ thì ta đặt $\{u_1\}=\th \alpha$

Chứng minh quy nạp ta được: $\{u_n\} = \th \left(\{2^n - 1\} \alpha \right) = \frac{\left(\{e^\alpha\} \right)^{2^n - 1} - \left(\{e^{-\alpha}\} \right)^{2^n - 1}}{\left(\{e^\alpha\} \right)^{2^n - 1} + \left(\{e^{-\alpha}\} \right)^{2^n - 1}} = \frac{\left(\{e^{2\alpha}\} \right)^{2^n - 1} - 1}{\left(\{e^{2\alpha}\} \right)^{2^n - 1} + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

* Nếu $\{u_1\} > 1$ thì ta đặt $\{u_1\} = \coth \alpha = \frac{1}{\th \alpha}$

Chứng minh quy nạp ta được: $\{u_n\} = \th \left(\{2^n - 1\} \alpha \right) = \frac{\left(\{e^{2\alpha}\} \right)^{2^n - 1} - 1}{\left(\{e^{2\alpha}\} \right)^{2^n - 1} + 1}, \forall n \geq 2$

1.10. Dạng: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } \{u_1\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \{u_{n+1}\} = 4u_n^3 - 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \text{ và } \left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } \{u_1\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \{u_{n+1}\} = 4u_n^3 + 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \text{ và } \left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } \{u_1\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \{u_{n+1}\} = 4u_n^3 - 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

và $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cho } \{u_1\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \{u_{n+1}\} = 4u_n^3 + 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

Với dạng 1.10a) Ta xét các trường hợp sau:

* Trường hợp 1: Nếu $\{u_1\}=1$ hay $\{u_1\}=-1$ thì ta được $\{u_n\}=1$ hay $\{u_n\}=-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

* Trường hợp 2: Nếu $-1 < \{u_1\} < 1$

Chứng minh quy nạp ta được: $\{u_n\} = \cos \left(\{3^n - 1\} \alpha \right)$

* Trường hợp 3: Nếu $\{u_1\} > 1$ thì ta đặt $\{u_1\} = \ch \alpha$.

Chứng minh quy nạp ta được: $\{u_n\} = \ch \left(\{3^n - 1\} \alpha \right) = \frac{\left(\{e^\alpha\} \right)^{3^n - 1} + \left(\{e^{-\alpha}\} \right)^{3^n - 1}}{\left(\{e^\alpha\} \right)^{3^n - 1} - \left(\{e^{-\alpha}\} \right)^{3^n - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

* Trường hợp 4: Nếu $\{u_1\} < -1$

Chứng minh quy nạp ta được: $\{u_n\} = -\ch \left(\{3^n - 1\} \alpha \right) = -\frac{\left(\{e^\alpha\} \right)^{3^n - 1} + \left(\{e^{-\alpha}\} \right)^{3^n - 1}}{\left(\{e^\alpha\} \right)^{3^n - 1} - \left(\{e^{-\alpha}\} \right)^{3^n - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với dạng 1.10b) ta đặt $\{u_n\} = sh \alpha$. Chứng minh quy nạp ta được: $\{u_n\} = sh \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \right)^n$

Các dạng dãy số về dạng 1.10.

1.10.1. Dạng: $\{u_n\}$ $\{u_{n+1}\} = au_n^3 \pm 3u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left(a > 0 \right)$

Nhận xét: Ta tìm cách quy về dạng trên như sau: Đặt $\{u_n\} = b\{v_n\}$.

Thế vào giả thiết ta được: $b\{v_{n+1}\} = a\{b^3v_n^3\} \pm 3b\{v_n\} \Rightarrow \{v_{n+1}\} = a\{b^2v_n^3\} \pm 3\{v_n\}$

Ta cần tìm b sao cho $a\{b^2\} = 4 \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{a}}$

1.10.2. Dạng: $\{u_n\}$ $\{u_{n+1}\} = au_n^3 + bu_n^2 + c\{u_n\} + d$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

với $a > 0, c = \frac{b^2}{3a}, d = \frac{b}{9a} \left(c - 3 \right)$, $\alpha > -\frac{b}{3a}$ hay $a > 0, c = \frac{b^2}{3a} + 9a, d = \frac{b^3 + 18ab}{27a^2}$, $\alpha > \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{b}{3a}$

Đặt $\{u_n\} = a\{v_n\} + b$, thế vào giả thiết rồi tìm hai số a, b sao cho $\{v_{n+1}\} = 4v_n^3 \pm 3v_n$

1.11. Dạng: $\{u_n\}$ $\{u_{n+1}\} = 8u_n^4 - 8u_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

và $\{u_{n+1}\} = \left(8u_n^3 + 4u_n \right) \sqrt{1 + u_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Với dạng 1.11a) Ta xét các trường hợp sau:

* Trường hợp 1:

Nếu $\{u_1\} = 1$ thì ta được $\{u_n\} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Nếu $\{u_1\} = -1$ thì ta được $\{u_n\} = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

* Trường hợp 2: Nếu $-1 < u_1 < 1$ thì ta đặt $u_1 = \cos \alpha \in (0; \pi)$.

Chúng minh quy nạp ta được: $u_n = \cos (4^{n-1} \alpha)$

* Trường hợp 3: Nếu $u_1 > 1$ thì ta đặt $u_1 = \cosh \alpha$.

Chúng minh quy nạp ta được: $u_n = \cosh (4^{n-1} \alpha) = \frac{(\cosh \alpha)^{4^{n-1}} + (\cosh \alpha)^{-4^{n-1}}}{2}$

* Trường hợp 4: Nếu $u_1 < -1$ thì ta đặt $-u_1 = \cosh \alpha$.

Chúng minh quy nạp ta được: $u_n = -\cosh (4^{n-1} \alpha) = -\frac{(\cosh \alpha)^{4^{n-1}} + (\cosh \alpha)^{-4^{n-1}}}{2}, \forall n \geq 2$

Với dạng 1.11b) ta đặt $u_1 = \sinh \alpha$. Chúng minh quy nạp ta được: $u_n = \sinh (4^{n-1} \alpha) = \frac{(\cosh \alpha)^{4^{n-1}} - (\cosh \alpha)^{-4^{n-1}}}{2}$

1.12. Dạng:
$$\begin{cases} \mathbf{Cho} \\ u_1 \\ \mathbf{u}_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3u_n}{1 + 3u_n^2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ta xét các trường hợp sau:

* Nếu $u_1 = 1$ hay $u_1 = -1$ thì $u_n = 1$ hay $u_n = -1$

* Nếu $-1 < u_1 < 1$ thì ta đặt $\theta \in (0; \pi)$ sao cho $u_1 = \cos \theta$.

Chúng minh quy nạp ta được: $u_n = \cos (3^{n-1} \theta) = \frac{(\cos^2 \theta)^{3^{n-1}} + (\cos^2 \theta)^{-3^{n-1}}}{2} - 1$

* Nếu $u_1 > 1$ thì ta đặt $\cosh \alpha = u_1$.

Chúng minh quy nạp ta được: $u_n = \cosh (3^{n-1} \alpha) = \frac{(\cosh^2 \alpha)^{3^{n-1}} + (\cosh^2 \alpha)^{-3^{n-1}}}{2} + 1$

Bây giờ, chúng ta hãy xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n^2 - 1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giải: Đặt $\{u_n\} = \frac{2}{3}\{x_n\}$ ta được dãy số $\{x_n\}$ định bởi: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

Ta có: $x_1 = \cos \frac{\pi}{3}$. Giả sử $x_n = \cos \left((2^{n-1}) \frac{\pi}{3} \right)$. Khi đó $x_{n+1} = 2 \cos^2 \left((2^{n-1}) \frac{\pi}{3} \right) - 1 = \cos \left((2^n) \frac{\pi}{3} \right)$

Vậy: $x_n = \cos \left((2^{n-1}) \frac{\pi}{3} \right)$ suy ra $u_n = \frac{2}{3} \cos \left((2^{n-1}) \frac{\pi}{3} \right)$

Ví dụ 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số $\{u_n\}$ định bởi: $\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{15}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \cdot 3^{2^n} \end{array} \right., \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giải: Đặt $\{u_n\} = 2 \cdot 3^{2^{n-1}} \{x_n\}$ ta được dãy số $\{x_n\}$ định bởi: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{4} \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

Đặt $\chi_\alpha = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \frac{5}{4}$, giải phương trình ta chọn nghiệm $e^\alpha = 2$

Ta có: $x_1 = \chi_\alpha$. Giả sử $x_n = \chi_{(2^{n-1})\alpha}$. Khi đó: $x_{n+1} = 2 \cos^2 \left((2^{n-1}) \alpha \right) - 1 = \chi_{(2^n)\alpha}$

Vậy: $x_n = \chi_{(2^{n-1})\alpha} = \frac{e^{(2^{n-1})\alpha} + e^{-(2^{n-1})\alpha}}{2} = \frac{e^{2^{n-1}\alpha} + e^{-2^{n-1}\alpha}}{2}$ suy ra $u_n = 2 \cdot 3^{2^{n-1}} \cdot \frac{e^{2^{n-1}\alpha} + e^{-2^{n-1}\alpha}}{2}$

Ví dụ 3: Tìm số hạng tổng quát của dãy số $\{u_n\}$ định bởi:

$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{array} \right., \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giải: Đặt $u_1 = 2 \chi_\alpha \Leftrightarrow 3 = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$. Giải phương trình ta chọn nghiệm $e^\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Giả sử $u_n = 2 \chi_{(2^{n-1})\alpha}$. Khi đó: $u_{n+1} = \sqrt{2 + 2 \chi_{(2^{n-1})\alpha}} = \sqrt{2 + 2 \frac{e^{(2^{n-1})\alpha} + e^{-(2^{n-1})\alpha}}{2}} = \sqrt{2 + e^{(2^{n-1})\alpha} + e^{-(2^{n-1})\alpha}} = 2 \chi_{(2^n)\alpha}$

Vậy: $u_n = 2 \chi_{(2^{n-1})\alpha} = \frac{e^{(2^{n-1})\alpha} + e^{-(2^{n-1})\alpha}}{2} = \frac{e^{2^{n-1}\alpha} + e^{-2^{n-1}\alpha}}{2} = \frac{e^{2^{n-1}\alpha} + e^{-2^{n-1}\alpha}}{2}$

$$\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}, \text{, , , , for all } n \in \mathbb{N}^*$$

Còn tiếp... [Phần II](#)

Mời các bạn tham gia thảo luận tại: <http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=73743>