HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH DẠNG HOÁN VỊ VÒNG QUANH.

Bài 1. (*Đề thi HSG quốc gia năm 1994*)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+3x-3+\ln\left(x^2-x+1\right)=y \\ y^3+3y-3+\ln\left(y^2-y+1\right)=z \\ z^3+3z-3+\ln\left(z^2-z+1\right)=x \end{cases}$

Giải :

Xét hàm số : $\mathrm{f}(t)=t^3+3t-3+\ln\left(t^2-t+1\right)$

Ta có : $\mathrm{f}'(t)=3t^2+1+\dfrac{2t^2-1}{t^2-t+1}>0, \quad \forall x\in\mathrm{R}$

Vậy hàm số $\mathrm{f}(t)$ đồng biến trên R. Ta viết lại hệ phương trình như sau :

$$\begin{cases} \mathrm{f}(x)=y \\ \mathrm{f}(y)=z \\ \mathrm{f}(z)=x \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử : $x=\min\{x,y,z\}$. Lúc đó :

$$x\le y\Rightarrow \mathrm{f}(x)\le \mathrm{f}(y)\Rightarrow y\le z\Rightarrow \mathrm{f}(y)\le \mathrm{f}(z)\Rightarrow z\le x \text{. Hay : } x\le y\le z\le x\Rightarrow x=y=z$$

Với : $x=y=z$, xét phương trình : $x^3+2x-3+\ln\left(x^2-x+1\right)=0$

Do hàm số : $\varphi(x)=x^3+2x-3+\ln\left(x^2-x+1\right)$ đồng biến trên R nên pt có nghiệm duy nhất : $x=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $x=y=z=1$.

Bài toán tổng quát 1 . *Xét hệ phương trình có dạng* :

$$\begin{cases} \mathrm{f}(x_1)=\mathrm{g}(x_2) \\ \mathrm{f}(x_2)=\mathrm{g}(x_3) \\ \quad\ldots. \\ \mathrm{f}(x_{n-1})=\mathrm{g}(x_n) \\ \mathrm{f}(x_n)=\mathrm{g}(x_1) \end{cases}$$

Nếu hai hàm số f *và* g *cùng tăng trên tập* A *và* $(x_1,x_2\ldots,x_n)$ *là nghiệm của hệ phương trình , trong đó* $x_i\in A,\ \forall i=1,2,\ldots,n$ *thì* $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Chứng minh :

Không mất tính tổng quát giả sử : $x_1=\min\{x_1,x_2\ldots,x_n\}$.

Lúc đó ta có : $x_1\le x_2\Rightarrow \mathrm{f}(x_1)\le \mathrm{f}(x_2)\Rightarrow \mathrm{g}(x_2)\le \mathrm{g}(x_3)\Rightarrow x_2\le x_3\ldots\Rightarrow x_n\le x_1$.

Vậy : $x_1\le x_2\le\ldots.\le x_n\le x_1$

Từ đó suy ra : $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

✍ **Bài 2.**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x^3+x^2} = y \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2y^3+y^2} = z \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2z^3+z^2} = x \end{cases}$

Giải:

Vì vế trái của các phương trình trong hệ đều dương nên hệ chỉ có nghiệm : $x, y, z > 0$.

Xét hàm số : $\mathrm{f}(t) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2t^3+t^2}$, ta có : $\mathrm{f}'(t) = -(2\ln 4)(3t^2+t).\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2t^3+t^2} < 0, \ \forall t > 0$.

Vậy hàm số $\mathrm{f}(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử : $x = \min\{x, y, z\}$. Lúc đó :

$x \le y \Rightarrow \mathrm{f}(x) \ge \mathrm{f}(y) \Rightarrow y \ge z \Rightarrow \mathrm{f}(y) \le \mathrm{f}(z) \Rightarrow z \le x \Rightarrow x = z \Rightarrow \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(z) \Rightarrow y = x$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

✍ **Bài toán tổng quát 2 .** *Xét hệ phương trình có dạng (với n lẻ):*

$$\begin{cases} \mathrm{f}(x_1) = \mathrm{g}(x_2) \\ \mathrm{f}(x_2) = \mathrm{g}(x_3) \\ \quad .... \\ \mathrm{f}(x_{n-1}) = \mathrm{g}(x_n) \\ \mathrm{f}(x_n) = \mathrm{g}(x_1) \end{cases}$$

Nếu hàm số f giảm trên tập A , g tăng trên A và $(x_1, x_2 ..., x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình , trong đó $x_i \in A, \ \forall i = 1, 2, ..., n$ thì $x_1 = x_2 = ... = x_n$ với n lẻ .

Chứng minh :

Không mất tính tổng quát giả sử : $x_1 = \min\{x_1, x_2 ..., x_n\}$.

Lúc đó ta có :

$x_1 \le x_2 \Rightarrow \mathrm{f}(x_1) \ge \mathrm{f}(x_2) \Rightarrow \mathrm{g}(x_2) \ge \mathrm{g}(x_3) \Rightarrow x_2 \ge x_3 ... \Rightarrow x_n \le x_1 \Rightarrow \mathrm{f}(x_n) \ge \mathrm{f}(x_1) \Rightarrow x_1 \ge x_2$.

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Từ đó suy ra : $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

✍ **Bài 3.**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2z \\ (z-1)^2 = 2t \\ (t-1)^2 = 2x \end{cases}$

Giải :

Vì vế trái của các phương trình trong hệ không âm nên phương chỉ có nghiệm : $x,y,z,t\ge 0$.

Xét hàm số : $f(s)=(s-1)^2$, ta có : $f'(s)=2(s-1)$. Do đó hàm số tăng trên khoảng $(1;+\infty)$ và giảm trên $[0;\ 1]$ (Do f(s) liên tục trên R).

Không mất tính tổng quát, giả sử : $x=\min\{x,y,z,t\}$.

+ Nếu $x\in(1;+\infty)\Rightarrow x,y,z,t\in(1;+\infty)$, do đó theo bài toán tổng quát 1, hệ có nghiệm duy nhất : $x=y=z=t=2+\sqrt{3}$.

+ Nếu $x\in[0;\ 1]\Rightarrow 0\le f(x)\le 1\Rightarrow 0\le 2y\le 1$, hay $y\in[0;1]$, tương tự $\Rightarrow z,t\in[0;\ 1]$.

Vậy $x,y,z,t\in[0;\ 1]$. Do đó ta có :

$x\le y\Rightarrow f(x)\ge f(y)\Rightarrow y\ge z\Rightarrow f(y)\le f(z)\Rightarrow z\le x\Rightarrow x=z$.

Với $x=z\Rightarrow f(x)=f(z)\Rightarrow y=t$.

Lúc đó hệ phương trình trở thành : $\begin{cases}(x-1)^2=2y\\(y-1)^2=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=2y\\ \left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=y=2-\sqrt{3}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $x=y=z=t=2+\sqrt{3}$ và $x=y=2-\sqrt{3}$.

✍ **Bài toán tổng quát 3 .** *Xét hệ phương trình có dạng (với n chẵn):*

$$\begin{cases}f(x_1)=g(x_2)\\f(x_2)=g(x_3)\\....\\f(x_{n-1})=g(x_n)\\f(x_n)=g(x_1)\end{cases}$$

Nếu hàm số f giảm trên tập A , g tăng trên A và $(x_1,x_2...,x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình , trong đó $x_i\in A,\ \forall i=1,2,...,n$ thì $\left[\begin{array}{l}x_1=x_3=...=x_{n-1}\\x_2=x_4=...=x_n\end{array}\right.$ với n chẵn .

Chứng minh :

Không mất tính tổng quát giả sử : $x_1=\min\{x_1,x_2...,x_n\}$.

Lúc đó ta có :.

$x_1\le x_3\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_3)\Rightarrow g(x_2)\ge g(x_4)$

$\Rightarrow x_2\ge x_4$

$\Rightarrow f(x_2)\le f(x_4)\Rightarrow g(x_3)\le g(x_5)$

$\Rightarrow x_3\le x_5$.........

$\Rightarrow f(x_{n-2})\le f(x_n)\Rightarrow g(x_{n-1})\le g(x_1)$

$\Rightarrow x_{n-1}\le x_1$.........

$\Rightarrow f(x_{n-1})\ge f(x_1)\Rightarrow g(x_n)\ge g(x_2)\Rightarrow x_n\ge x_2$

Vậy : $x_1\le x_3\le ....\le x_{n-1}\le x_1\Rightarrow x_1=x_3=...=x_{n-1}$; $x_2\ge x_4\ge ....\ge x_n\ge x_2\Rightarrow x_2=x_4=...=x_n$

PHẦN BÀI TẬP ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP

☞ 1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x^3-7x^2+8x-2=y \\ 2y^3-7y^2+8y-2=z \\ 2z^3-7z^2+8z-2=x \end{cases}$$

☞ 2. Chứng minh với mỗi $a \in R$, hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2=y^3+y+a \\ y^2=z^3+z+a \\ z^2=x^3+x+a \end{cases}$$
có một nghiệm duy nhất .

☞ 3. Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2=y+a \\ y^2=z+a \\ z^2=x+a \end{cases}$$
Tìm a để hệ phương trình chỉ có nghiệm với dạng $x=y=z$.

☞ 4. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3{}_1-3x_1+2=2x_2 \\ x^3{}_2-3x_2+2=2x_3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ x^3{}_{99}-3x_{99}+2=2x_{100} \\ x^3{}_{100}-3x_{100}+2=2x_1 \end{cases}$$

☞ 5. Cho n là số nguyên lớn hơn 1. Tìm a để hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2{}_1=x^3{}_2-4x_2+ax_2 \\ x^2{}_2=x^3{}_3-4x_3+ax_3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ x^2{}_{n-1}=x^3{}_n-4x_n+ax_n \\ x^2{}_n=x^3{}_1-4x_1+ax_1 \end{cases}$$
có một nghiệm duy nhất .

☞ 6. Cho n là số nguyên lớn hơn 1 và $a \neq 0$. Chứng minh hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2{}_1=x^3{}_2-4x_2+ax_2 \\ x^2{}_2=x^3{}_3-4x_3+ax_3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ x^2{}_{n-1}=x^3{}_n-4x_n+ax_n \\ x^2{}_n=x^3{}_1-4x_1+ax_1 \end{cases}$$
có nghiệm duy nhất .

☞ 7. Chứng minh với mỗi $a \in R$, hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2=y^3+y^2+y+a \\ y^2=z^3+z^2+z+a \\ z^2=x^3+x^2+x+a \end{cases}$$
có một nghiệm duy nhất .

II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI ĐƯỢC BẰNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ.

1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 & (1) \\ (1-x)(1+y)=2 & (2) \end{cases}$

Giải. ĐK : $\begin{cases} 1-x^2\ge 0 \\ 1-y^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 1 \\ |y|\le 1 \end{cases}$

Đặt $x=\cos\alpha;\ y=\cos\beta$ với $\alpha,\beta\in[0;\ \pi]$, khi đó hệ phương trình :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha.\sin\beta+\cos\beta.\sin\alpha=1 \\ (1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha.\cos\alpha-1=0 \end{cases}$$

Đặt $t=\sin\alpha-\cos\alpha,\ |t|\le\sqrt{2} \Rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{2}$

Khi đó ta có : $t-\dfrac{1-t^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3 \Rightarrow t=1$

Với $t=1$, ta có : $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Nếu : $|x|\le a\,(a>0)$***, ta đặt*** $x=a\cos\alpha$***, với*** $\alpha\in[0;\ \pi]$

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy)=\sqrt{3} & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Giải . Do $x^2+y^2=1 \Rightarrow x,y\in[-1;\ 1]$. Đặt $x=\sin\alpha,\ y=\cos\alpha$ với $\alpha\in[0;\ 2\pi]$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+2\sin2\alpha)=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).2.\left(\sin2\alpha+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin2\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-2\left[\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{3} \Leftrightarrow -2\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$$

$$\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=-35^0+k120^0 \\ \alpha=65^0+k120^0 \end{array}\right. \quad (k\in R)$$

Từ đó suy ra hệ có 6 nghiệm $(x,\ y)=\{(\sin65^0,\ \cos65^0),(-\sin35^0,\ \cos35^0),\ (\sin85^0,\ \cos85^0),$

$(-\sin5^0,\ -\cos5^0),(-\sin25^0,-\cos25^0),\ (\sin305^0,\ \cos305^0)\ \}$

Nếu : $x^2+y^2=a\left(a>0\right)$, ta đặt $x=\sqrt{a}\sin\alpha,\ y=\sqrt{a}\cos\alpha$, với $\alpha\in\left[0;\ 2\pi\right]$

✍ **3.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2x+x^2y=y\\2y+y^2z=z\\2z+z^2x=x\end{cases}$

Giải : Từ các phương trình của hệ , suy ra : $x,y,z\neq\pm1$. Do đó ta có :

$$\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2} & (1)\\ z=\dfrac{2y}{1-y^2} & (2)\\ x=\dfrac{2z}{1-z^2} & (3)\end{cases}$$

Đặt Đặt $x=\mathrm{tg}\alpha$ với $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ (4) và sao cho $\mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{tg}2\alpha,\ \mathrm{tg}4\alpha\neq\pm1$ (5).

Tương tự bài 2. Hệ phương trình có 7 nghiệm $\left(x=tg\dfrac{k\pi}{7},\ y=tg\dfrac{2k\pi}{7},\ z=tg\dfrac{4k\pi}{7}\right),\ k=0,\pm1,...,\pm3$

Với mọi số thực x có một số α với $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x=\mathrm{tg}\alpha$

✍ **4.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x-3z^2x-3z+z^3=0\\y-3x^2y-3x+x^3=0\\z-3y^2z-3y+y^3=0\end{cases}$

Giải . Viết lại hệ phương trình dưới dạng :

$$\begin{cases}x\left(1-3z^2\right)=3z-z^3\\ y\left(1-3x^2\right)=3x-x^3\\ z\left(1-3y^2\right)=3y-y^3\end{cases}\quad \text{(I)}$$

Từ đó, dễ thấy nếu (x,y,z) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x,\ y,\ z\ \neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Bởi thế :

$$\text{(I)}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2} & (1)\\ y=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} & (2)\\ z=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} & (3)\end{cases}\quad \text{(II)}$$

Đặt $x=\mathrm{tg}\alpha$ với $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ (4) và sao cho $\mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{tg}3\alpha,\ \mathrm{tg}9\alpha\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (5).

Khi đó từ (2), (3), (1) sẽ có : $y=\mathrm{tg}3\alpha,\ z=\mathrm{tg}9\alpha$ và $x=\mathrm{tg}27\alpha$

Từ đây dễ dàng suy ra (x,y,z) là nghiệm của (II) khi và chỉ khi $y=\text{tg}3\alpha,\ z=\text{tg}9\alpha$, $x=\text{tg}\alpha$, với α được xác định bởi (4), (5) và $\text{tg}\alpha=\text{tg}27\alpha$ (6).

Lại có : $(6)\Leftrightarrow 26\alpha=k\pi\,(k\in Z)$

Vì thế α thoả mãn đồng thời (4) và (6) khi và chỉ khi $\alpha=\dfrac{k\pi}{26}$ với k nguyên thoả mãn : $-12\le k\le 12$. Dễ dàng kiểm tra được rằng, tất cả các giá trị α được xác định như vừa nêu đều thoả mãn (5).

Vậy tóm lại hệ phương trình đã cho có tất cả 25 nghiệm, đó là :

$$\left(x=tg\frac{k\pi}{26},\ y=tg\frac{3k\pi}{26},\ z=tg\frac{9k\pi}{26}\right),\ k=0,\pm1,\dots\pm12$$

✍ **5**. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$$

Giải. Nhận xét : $xyz\neq 0;\ x,y,z$ cùng dấu . Nếu (x,y,z) là một nghiệm của hệ thì $(-x,-y,-z)$ cũng là nghiệm của hệ, nên chúng ta sẽ tìm nghiệm x,y,z dương .

Đặt $x=\text{tg}\alpha;\ y=\text{tg}\beta;\ z=\text{tg}\gamma\ \left(0<\alpha,\beta,\lambda<90^0\right)$.

Hệ $$\begin{cases}3\left(\text{tg}\alpha+\dfrac{1}{\text{tg}\alpha}\right)=4\left(\text{tg}\beta+\dfrac{1}{\text{tg}\beta}\right)=5\left(\text{tg}\gamma+\dfrac{1}{\text{tg}\gamma}\right) & (1)\\ \text{tg}\alpha\text{tg}\beta+\text{tg}\beta\text{tg}\gamma+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha=1 & (2)\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow 3\left(\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\alpha}\right)=4\left(\frac{1+\text{tg}^2\beta}{\text{tg}\beta}\right)=5\left(\frac{1+\text{tg}^2\gamma}{\text{tg}\gamma}\right)\Leftrightarrow\frac{3}{\sin2\alpha}=\frac{4}{\sin2\beta}=\frac{5}{\sin2\gamma}$$

Từ (2) suy ra : $\text{tg}\gamma(\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta)=1-\text{tg}\beta\text{tg}\alpha\Rightarrow cot\text{g}\gamma=\dfrac{(\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta)}{1-\text{tg}\beta\text{tg}\alpha}=\text{tg}(\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\text{tg}(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

Do $\begin{cases}\dfrac{3}{\sin2\alpha}=\dfrac{4}{\sin2\beta}=\dfrac{5}{\sin2\gamma}\\ 0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2};\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ nên $2\alpha,2\beta,2\gamma$ là các góc của một tam giác có số đo 3 cạnh 3,4,5.

Do tam giác có 3 cạnh 3,4,5 là tam giác vuông nên $2\gamma=90^0\Rightarrow\gamma=45^0\Rightarrow z=\text{tg}\gamma=1$

$$\text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{2x}{1-x^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$\text{tg}2\beta=\frac{2\text{tg}\beta}{1-\text{tg}^2\beta}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{2y}{1-y^2}=\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN HAY

II . HỆ PHƯƠNG TRÌNH 2 ẨN.

1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{698}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải : Giả sử hệ phương trình có nghiệm . Ta thấy (2) tương đương với :

$$x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0$$

Để phương trình này có nghiệm đối với x ta phải có :

$$\Delta = (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3} \qquad (3)$$

Mặt khác phương trình (2) cũng tương đương với : $y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$

Để phương trình này có nghiệm đối với y ta phải có :

$$\Delta = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có : $x^4 + y^2 \leq \dfrac{256}{81} + \dfrac{49}{9} = \dfrac{697}{81} < \dfrac{698}{81}$, không thoả mãn (1).

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm .

2. *(Đề thi HSG Quốc Gia năm 1995-1996.Bảng A)*

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$

3. *(Đề thi HSG Quốc Gia năm 1995-1996.Bảng A)*

Hãy biện luận số nghiệm thực của hệ phương trình với ẩn *x, y* :

$$\begin{cases} x^3y - y^4 = a^2 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = b^2 \end{cases}$$

Giải . Điều kiện có nghĩa của hệ : $x, y \in R$.

Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} y(x^3 - y^3) = a^2 & (1) \\ y(x+y)^2 = b^2 & (2) \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau :

★ *Trường hợp 1 :* $b = 0$. Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x \end{array}\right. \text{ và do vậy : Hệ đã cho } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = 0 \\ y(x^3 - y^3) = a^2 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} y = -x \\ y(x^3 - y^3) = a^2 \end{cases} & (II) \end{array}\right.$$

Có (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x^4 = a^2 \end{cases}$

Từ đó : + Nếu $a \neq 0$ thì (I) và (II) cùng vô nghiệm, dẫn đến hệ vô nghiệm .

+ Nếu $a = 0$ thì (I) có vô số nghiệm dạng $(x \in R,\ y = 0)$, còn (II) có duy nhất nghiệm $(x = 0,\ y = 0)$. Vì thế hệ đã cho có vô số nghiệm .

★ *Trường hợp 2 :* $b \neq 0$. Khi đó, từ (1) và (2) dễ thấy , nếu $(x,\ y)$ là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x, y > 0$. Vì thế $(2) \Leftrightarrow x = \frac{|b|}{\sqrt{y}} - y \quad (3)$.

Thế (3) vào (1) ta được : $y\left[\left(\frac{|b|}{\sqrt{y}} - y\right)^3 - y^3\right] = a^2$

Đặt $\sqrt{y} = t > 0$. Từ (4) ta có phương trình sau :

$$t^2\left[\left(\frac{|b|}{t} - t^2\right)^3 - t^6\right] = a^2 \Leftrightarrow t^9 - \left(|b| - t^3\right)^3 + a^2 t = 0 \quad (5)$$

Xét hàm số : $\mathrm{f}(t) = t^9 - \left(|b| - t^3\right)^3 + a^2 t$ xác định trên $[0; +\infty)$ có :

$\mathrm{f}'(t) = 9t^8 + 9\left(|b| - t^3\right)^2 t^2 + a^2 \geq 0,\ \forall t \in [0; +\infty)$.

Suy ra hàm số $\mathrm{f}(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, và vì thế phương trình (5) có tối đa 1 nghiệm trong $[0; +\infty)$. Mà $\mathrm{f}(0) = -|b|^3 < 0$ và $\mathrm{f}\left(\sqrt[3]{|b|}\right) = |b|^3 + |b| a^2 > 0$, nên phương trình (5) có duy nhất nghiệm, kí hiệu là t_0 trong $(0;\ +\infty)$. Suy ra hệ có duy nhất nghiệm $\left(x = \frac{|b|}{t_0} - {t_0}^2,\ y = {t_0}^2\right)$.

Vậy tóm lại : + Nếu $a = b = 0$ thì hệ đã cho có vô số nghiệm .

+ Nếu a tuỳ ý , $b \neq 0$ thì hệ đã cho có duy nhất nghiệm .

+ Nếu $a \neq 0, b = 0$ thì hệ đã cho vô nghiệm .

✍ **4**. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = m \end{cases}$ (1) có nghiệm .

Giải . + Với $y = 0$ hệ trở thành $\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x^2 = m \end{cases}$. Hệ có nghiệm khi $m = \frac{1}{2}$

+ Với $y \neq 0$, đặt $\frac{x}{y} = t$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = \frac{m}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = m\left(2t^2 + t - 1\right) \end{cases} \quad (2)$$

Vậy hệ PT (1) có nghiệm $(x,\ y)$ khi và chỉ khi hệ PT (2) có nghiệm $(t,\ y)$.

Xét hệ (2), từ $2t^2+t-1=\frac{1}{y^2}$ suy ra $2t^2+t-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Do đó hệ (2) có nghiệm $(t,\ y)$

$\Leftrightarrow m=\frac{t^2+t+1}{2t^2+t-1}$ có nghiệm $t\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. Xét hàm số $\mathrm{f}(t)=\frac{t^2+t+1}{2t^2+t-1}$ trên khoảng $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. Ta có : $\mathrm{f}'(t)=-\frac{t^2+6t+2}{\left(2t^2+t-1\right)^2}$, $\mathrm{f}'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3-\sqrt{7} \\ t=-3+\sqrt{7} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên :

t	$-\infty$		$-3-\sqrt{7}$		-1		$-3-\sqrt{7}$		$\frac{1}{2}$		$-\infty$
f'(t)		-	0	+	‖	+	0	-	‖		
f(t)	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy để hệ có nghiệm : $m\geq\frac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}$.

✍ **5.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 & (1) \\ x\left(y^3-2\right)=3 & (2) \end{cases}$

Giải . Rõ ràng nếu $y=\sqrt[3]{2}$ hệ vô nghiệm.

Với $y\neq\sqrt[3]{2}$, từ (2) suy ra $x=\frac{3}{y^3-2}$, thay vào (1) ta có :

$\frac{27(2+3y)}{\left(y^3-2\right)^3}=1$ (3) . Xét hàm số : $\mathrm{f}(y)=\frac{27(2+3y)}{\left(y^3-2\right)^3}-1$, ta có : $\mathrm{f}'(y)=-\frac{81\left(8y^3+6y^2+2\right)}{\left(y^3-2\right)^3}$

Suy ra : $\mathrm{f}'(y)=0 \Leftrightarrow y=-1$

Ta có bảng biến thiên :

y	$-\infty$		-1		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
f'(y)		+	0	-	‖	-	
f (y)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên suy ra pt(3) không có nghiệm trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(-1;\sqrt[3]{2}\right)$.

Phương trình có 1 nghiệm $y=-1$ và 1 nghiệm trong khoảng $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$

Dễ thấy $y=2$ là 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $(-1;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

☞ **6.** (*Đề thi HSG Quốc Gia năm 2004 –Bảng B*)

Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$

✍ **7**. (*Đề thi HSG Quốc Gia năm 1998-1999 –Bảng A*)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right).5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0 \end{cases}$

Giải . ĐK: $y^2+2x>0$

Đặt $t=2x-y$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành :

$$\left(1+4^t\right).5^{1-t}=1+2^{t+1} \Leftrightarrow \frac{1+4^t}{5^t}=\frac{1+2^{t+1}}{5} \quad (1)$$

Vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến trên nên t=1 là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy $2x-y=1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{2}$ thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$y^3+2y+3+\ln\left(y^2+y+1\right)=0 \quad (2)$$

Vế trái là hàm đồng biến do đó y =-1 là nghiệm duy nhất của (2).

Đáp số : $x=0,\quad y=-1$.

✍ **8**. (*Đề thi HSG Quốc Gia năm 2000-2001 –Bảng B*)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 \end{cases}$

Giải : ĐK có nghĩa của hệ phương trình : $\min\{7x,2x\}\ge -y$

Đặt : $\sqrt{7x+y}=a$ và $\sqrt{2x+y}=b$. Từ hệ phương trình đã cho ta có hệ :

$$\begin{cases} a+b=5 & (1) \\ b+x-y=2 & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy : $a^2-b^2=5x$. Kết hợp với (1) suy ra : $b=\frac{(5-x)}{2}$, thế vào (2) ta được :

$$\frac{5-x}{2}+x-y=2 \Leftrightarrow x=2y-1 \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta có : $\sqrt{5y-2}+y-1=2 \Rightarrow y=\frac{11-\sqrt{77}}{2}$

Thế vào (3) suy ra nghiệm của hệ là: $x=10-\sqrt{77},\quad y=\frac{11-\sqrt{77}}{2}$.

☞ **9**. Cho hệ phương trình 2 ẩn x, y :

$$\begin{cases} k\left(x^2+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)=yx \\ k\left(\sqrt[3]{x^8}+x^2+\sqrt[3]{x^2}+1\right)+(k-1)\sqrt[3]{x^4}=2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

1. Xác định k để hệ phương trình có nghiệm .
2. Giải hệ phương trình với $k = 16$.

✍ 10. (*Đề thi HSG Quốc Gia năm 1995-1996 –Bảng A*)

Giải hệ phương trình : $$\begin{cases} \sqrt{3x}.\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}.\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$$

Giải . ĐK có nghĩa của hệ : $x\ge 0,\ y\ge 0$ và $x^2+y^2\ne 0$.

Dễ thấy , nếu (x,y) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x>0,\ y>0$. Do đó :

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ \left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (1) \\ 1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với (2) theo vế ta được :

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{3x}-\frac{8}{7y}\Leftrightarrow 21xy=(x+y)(7y-3x)\Leftrightarrow (y-6x)(7y+4x)=0\Leftrightarrow y=6x \ \text{(vì } x>0,\ y>0)$$

Thay vào (2) và giải ra ta được : $x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21},\ y=\dfrac{22+8\sqrt{7}}{7}$ .Thử lại ta thấy thoả mãn yêu cầu bt.

III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH 3 ẨN.

☞ **1**. (*Đề thi HSG Tỉnh Quảng Ngãi 1995-1996*)

Giải hệ phương trình : $$\begin{cases} y^3-6x^2+12x-8=0 \\ z^3-6y^2+12y-8=0 \\ x^3-6z^2+12z-8=0 \end{cases}$$

☞ **4.** Giải hệ phương trình : $$\begin{cases} 12x^2-48x+64=y^3 \\ 12y^2-48y+64=z^3 \\ 12z^2-48z+64=x^3 \end{cases}$$

✍ **5.** Giải hệ phương trình : $$\begin{cases} x^{19}+y^5=1890z+z^{2001} \\ y^{19}+z^5=1890x+x^{2001} \\ z^{19}+x^5=1890y+y^{2001} \end{cases}$$

Giải . Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $x=y=z=0$.

Giả sử $(x,\ y,\ z)$ là một nghiệm của hệ phương trình khi đó $(-x, -y,\ -z)$ cũng là một nghiệm của hệ phương trình , nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết : có ít nhất hai trong ba số $x,\ y,\ z$ không âm. Ví dụ $x \ge 0,\ y \ge 0$. Từ phương trình thứ nhất ta suy ra $z \ge 0$.

Mặt khác nếu $0 < u \le 1$ thì $1890 + u^{2000} > 2 \ge u^{18} + u^4$

Nếu $u > 1$ thì $1890 + u^{2000} > 1 + u^{2000} > 2.\sqrt{u^{2000}} = 2.u^{1000} > u^{18} + u^4$

Do đó $1890u + u^{2001} > u^{19} + u^5$ với mọi u>0.

Bởi vậy nếu cộng từng vế của HPT ta suy ra $x = y = z = 0$.đpcm

☞ **6**. Tìm điều kiện cần và đủ của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 = (2+m)y^3 - 3y^2 + my \\ y^2 = (2+m)z^3 - 3z + mz \\ z^2 = (2+m)x^3 - 3x + mx \end{cases}$$

✍ **7.** (*Đề thi HSG Quốc Gia năm 2004 –Bảng A*)

Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$

✍ **8**. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$

Giải . Viết lại hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \quad hay \quad \begin{cases} \mathrm{f}(x) = g(y) \\ \mathrm{f}(y) = g(z) \\ \mathrm{f}(z) = g(x) \end{cases}$$

Trong đó $\mathrm{f}(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $\mathrm{g}(t) = 2t^3 + 1$. Nhận xét rằng g(t), f(t) là hàm đồng biến trên R vì : $\mathrm{f}'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0,\ \mathrm{g}(t) = 6t^2 \ge 0,\ \forall t \in \mathrm{R}$.

Suy ra hệ đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases} x = y = z \\ \mathrm{h}(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$

Trong đó $\mathrm{h}(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$. Nhận xét rằng $\mathrm{h}(t)$ liên tục trên R và : $\mathrm{h}(-2) < 0,\ \mathrm{h}(0) > 0,$ $\mathrm{h}(1) < 0,\ \mathrm{h}(2) > 0$ nên phương trình $\mathrm{h}(t) = 0$ có cả 3 nghiệm phân biệt đều nằm trong $(-2;\ 2)$

Đặt $x = 2\cos u,\ u \in (0;\ \pi)$. Khi đó $\sin u \ne 0$ và (4) có dạng :

$$\begin{cases} x = y = z = 2\cos u,\ u \in (0;\ \pi) \\ 8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = y = z = 2\cos u,\ u \in (0;\ \pi) \\ \sin u\left(8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1\right) = 0 \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} x = y = z = 2\cos u,\ u \in (0;\ \pi) \\ \sin 4u = \sin 3u \end{cases}$ (5).

Giải hệ phương trình (5) ta thu được $u\in\left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right\}$ và $\begin{cases} x=y=z=2\cos u,\ u\in(0;\pi) \\ u\in\left\{\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}\right\}\end{cases}$

✍ **9**. Tìm tất cả các bộ ba số dương $(x,\ y,\ z)$ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^{2004}=y^6+z^6 \\ 2y^{2004}=z^6+x^6 \\ 2z^{2004}=x^6+y^6 \end{cases}$$

Giải :

Giả sử $(x,\ y,\ z)$ là một bộ ba số dương thoả mãn hệ PT đã cho . Không mất tính tổng quát , giả sử $0<x\le y\le z$. Như vậy :

$$\begin{cases} 2x^{2004}=y^6+z^6\ge x^6+x^6 \\ 2z^{2004}=x^6+y^6\le z^6+z^6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^{2004}\ge x^6 \\ z^{2004}\le z^6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\ge 1 \\ z\le 1 \end{cases}\Rightarrow x=y=z=1$$

Đảo lại, dễ thấy $x=y=z=1$ là một bộ ba số dương thoả mãn yêu cầu bài toán .

☞ **10**. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2+xy-yz-zx=1 \\ y^2+z^2+yz=2 \\ x^2+z^2+xz=m \end{cases}$$

☞ **11**. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^5-x^4+2x^2y=2 \\ y^5-y^4+2y^2z=2 \\ z^5-z^4+2z^2x=2 \end{cases}$

☞ **12**. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3\left(y^2+3y+3\right)=3y^2 \\ y^3\left(z^2+3z+3\right)=3z^2 \\ z^3\left(x^2+3x+3\right)=3x^2 \end{cases}$

✍ **13**. Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực *x, y, z* :

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=a-1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=a+1 \end{cases}$$

Giải. ĐK: $x\ge 1,\ y\ge 1,\ z\ge 1$

Hệ phương trình tương đương với hệ phương trình :

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}\right)+\left(\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1}\right)=2a \\ \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}\right)+\left(\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1}\right)=2 \end{cases}$$

Đặt $u=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$; $v=\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}$; $s=\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1}$

Do $x\ge 1,\ y\ge 1,\ z\ge 1$ nên $u\ge\sqrt{2},\ v\ge\sqrt{2},\ s\ge\sqrt{2}$. Ngược lại nếu $u\ge\sqrt{2},\ v\ge\sqrt{2},\ s\ge\sqrt{2}$, ta có :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{u}\ \Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\left(u+\frac{2}{u}\right)\Rightarrow x=\frac{1}{4}\left(u^2+\frac{4}{u^2}\right)\ge 1$$

Tương tự đối với y, z .

Do đó bài toán của ta đưa về bài toán tương đương : Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm $u \ge \sqrt{2},\ v \ge \sqrt{2},\ s \ge \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} u+v+s=2a \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{s}=1 \end{cases} \quad (1)$$

+ ***Điều kiện cần*** : Giả sử hệ phương trình (1) có nghiệm . Theo bất đẳng thức Bunhia ta có :

$$2a=(u+v+s)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{s}\right)\ge 9 \Rightarrow a\ge \frac{9}{2}$$

+ ***Điều kiện đủ*** : Giả sử $a \ge \dfrac{9}{2}$. Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình (1) có nghiệm

Lấy $s=3$ (thoả mãn $s \ge \sqrt{2}$) . Khi đó (1) tương đương với : $\begin{cases} u+v=2a-3 \\ u.v=\dfrac{3(2a-3)}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow u,\ v$ là hai nghiệm của tam thức bậc hai : $t^2-2(2a-3)t+\dfrac{3(2a-3)}{2}$

$$\Rightarrow u,v=\frac{2a-3\pm\sqrt{(2a-3)(2a-9)}}{2}$$

Chú ý : Đặt $h=2a-9\ge 0 \Rightarrow \left(h+6-2\sqrt{2}\right)^2 > (h+3)^2 > h(h+6)$. Tức là :

$(2a-3)-2\sqrt{2} > \sqrt{(2a-3)(2a-9)} \quad \Rightarrow u>\sqrt{2},\ v>\sqrt{2}$.

Như vậy hệ phương trình (1) có nghiệm $u\ge\sqrt{2},\ v\ge\sqrt{2},\ s\ge\sqrt{2}$.

Tóm lại các số thực a cần tìm là tất cả các số thực $a \ge \dfrac{9}{2}$.

✍ **14**. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 20\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=11\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=2007\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$$

✍ **15**. (*Đề thi HSG Quốc Gia năm 2005-2006 –Bảng A*)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x)=z \end{cases}$

Giải . ĐK xác định $x,y,z<6$. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} \log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} & (1) \\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} & (2) \\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} & (3) \end{cases}$$

Nhận thấy $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ là hàm tăng, còn $\mathrm{g}(x)=\log_3(6-x)$ là hàm giảm với $x<6$.

Nếu $(x,\ y,\ z)$ là một nghiệm của hệ phương trình ta chứng minh $x=y=z$.Không mất tính tổng quát giả sử $x=\max\{x,y,z\}$ thì có hai trường hợp :

1) $x\ge y\ge z$. Do $\mathrm{g}(x)$ là hàm giảm, suy ra : $\log_3(6-y)\ge\log_3(6-z)\ge\log_3(6-x)$

$\Rightarrow x\ge z\ge y$. Do $y\ge z$ nên $z=y$. Từ (1) và (2) suy ra : $x=y=z$.

2) $x\ge z\ge y$.

Tương tự $\log_3(6-y)\ge\log_3(6-x)\ge\log_3(6-z)$

$\Rightarrow z\ge x\ge y$. Do $x\ge z$ nên $z=x$. Từ (1) và (3) suy ra : $x=y=z$.

Phương trình $\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}(x)$ có nghiệm duy nhất $x=3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất : $x=y=z=3$.

✍ **16**. (*Đề thi HSG Quốc Gia năm 2005-2006 –Bảng B*)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5=y \\ y^3+3y^2+2y-5=z \\ z^3+3z^2+2z-5=x \end{cases}$

Giải . Giả sử $x=\max\{x,y,z\}$. Xét hai trường hợp :

1) $x\ge y\ge z$

Từ hệ trên ta có : $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5\le x \\ z^3+3z^2+2z-5\ge z \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} (x-1)\left[(x+2)^2+1\right]\le 0 \\ (z-1)\left[(z+2)^2+1\right]\ge 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\le 1 \\ 1\le z \end{cases}$$

2) $x\ge z\ge y$

Từ hệ trên ta có : $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5\le x \\ y^3+3y^2+2y-5\ge y \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} (x-1)\left[(x+2)^2+1\right]\le 0 \\ (y-1)\left[(y+2)^2+1\right]\ge 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\le 1 \\ 1\le y \end{cases}$$

Cả hai trường hợp đều cho $x=z=y=1$. Thử lại ta thấy $x=z=y=1$ là nghiệm của hệ phương trình . Tóm lại hệ đã cho có nghiệm duy nhất : $x=z=y=1$.

☞ **17**. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{z}}=\dfrac{8}{3} \\ x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{118}{9} \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{y\sqrt{y}}-\dfrac{1}{z\sqrt{z}}=\dfrac{728}{27} \end{cases}$$

✍ **18** . Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+y^2=-y(x+z) \\ x^2+x+y=-2yz \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz=2x+4z+2 \end{cases}$$

Giải . Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x(x+y)+y(y+z)=0 \\ x(x+1)+y(2z+1)=0 \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2=(x+1)^2+(2z+1)^2 \end{cases}$$

Xét : $\vec{a}=(x;\ y),\ \vec{b}=(x+y;\ y+z),\ \vec{c}=(x+1;\ 2z+1)\ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0,\ \vec{a}.\vec{c}=0,\ 4\vec{b}^2=\vec{c}^2$

+ Nếu $\vec{a}=\vec{0}$ thì $x=y=0,\ z=-\dfrac{1}{2}$.

+ Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$ thì $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cộng tuyến nên : $\vec{c}=\pm2\vec{b}$, từ đó ta có : $x=0,\ y=z=\dfrac{1}{2}$.

Tóm lại hệ có hai nghiệm : $\left(0;\ 0;\ -\dfrac{1}{2}\right),\ \left(0;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH n ẨN. (n >3, n∈**N**)

✍ **1**. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3^{1996} \\ x_2+x_3=x_4^{1996} \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ x_{1995}+x_{1996}=x_1^{1996} \\ x_{1996}+x_1=x_2^{1996} \end{cases}$$

Giải : Gọi X là giá trị lớn nhất của các nghiệm x_i, $i=1,\ldots1996$ và Y là giá trị bé nhất của chúng. Thế thì từ phương trình đầu ta có :

$$2\text{X}\geq x_1+x_2=x_3^{1996}$$

Từ đó đối với các phương trình của hệ ta có : $2\text{X}\geq x_k^{1996}$, $\forall k=1,2,\ldots..,1996$

Hay là ta có : $2\text{X}\geq \text{X}^{1996}$ suy ra : $2\geq \text{X}^{1995}$ (vì X >0) (1)

Lập luận một cách tương tự ta cũng đi đến : $2\leq \text{Y}^{1995}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\text{X}^{1995}=\text{Y}^{1995}=2$

Nghĩa là ta có : $x_1=x_2=\ldots.=x_{1996}=\sqrt[1995]{2}$

✍ **2**. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x_1-a_1}{b_1}=\dfrac{x_2-a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{x_n-a_n}{b_n} \\ x_1+x_2+\ldots.+x_n=c \end{cases}$

với $b_1,b_2,\ldots,b_n\neq0,\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i\neq0$

Giải . Đặt : $\dfrac{x_1 - a_1}{b_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{b_2} = ... = \dfrac{x_n - a_n}{b_n} = t$

Ta có : $x_i = tb_i + a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + t\sum_{i=1}^{n} b_i \quad \Rightarrow c = \sum_{i=1}^{n} a_i + t\sum_{i=1}^{n} b_i \ \Rightarrow t = \dfrac{\left(c - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$

$$\Rightarrow x_i = a_i + b_i \dfrac{\left(c - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$