MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

Hồ Đình Sinh

mathematics 4 teachers n' students

I. DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Dấu hiệu cho phép ta sử dụng phương pháp này là khi thấy số phương trình trong hệ ít hơn số ẩn. Tuy nhiên có những hệ số phương trình bằng số ẩn ta cũng có thể sử dụng phương pháp này.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình nghiệm dương:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ (1+x)(1+y)(1+z)=\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3 \end{cases}$$

Giải: $VT=1+x+y+z+\left(xy+yz+zx\right)+xyz\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{(xyz)^2}+xyz=\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3$

Dấu "=" xảy ra khi x=y=z=1.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5} \\ x+y+x^2+y^2=80 \end{cases}$$

Giải: ĐK: $x\geq -1; y\geq 5$

Ta thấy rằng nếu ta thay x=y-6 thì phương trình thứ nhất VT=VP. Do đó, ta xét các trường hợp sau:

Nếu x>y-6 thì VT>VP.

Nếu x<y-6 thì VT<VP.

Suy ra x=y-6. Từ đây và phương trình thứ hai ta tìm được x,y.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình nghiệm dương

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{4y}{y+1}+\dfrac{2z}{z+1}=1 \\ 8^9x^3y^4z^2=1 \end{cases}$$

Giải: Bài toán này có số ẩn nhiều hơn số phương trình vì vậy ta sẽ sử dụng phương pháp bất đẳng thức

Nhận xét: Bậc của x,y,z ở phương trình 2 khác nhau nên ta sử dụng Cauchy sao cho xuất hiện bậc giống hệ.

Từ phương trình thứ nhất ta có:

$$\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{x+1}+\frac{4y}{y+1}+\frac{2z}{z+1}$$
$$\frac{1}{y+1}=\frac{3x}{x+1}+\frac{3y}{y+1}+\frac{2z}{z+1}$$
$$\frac{1}{z+1}=\frac{3x}{x+1}+\frac{4y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$

Áp dụng Cauchy cho 8 số ta có:

$$\frac{1}{x+1}\geq 8\sqrt[8]{\frac{x^2y^4z^2}{(x+1)^2(y+1)^4(z+1)^2}}$$
$$\frac{1}{y+1}\geq 8\sqrt[8]{\frac{x^3y^3z^2}{(x+1)^3(y+1)^3(z+1)^2}}$$
$$\frac{1}{z+1}\geq 8\sqrt[8]{\frac{x^3y^4z}{(x+1)^3(y+1)^4(z+1)^1}}$$

Suy ra

$$\frac{1}{(1+x)^3}\frac{1}{(y+1)^4}\frac{1}{(z+1)^2}\geq 8^9\sqrt[8]{\frac{x^{24}y^{32}z^{16}}{(x+1)^{24}(y+1)^{32}(z+1)^{16}}}$$

$\Rightarrow 8^9x^3y^4z^2\leq 1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}=\frac{y}{y+1}=\frac{z}{z+1}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{8}$.

<u>Ví dụ 4:</u> Giải hệ

$$\begin{cases} x^4+y^2=\frac{697}{81} \\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \end{cases}$$

Giải:

Ví dụ này tôi muốn giới thiệu công cụ xác định miền giá trị của x;y nhờ điều kiện có nghiệm của tam thức bậc 2.

Xét phương trình bậc 2 theo x:

$x^2+x(y-3)+y^2-4y+4=0$

$\Delta_x=(y-3)^2-4(y-2)^2$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta_x\geq 0\Leftrightarrow 1\leq y\leq\frac{7}{3}$.

Tương tự xét phương trình bậc 2 theo y ta có: $0\leq x\leq\frac{4}{3}$

Suy ra $x^4+y^2\leq\left(\frac{4}{3}\right)^4+\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{697}{81}$

$\Rightarrow x=\frac{4}{3};y=\frac{7}{3}$ Tuy nhiên thế vào hệ không thoả mãn dó đó hệ vô nghiệm.

<u>Ví dụ 5</u>: Giải hệ
$$\begin{cases} x^5-x^4+2x^2y=2 \\ y^5-y^4+2y^2z=2 \\ z^5-z^4+2z^2x=2 \end{cases}$$

Giải:
Ý tưởng của bài toán này là đoán nghiệm của hệ x=y=z=1; Sau đó chứng minh x>1 hay x<1 hệ vô nghiệm.
+) Nếu x>1

$\Rightarrow 2 = z^5 - z^4 - 2z^2x > z^5 - z^4 + 2z^2$

$\Rightarrow (z-1)(z^4 + 2z + 2) < 0$

Do $z^4 + 2z + 2 = \left(z^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + (z+1)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên z<1.

Tương tự, ta có y>1 $\Rightarrow$x<1 suy ra vô lý.
+) Nếu x<1
Tương tự trên ta cũng suy ra được điều vô lý.
Vậy x=y=z=1 là nghiệm của hệ.

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải hệ:

a) $\begin{cases} xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^6 + y^6 + z^6 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ

$\begin{cases} x^3y = 9 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ ĐS: VN

Bài 3: Giải hệ

$\begin{cases} xz = y + 2 \\ x + z = 2\sqrt{y}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \end{cases}$ ĐS: (2;2;2)

Bài 4: Giải hệ

$\begin{cases} y^3 + x^2 = \sqrt{64 - x^2y} \\ (x^2 + 2)^3 = y + 6 \end{cases}$ ĐS: (0;2)

Bài 5: Giải hệ

$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+y} = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{(y-4)^2 + 5} = \sqrt{5} \end{cases}$ ĐS: (0;4)

Bài 6:

$\begin{cases} 3|x|^3 + |y| + x^2 = 4 \\ \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x + y^2} = 1 \end{cases}$ ĐS: (1;0)

Bài 7. Giải hệ

$\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$ ĐS: VN

Bài 8: Giải hệ

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2xy + 2yz - 2xz + 1 = 0 \end{cases}$

HD: Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (x-y)^2 - 2z(x-y) + 1 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ta được: $-1 \le z \le 1$

Từ phương trình thứ hai : x-y tồn tại $\Leftrightarrow z^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow |z| \ge 1$

Suy ra $z = \pm 1$.

Bài 9: Giải hệ

$$\begin{cases} x^2 = y+1 \\ y^2 = z+1 \\ z^2 = x+1 \end{cases}$$

HD: Đây là hệ mà vai trò của x, y, z như nhau.

Giả sử $x \ge y \ge z$. Suy ra $z^2 - 1 \ge x^2 - 1 \ge y^2 - 1 \Leftrightarrow z^2 \ge x^2 \ge y^2$ (*)

Xét $x \le 0$ hoặc $z \ge 0$. Từ (*) suy ra x=y=z.

Vậy chỉ có trường hợp x>0 và z<0 . Khi đó $z^2 = x + 1 > 1 \Rightarrow z < -1 \Rightarrow y^2 = z + 1 < 0$ vô lý.

Vậy hệ có 2 nghiệm là x=y=z=$\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 10: **(** Olympic-tỉnh Gia lai 2009) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - zx - zy = 3 \\ x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy = -1 \end{cases}$$

HD: Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)^2 - z(x+y) + z^2 - 3 = 0 \\ (x-y)^2 - z(x-y) + 1 = 0 \end{cases}$$

ĐS: (1;0;2) , (-1;0;2).

II. TÍNH CÁC ĐẠI LƯỢNG CHUNG

<u>**Ví dụ 1**</u>: Cho abc>0. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ zx = c \end{cases}$$

Giải: Do abc>0 nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ (xyz)^2 = abc \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ xyz = \sqrt{abc} \end{cases} \\ \begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ xyz = -\sqrt{abc} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = \sqrt{\dfrac{bc}{a}} \\ y = \sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ x = \sqrt{\dfrac{ac}{b}} \end{cases} \\ \begin{cases} z = -\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>Ví dụ 2</u>: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ x + z + xz = 2 \\ y + z + yz = 5 \end{cases} \qquad (*)$$

HD Giải:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (x+1)(z+1) = 3 \\ (y+1)(z+1) = 6 \end{cases}$$

Từ đây các em có thể giải tiếp một cách dể dàng.

<u>Ví dụ 3</u>: Giải hệ

$$\begin{cases} x^2 + 2yz = x \\ y^2 + 2zx = y \\ z^2 + 2xy = z \end{cases} \qquad (*)$$

HD Giải:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2yz = x \\ x^2 - y^2 + 2yz - 2xz = x - y \\ x^2 - z^2 + 2yz - 2xy = x - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2yz = x \\ (x-y)(x+y-2z-1) = 0 \\ (x-z)(x+z-2y-1) = 0 \end{cases}$$

Từ đây các em có thể giải tiếp một cách dể dàng.

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN:
Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1:

a) $\begin{cases} xy = 2 \\ yz = 6 \\ zx = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ yz + y + z = 5 \\ zx + z + x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy + x + y = 7 \\ yz + y + z = -3 \\ xz + x + z = -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy + xz = 8 \\ yz + xy = 9 \\ xz + zy = -7 \end{cases}$

Bài 2:

a) $\begin{cases} x(x+y+z)=2-yz \\ y(x+y+z)=3-xy \\ z(x+y+z)=6-xy \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy+y+2x+2=4 \\ yz+2z+3y=6 \\ xz+z+3x=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+xy+y=1 \\ y+yz+z=4 \\ z+zx+x=9 \end{cases}$

Bài 3:

$a)\begin{cases} x^2+2yz=x \\ y^2+2zx=y \\ z^2+2xy=z \end{cases}$ b)* $\begin{cases} y^2-xz=b \\ z^2-xy=b \quad (a,b\in R) \\ x^2-yz=a \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y+z=3 \\ y^2+x+z=3 \\ z^2+x+y=3 \end{cases}$ d)$\begin{cases} xyz=x+y+z \\ yzt=y+z+t \\ ztx=z+t+x \\ txy=t+x+y \end{cases}$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Đôi khi bài toán sẽ phức tạp nếu ta giải hệ với ẩn (x ,y ,z) nhưng chỉ sau một phép đặt a=f(x), b=f(y); c=f(z) … thì hệ sẽ đơn giản hơn.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(x+z)^2=(4y^2+y+1)x^2z^2 \\ z^2(x+y)^2=(5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

Giải:
Nếu x=0 suy ra được y=z=0 $\Rightarrow (x;y;z)=(0;0;0)$ là nghiệm của hệ.
Với $x\neq 0; y\neq 0; z\neq 0$ chia cả hai vế cho $x^2y^2z^2$ ta thu được

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y+z}{yz}\right)^2=3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{x+z}{xz}\right)^2=4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2=5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{1}{x};b=\dfrac{1}{y};c=\dfrac{1}{z}$ Ta nhận được

$$\begin{cases} (a+b)^2=c^2+c+5 & (1) \\ (b+c)^2=a^2+a+3 & (2) \\ (a+c)^2=b^2+b+4 & (3) \end{cases}$$

Lấy (2)-(3) ta được: (a-b)[2(a+b+c)+1]=1.
Lấy (1)- (3) ta được: (b-c)[2(a+b+c)+1)=1 .
Suy ra a-b=b-c $\Rightarrow$a+c=2b thay vào (3) ta được $3b^2-b-4=0$.
Từ đây các em có thể giải tiếp.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3(6+21y)=1 \\ x(y^3-6)=21 \end{cases}$$

HD: Nếu giải hệ với ẩn (x;y) thì ở đây ta thật khó để thấy được được phương hướng giải. Nhưng mọi chuyện sẽ rõ ràng khi ta đặt $x = \frac{1}{z}$. Khi đó dưa về hệ

$$\begin{cases} z^3 = 21y + 6 \\ y^3 = 21z + 6 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại 2. Các em hãy giải tiếp.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{36}{13} \end{cases}$$

HD: Nghịch đảo 2 vế của từng phương trình sau đó đặt ẩn phụ.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

Giải: Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x = y(1 - x^2) \\ 2y = z(1 - y^2) \\ 2z = x(1 - z^2) \end{cases}$$

Khi $x = \pm 1; y = \pm 1; z = \pm 1$ không là nghiệm của hệ trên nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} & (1) \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} & (2) \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} & (3) \end{cases}$$

Đặt $x = \tan\alpha$; $\left(\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ thì

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \tan 2\alpha$$

$$(2) \Leftrightarrow z = \frac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \tan 4\alpha$$

$$(3) \Leftrightarrow x = \frac{2\tan 4\alpha}{1 - \tan^2 4\alpha} = \tan 8\alpha = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan 8\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\alpha}{7} (k \in Z)$$

Vì $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < \frac{k\alpha}{7} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-7}{2} < k < \frac{7}{2}$

Do $k \in Z$ nên $k \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\} \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{-3\pi}{7};\frac{-2\pi}{7};\frac{-\pi}{7};0;\frac{\pi}{7};\frac{2\pi}{7};\frac{3\pi}{7}\right\}$

Vậy nghiệm của hệ là : $\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan 2\alpha \\ z = \tan 4\alpha \end{cases}$, với α là các giá trị $\left\{\frac{-3\pi}{7};\frac{-2\pi}{7};\frac{-\pi}{7};0;\frac{\pi}{7};\frac{2\pi}{7};\frac{3\pi}{7}\right\}$.

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN:

1) Giải và biện luận các hệ phương trình:

$$a)\begin{cases} y+z-x = \dfrac{xyz}{a^2} \\ x+y-z = \dfrac{xyz}{b^2} \\ x+z-y = \dfrac{xyz}{c^2} \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a \\ \dfrac{xz}{x+z} = a \\ \dfrac{yz}{y+z} = a^2 \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình sau:

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xyz} = 3 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xyz} = 3 \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xyz} = 3 \end{cases}$ HD: Đặt $a = \dfrac{1}{x}; b = \dfrac{1}{y}; c = \dfrac{1}{z}$. Hệ $\begin{cases} a+bc+abc = 3 \\ b+ca+abc = 3 \\ c+ab+abc = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+bc+abc = 3 \\ (a-b)(1-c) = 0 \\ (a-c)(1-b) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y} = 1 \\ \dfrac{5yz}{y+z} = 1 \\ \dfrac{5zx}{z+x} = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5xy = 6(x+y) \\ 7yz = 12(y+z) \\ 3xz = 4(x+z) \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 3-xy \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 7-\dfrac{3x^2y^2+2}{xy} \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y} = 7 \\ x+y = 2xy \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{5}{2}xy \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x^2+2x+y^2+y = 6 \\ xy(xy+x+y+1) = 4 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x^2+y^2-3x+4y = 1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y = 3 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+3\dfrac{x-y}{x+y} = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x^2+x+y^2+y = 18 \\ xy(x+1)(y+1) = 72 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y} = 5 \\ (x+y)\dfrac{x}{y} = 6 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x(x+2)(2x+y)=9 \\ x^2+4x+y=6 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x(3x+2y)(x+1)=12 \\ x^2+2y+4x-8=0 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y+6x=y^2 \end{cases}$ (Olympic 2008)

22) $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ x(x+1)+y(y+1)=12 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} \text{x}+|\text{y}|+x^3+2x^2|y|+2xy^2|y^3|=0 \\ \text{x}|\text{y}|=-2 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x-3z-3z^2x+z^3=0 \\ y-3x-3x^2y+x^3=0 \\ z-3y-3y^2z+y^3=0 \end{cases}$ (Olympic 2008)

HD: Đk : $x;y;z\neq\dfrac{\pm1}{\sqrt{3}}$. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x=\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2} \\ y=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} \end{cases}$

25) $\begin{cases} x(4-y^2)=8y \\ y(4-z^2)=8z \\ z(4-x^2)=8x \end{cases}$ (Olympic 2008) . HD: Đặt x=2tanα .

IV. DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau;

$$\begin{cases} 2x^3+2y^2+3y+3=0 \\ 2y^3+2z^2+3z+3=0 \\ 2z^3+2x^2+3x+3=0 \end{cases}$$

Giải: Hệ đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x=f(y) \\ y=f(z) \\ z=f(x) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2t^2+3t+3}$

Ta có: $2t^2+3t+3>0; \quad \forall t\in R$.

$f'(t) = -\frac{1}{6}(4t+3)(2t^2+3t+3)^{\frac{2}{3}}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}$

Từ đó ta có: f(t) tăng nếu $t \le -\frac{3}{4}$ và f(t) giảm nếu $t \ge -\frac{3}{4}$

• Xét $t \le -\frac{3}{4}$ thì hàm f(t) tăng:

Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0; z_0)$

Nếu $x_0 < y_0$ thì $f(x_0) < f(y_0) \Rightarrow z_0 < x_0 \Rightarrow f(z_0) < f(x_0) \Rightarrow y_0 < z_0$ suy ra $x_0 > z_0 > y_0$
Điều này vô lý.

Như vậy hệ chỉ có nghiệm khi $x_0 = y_0 = z_0$, thế vào ta đươc

$2x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 = 0 \Leftrightarrow (x_0+1)(2x_0^2+3) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$

Suy ra hệ có nghiệm x=y=z=-1.

• Xét với $t \ge -\frac{3}{4}$ hàm f(t) giảm ; Chứng minh tương tự ta cũng được nghiệm x=y=x=-1 nhưng nghiệm này loại vì x;y;z $\ge -\frac{3}{4}$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất x=y=z=-1.

<u>Ví dụ 2</u>: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \sin y = 0 \\ y - \sin z = 0 \\ z - \sin x = 0 \end{cases}$$

Giải: Xét hàm số f(x)=sin t, khi đó có dạng

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

Hàm f(t) có tập giá trị $I = [-1;-1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Hàm f(t) đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm f(t) đồng biến trên I.

Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0; z_0)$.

Nếu $x_0 < y_0$ thì $f(x_0) < f(y_0) \Rightarrow z_0 < x_0 \Rightarrow f(z_0) < f(x_0) \Rightarrow y_0 < z_0$ suy ra $x_0 > z_0 > y_0$. Điều này vô lý.

Vì vậy hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x = y = z \\ x - \sin x = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Xét hàm số g(x)=x-sin x.
Miền xác định D=R;
Đạo hàm
$g'(x) = 1 - \cos x \ge 0, \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D. Do đó ta có:
Với x=0, ta có g(0)=0 $\Leftrightarrow$ phương trình (*) nghiệm đúng.
Với x>0 ta có g(x)>g(0)=0 $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm.
Với x<0 ta có g(x)<g(0)=0 $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình (*) có nghiệm x=0. Do đó, hệ có nghiệm x=y=z=0.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}$$

HD: Xét hàm $f(t)=t^3+3t-3+\ln(t^2-t+1)$

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} f(x)=y \\ f(y)=z \\ f(z)=x \end{cases}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+3+\dfrac{2t-1}{t^2-t+1}=3t^2+1+\dfrac{2t^2+1}{t^2-t+1}>0 \quad \forall x\in R.$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên R.

Do $x;y;z$ đóng vai trò như nhau. Nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $x\ge y\ge z$.

Từ hệ phương trình ta có: $f(z)\ge f(x)\ge f(y)$; nên ta suy ra $x=y=z$.

Bây giờ ta giải phương trình $g(x)=x^3+2x-3+\ln(x^2-x+1)=0$

Ta có $g'(x)=3x^2+2+\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}=3x^2+\dfrac{2x^2+1}{x^2-x+1}>0 \quad \forall x\in R.$

Do đó $g(x)$ là hàm đồng biến và nhận $x=1$ là nghiệm.

Vậy hệ phương trình có duy nhất nghiệm $x=y=z=1$.

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN:

Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} 2x+1=y^3+y^2+y \\ 2y+1=z^3+z^2+z \\ 2z+1=x^3+x^2+x \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0 \\ z^3-9y^2+27y-27=0 \\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x \end{cases}$ (Olympic-2009)

4) $\begin{cases} x=\sqrt{1+\dfrac{y+1}{x}} \\ y=\sqrt{1+\dfrac{z+1}{y}} \\ z=\sqrt{1+\dfrac{x+1}{z}} \end{cases}$ (Olympic-2008)

5) $\begin{cases} x=y^3+y^2+y-2 \\ y=z^3+z^2+z-2 \\ z=x^3+x^2+x-2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3+x^2+3x-4=y \\ y^3+y^2+3y-4=z \\ z^3+z^2+3z-4=x \end{cases}$

Bài 7: $\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}$

Giải: Ta giả sử (x,y,z) là n_o của hệ. Xét hàm số $f(t)=t^3+3t-3+\ln(t^2-t+1)$

ta có: $f'(t)=3t^2+3+\dfrac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t+1}}>0$ nên f(t) là hàm đồng biến

Ta giả sử: x=Max{x,y,z} thì $y=f(x)\geq f(y)=z\Rightarrow z=f(y)\geq f(z)=x$

Vậy ta có x=y=z. Vì phương trình $x^3+2x-3+\ln(x^2-x+1)=0$ có nghiệm duy nhất x=1 nên hệ đã cho có nghiệm là x=y=z=1

Bài 8: Giải hệ: $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y)=x\\ \sqrt{y^2-2y+6}\log_3(6-z)=y\\ \sqrt{z^2-2z+6}\log_3(6-x)=z\end{cases}$ ***(HSG QG Bảng A năm 2006)***

<u>Giải</u>: Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}\\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}}\\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=g(x)\\ f(z)=g(y)\\ f(x)=g(z)\end{cases}$

Trong đó $f(t)=\log_3(6-t)$; $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$ với $t\in(-\infty;6)$

Ta có f(t) là hàm nghịch biến, $g'(t)=\dfrac{6-t}{\sqrt{(t^2-2t+6)^3}}>0\quad\forall t\in(-\infty;6)\Rightarrow$ g(t) là hàm đb

Nên ta có nếu (x,y,z) là nghiệm của hệ thì x=y=z thay vào hệ ta có:

$\log_3(6-x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ phương trình này có nghiệm duy nhất x=3

Vậy nghiệm của hệ đã cho là x=y=z=3.

Người biên soạn: Hồ Đình Sinh
Email: sinhqluu@gmail.com
Gửi đăng ở www.mathvn.com