Mục lục

1 Các bài toán Đại số và Lượng giác **2**

1.1 Các đẳng thức Đại số thuần tuý 2

1.2 Các đẳng thức Lượng giác 15

1.3 Phương trình và bất phương trình 30

Chương 1

Các bài toán Đại số và Lượng giác

1.1 Các đẳng thức Đại số thuần tuý

1. Chứng minh rằng

   $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2) = (ax-by-cz-dt)^2+(bx+ay-dz+ct)^2+(cx+dy+az-dt)^2+(dx-cy+bz+at)^2$

2. Chứng minh rằng từ các đẳng thức $ax-by-cz-dt=0$, $bx+ay-dz+ct=0$, $cx+dy+az-dt=0$, và $dx-cy+bz+at=0$ ta suy ra rằng hoặc $a=b=c=d=0$ hoặc $x=y=z=t=0$.

3. Chứng minh rằng ta có đồng nhất sau

   $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 = (bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$

4. Chứng minh rằng các đồng nhất nói trong các bài toán trước có thể mở rộng như sau

   $$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 =$$
   $$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\cdots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2$$

5. Giả sử rằng $n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$. Chứng minh rằng $a_1=a_2=\cdots=a_n$

6. Chứng minh rằng từ đẳng thức $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$ ta suy ra rằng $x=y=z$

7. Chứng minh các đồng nhất thức sau

   $$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a+b)^2$$

   $$(6a^2-4ab+4b^2)^3=(3a^2+5ab-5b^2)^3+(4a^2-4ab+6b^2)^3+(5a^2-5ab-3b^2)^3$$

8. Chứng minh rằng

$$(p^2-q^2)^4+(2pq+q^2)^4+(2pq+p^2)^4=2(p^2+pq+q^2)^4$$

9. Chứng minh rằng $X^2+XY+Y^2=Z^3$ nếu $X=q^3+3pq^2-p^3$, $Y=-3pq(p+q)$, và $Z=p^2+pq+q^2$

10. Chứng minh rằng

$$(3a+3b)^k+(2a+4b)^k+a^k+b^k=(3a+4b)^k+(a+3b)^k+(2a+b)^k$$

với $k=1,2,3$.

11. Chứng minh rằng nếu $x+y+z=0$ thì

$$(ix-ky)^n+(iy-kz)^n+(iz-kx)^n=(iy-kx)^n+(iz-ky)^n+(ix-kz)^n$$

khi $n=0,1,2,4$ trong đó i là đơn vị ảo, ie... $i^2=-1$.

12. Chứng minh rằng $x^n+(x+3)^n+(x+5)^n+(x+6)^n+(x+9)^n+(x+10)^n+(x+12)^n+(x+15)^n=(x+1)^n+(x+2)^n+(x+4)^n+(x+7)^n+(x+8)^n+(x+11)^n+(x+13)^n+(x+14)^n$ khi mà $n=0,1,2,3$

13. Chứng minh các đồng nhất thức sau đây

    i. $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$

    ii. $(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2(ab-bc+dc+ad)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(ab-ad+bc+dc)^2$

    iii. $(a^2-c^2+2bd)^2+(d^2-b^2+2ac)^2=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2(ab-bc+dc+ad)^2$

14. Chứng minh đồng nhất thức sau đây

$$(a+b+c)^4+(a+b-c)^4+(a-b+c)^4+(-a+b+c)^4=4(a^4+b^4+c^4)+24(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

15. Cho $s=a+b+c=2p$. Chứng minh rằng

$$\sum_{sym} s(s-2b)(s-2c)=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc$$

$$\sum_{sym} a(p-a)^2=abc-2(p-a)(p-b)(p-c)$$

16. Cho $s=a+b+c$ và $2\delta=a^2+b^2+c^2$. Chứng minh rằng

$$\sum_{sym}(\delta^2-a^2)(\delta^2-b^2)=4s(s-a)(s-b)(s-c)$$

17. Chứng minh rằng nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$

Bài giải. Hãy chú ý rằng ta có đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

18. Cho các số a,b,c . Đơn giản biểu thức sau đây

$$(a+b+c)^3-\sum_{sym}(a+b-c)^3$$

19. Chứng minh rằng

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$$

20. Cho $a+b+c=0$, chứng minh rằng ta có các đẳng thức sau đây

- $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$
- $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=abc\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$
- $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$
- $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$
- $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{4}$.

21. Cho $2n$ số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ và $b_1,b_2,\ldots,b_n$ và giả sử rằng $s_k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$ với $k=1,2,...,n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})s_k$$

theo modulo n (**Khai triển Abel**).

22. Giả sử rằng $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n}{2}s$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n}(s-a_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$$

23. Cho đa thức hai biến dạng $Ax^2+2Bxy+Cy^2$. Chứng minh rằng qua phép đổi biến $x=\alpha u+\beta v$ và $y=\gamma u+\delta v$ đa thức trên có thể viết lại ở dạng $Mu^2+2Nuv+Pv^2$ với $N^2-MP=(B^2-AC)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$. Hãy mở rộng bài toán cho các dạng bậc hai nhiều chiều.

24. Cho $2n$ số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ thoả mãn $a_i + b_i = 1$ và

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$b = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = nab - (a_1 - a)^2 - (a_2 - a)^2 - \cdots - (a_n - a)^2$$

25. Chứng minh rằng

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

26. Chứng minh rằng

$$(1+\frac{1}{x-1})(1-\frac{1}{2x-1})(1+\frac{1}{3x-1})\cdots(1+\frac{1}{(2n-1)x-1})(1-\frac{1}{2nx-1}) =$$

$$= \frac{(n+1)x}{(n+1)x-1} \cdot \frac{(n+2)x}{(n+2)x-1} \cdots \frac{(n+n)x}{(n+n)x-1}$$

27. Chứng minh rằng

$$x^3 = (x \cdot \frac{x^3 - 2y^3}{x^3 + y^3})^3 + (y \cdot \frac{2x^3 - y^3}{x^3 + y^3})^3$$

28. Chứng minh đồng nhất thức sau đây

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \cdots + \frac{20}{x^2-100}$$

$$= 11\left(\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \cdots + \frac{1}{(x-10)(x+1)}\right)$$

29. Chứng minh rằng từ đẳng thức

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ta suy ra đẳng thức

$$\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

30. Giả sử rằng

$$x = \frac{a-b}{a+b}; y = \frac{b-c}{b+c}; z = \frac{c-a}{c+a}$$

Chứng minh rằng

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

31. Chứng minh rằng từ đẳng thức

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

suy ra đẳng thức

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

32. Giả sử rằng $ax + by + cz = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c}$$

33. Chứng minh tính đúng đắn của đẳng thức sau đây

$$\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2-a^2)(y^2-a^2)(z^2-a^2)}{a^2(a^2-b^2)} + \frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-a^2)}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2$$

34. Giả sử rằng

$$S_k = \frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$$

Chứng minh rằng $S_{-2} = \frac{1}{abc} \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}); S_{-1} = \frac{1}{abc}; S_0 = S_1 = 0; S_2 = a+b+c; S_4 = ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2; S_5 = a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$

35. Giả sử rằng

$$S_k = \sum_{cyclic} \frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

Chứng minh rằng $S_0 = S_1 = S_2 = 0; S_3 = 1; S_4 = a+b+c+d$

36. Giả sử rằng

$$S_k = \sum_{cyclic} a^k \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}$$

Hãy xác định S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 .

37. Chứng minh rằng ta có đồng nhất thức sau đây

$$\sum_{cyclic} ab\frac{(c-x)(c-y)(c-z)}{(c-a)(c-b)} = abc - xyz$$

38. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyclic} \frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} = abc + bcd + cda + dab$$

39. Hãy làm đơn giản biểu thức sau đây

$$\sum_{cyclic} \frac{a^k}{(a-b)(a-c)(x-a)}$$

với $k = 1, 2$.

40. Chứng minh đồng nhất thức sau đây

$$\sum_{cyclic} \frac{b+c+d}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)} = \frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

41. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyclic} a^k \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^k$$

với $k = 0, 1, 2$

42. Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$ thì

$$(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b})(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}) = 9$$

43. Hãy chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{c-a}{c+a} = 0$$

44. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyclic} \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = 2\sum_{sym} \frac{1}{a-b}$$

45. Cho

$$\sum_{sym} \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1$$

Chứng minh rằng hai trong ba phân thức bằng 1 và phân thức còn lại bằng -1

46. Chứng minh rằng từ đẳng thức

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương lẻ n ta có đẳng thức

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$$

47. Chứng minh rằng từ đẳng thức

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)}=\frac{cx+az}{y(ax-by+cz)}=\frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}$$

suy ra

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

48. Cho

$$a+b+c=x+y+z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

Chứng minh rằng

$$xa^2+by^2+cz^2=0$$

49. Cho $a^3+b^3+c^3=(b+c)(c+a)(a+b)$ và $(b^2+c^2-a^2)x=(c^2+a^2-b^2)y=(a^2+b^2-c^2)z$. Chứng minh rằng

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)(y+z)(z+x)$$

50. Cho

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{(z-x)^2+z^2}{(z-y)^2+z^2}=\frac{x^2}{y^2}$$

51. Chứng minh rằng tổng ba phân số

$$\frac{b-c}{1+bc},\frac{c-a}{1+ca},\frac{a-b}{1+ab}$$

bằng tích của chúng .

52. Chứng minh rằng đẳng thức sau đây

$$\sum_{cyclic} a^k\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=x^k$$

với $k=0,1,2,3$.

53. [HongKong TST 2004] Đặt $x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$. Hãy xác định giá trị của biểu thức
$$(1 + \frac{1}{x})^3$$

54. Chứng minh các đồng nhất thức sau đây

- $(a+b+c)(bc+ca+ab) = abc + (b+c)(c+a)(a+b)$
- $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) + (a+bc)(b+ca)(c+ab) = (abc+1)(a^2+b^2+c^2+2abc-1)$
- $(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 - 4(a^3+b^3+c^3-3abc) = 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
- $\sum_{cyclic} a^4(b^2-c^2) = (\sum_{cyclic} a^2(b-c))(a+b)(b+c)(c+a)$
- $a^5 + b^5 - (a+b)^5 = -5ab(a^2+ab+b^2)$
- $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

55. Chứng minh rằng nếu $xy + yz + zx = 0$ thì
$$\prod_{sym}(x+y)^2 + 24x^2y^2z^2 = \sum_{sym} x^4(y+z)^2$$

56. Chứng minh rằng từ đẳng thức $xy + yz + zx = 1$ ta nhận được đẳng thức
$$\sum_{sym} \frac{x}{1-x^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

57. Đặt
$$f(a,b,c) = |\frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c}| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c}$$
Chứng minh rằng
$$f(a,b,c) = 4max\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\}$$

58. Chứng minh rằng nếu
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$
thì ta có đẳng thức
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

59. Hãy tìm các giá trị có thể nhận của biểu thức
$$\frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$
nếu biết rằng
$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

60. Chứng minh rằng từ đẳng thức $x+y=z+t$ ta suy ra đẳng thức
$$x^2+y^2+z^2+t^2=(x+y)^2+(x-z)^2+(x-t)^2$$

61. Cho $ab+bc+ca=1$, chứng minh rằng ta có đẳng thức
$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$$

62. Cho ba số a,b,c thoả mãn $b\neq c$, $a+b\neq c$ và $c^2+2(ab-bc-ca)=0$. Chứng minh rằng ta có đẳng thức sau đây
$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$$

63. Chứng minh rằng nếu
$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$$
thì ta có đẳng thức
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$$

64. Cho các số thực x,y,z thoả mãn
$$xy+yz+zx=0, a=\sqrt{y^2+yz+z^2}$$
$$b=\sqrt{z^2+zx+x^2}, c=\sqrt{x^2+xy+y^2}$$
Chứng minh rằng ta có đẳng thức
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$$

65. Cho bốn số thực a,b,c,d thoả mãn đẳng thức $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$. Chứng minh rằng
$$(ab+cd)(ad+bc)=(ac+bd)(a^2-ac+c^2)$$

66. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3=1$. Chứng minh rằng $a+b^2+c^3=1$.

67. Cho bốn số dương a,b,c,d thoả mãn $a+b^2=c+d^2, a^2+b=c^2+d$. Chứng minh rằng nếu $a+b+c+d\leq 2$ thì $\{a,b\}=\{x,y\}$

68. Giả sử rằng a,b,c,d là bốn số thực thoả mãn đẳng thức $a+b+c+d=a^7+b^7+c^7+d^7=0$. Chứng minh rằng
$$(a+b)(a+c)(a+d)=0$$

69. Chứng minh đồng nhất thức sau đây

$$\sum_{cyclic} a^k \frac{(a-x)(a-y)}{(a-b)(a-c)} = \frac{xy}{abc}$$

70. Chứng minh các đồng nhất thức sau đây

- $\sum_{cyclic} x(y+z)^2 - 4xyz = (x+y)(y+z)(z+x)$
- $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$
- $(ab+bc+ca)(a+b+c) - abc = (a+b)(b+c)(c+a)$
- $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2 - x^5 = (1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$

71. Chứng minh rằng từ đẳng thức

$$a+b(1+a)+c(1+a)(1+b)+\cdots+l(1+a)(1+b)\cdots(1+k) = (1+a)(1+b)\cdots(1+l)-1$$

ta suy ra rằng $a = b = c = \cdots = l$.

72. Cho $a+b+c=0$, chứng minh rằng ta có đẳng thức sau đây

$$(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c})(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}) = 9$$

73. Chứng minh đẳng thức sau đây

$$\frac{a^{2^{k+1}} - b^{2^{k+1}}}{a-b} = (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{2^k}+b^{2^k})$$

74. [HongKong TST 1990] Giả sử rằng a, b, c, d là bốn số thực thoả mãn hệ

$$\begin{cases} a + 4b + 9c + 16d = 1 \\ 4a + 9b + 16c + 25d = 12 \\ 9a + 16b + 25c + 36d = 123 \end{cases}$$

Hãy xác định giá trị của biểu thức $16a + 25b + 36c + 49d$.

75. [HongKong TST 1993]Cho các số dương a, b, c thoả mãn

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$$

Hãy xác định giá trị của

$$\frac{a+b+c}{a+b-c}$$

76. Cho các số thực dương a, b, c, d satisfying the conditions

$$\frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{d} = \frac{1}{b+d}$$

$$a^2 + c^2 = 1$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^{2004}}{b^{1002}} + \frac{b^{2004}}{d^{1002}} = \frac{2}{(b+d)^{1002}}$$

77. Chứng minh rằng nếu $xyz = 1$ thì ta có

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$$

78. Chứng minh rằng

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

79. Chứng minh tính đúng đắn của các hệ thức sau đây

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

80. Giả sử rằng ta có

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$$

81. Chứng minh rằng nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì ta có hệ thức

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$

82. Cho bốn số thực a, b, c, d thoả mãn các điều kiện $abcd = 1$ và

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

Chứng minh rằng có thể chia bốn số đó ra thành hai cặp, mỗi cặp hai số mà tích của chúng bằng 1.

83. Chứng minh các đẳng thức sau đây

(a) $\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=1-\sqrt{5}$

(b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{14-5\sqrt{3}}=3\sqrt{2}$

(c) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}=3$

84. Rút gọn các biểu thức dưới đây

(a) $\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6}$

(b) $\sqrt[3]{7+\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{55}{3}}}+\sqrt[3]{7-\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{55}{3}}}$

(c) $\sqrt{5+\sqrt{17+2\sqrt{7}}}+\sqrt{5+\sqrt{17-2\sqrt{7}}}+\sqrt{5-\sqrt{17+2\sqrt{7}}}-\sqrt{5+\sqrt{17-2\sqrt{7}}}$

(d) $\sqrt[4]{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}}+\sqrt[4]{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}$

85. Cho các số thực a, b, c thoả mãn đẳng thức

$$\frac{a}{2002}=\frac{b}{2003}=\frac{c}{2004}$$

Chứng minh rằng $4(a-b)(b-c)=(c-a)^2$.

86. Cho các số x, y khác không thoả mãn $x^2+xy+y^2=0$. Hãy xác định giá trị của biểu thức

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2001}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2001}$$

87. Cho n là một số nguyên dương và $2n+1$ số được lấy từ tập hợp $\{2,5,9\}$ thoả mãn nếu ta viết chúng ở dạng dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ thì hai số liên tiếp bất kì đều khác nhau và $a_{2n+1}=a_1$. Chứng minh rằng

$$a_1a_2-a_2a_3+\cdots+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1}=0$$

88. Cho các số $a, b, c \in \mathbb{R}$ thoả mãn đẳng thức

$$\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0$$

89. Cho n là một số nguyên dương và n số thực $x_1, \ldots, x_n$. Với mỗi k nguyên dương đặt $S_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$. Chứng minh rằng nếu $S_2 = S_3 = S_4$ thì $S_k = S_1$ với mọi k.

90. Cho hai số thực x, y thoả mãn
$$(\sqrt{x^2+3}+x)(\sqrt{y^2+3}+y) = 1$$
Chứng minh rằng $x + y = 0$.

91. Cho các số thực x, y, z thoả mãn $xyz(x+y+z) = 1$. Chứng minh rằng
$$(x+y)(y+z)(z+x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + (x+z)xz$$

92. **(Proposed by Hà Duy Hưng)** Cho sáu số thực a, b, c, d, e, f thoả mãn hệ phương trình
$$\begin{cases} |d+e-a-b| = \sqrt{3}\cdot\big(|b-a|+|e-d|\big) \\ |e+f-b-c| = \sqrt{3}\cdot\big(|c-b|+|e-f|\big) \\ |f+a-c-d| = \sqrt{3}\cdot\big(|c-d|+|f-a|\big) \end{cases}$$
Chứng minh rằng $a + c + e = b + d + f$.

93. Cho n là một số nguyên dương chẵn. Kí hiệu $w = \cos\dfrac{2k\pi}{n+1} + i\cdot\sin\dfrac{2k\pi}{n+1}$ là một căn bậc $n+1$ của 1 khác với 1. Kí hiệu
$$a_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{n+1}\right)^n$$
Chứng minh rằng
$$1 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_n w^n \neq 0$$

1.2 Các đẳng thức Lượng giác

1. Chứng minh các đồng nhất thức sau

   - $\cos a + \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2}) \cdot \cos(\frac{a-b}{2})$
   - $\cos a - \cos b = -2\sin(\frac{a+b}{2}) \cdot \sin(\frac{a-b}{2})$
   - $\sin a + \sin b = 2\sin(\frac{a+b}{2}) \cdot \cos(\frac{a-b}{2})$
   - $\sin a - \sin b = 2\cos(\frac{a+b}{2}) \cdot \sin(\frac{a-b}{2})$
   - $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$
   - $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
   - $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
   - $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$
   - $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4\cos^2 \frac{a-b}{2}$
   - $(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 4\sin^2 \frac{a-b}{2}$
   - $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
   - $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
   - $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
   - $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$
   - $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$
   - $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
   - $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
   - $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
   - $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$
   - $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
   - $\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3tg^2 a}$
   - $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
   - $\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$
   - $\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$

2. Cho $\tan\frac{a}{2} = 4\tan\frac{b}{2}$, chứng minh rằng ta có đẳng thức

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{3\sin b}{5 - 3\cos b}$$

3. Cho $a\cos x + b\cos y = a\cos(x+z) + b\cos(y+z) = 0$ với $z \neq k\pi$. Chứng minh rằng với mọi số thực $t \in R$ ta có đẳng thức

$$a\cos(x+t) + b\cos(y+t) = 0$$

4. Chứng minh rằng ta có các đẳng thức sau đây
   - $\tan^4 a = \frac{\cos 4a - 4\cos 2a + 3}{\cos 4a + 4\cos 2a + 3}$
   - $\frac{1}{2} \cdot \cot^4 a = \frac{\sin^2 2a + 4\sin^2 a - 4}{1 - 8\sin^2 a - \cos 4a}$
   - $\cot a - \tan a - 2\tan 2a - 4\tan 4a = 8\cot 8a$
   - $\cos^6 a - \sin^6 a = \frac{(3+\cos^2 2a)\cos 2a}{4}$
   - $2(\sin^6 a + \cos^6 a) - 3(\sin^4 a + \cos^4 a) + 1 = 0$
   - $\frac{1+\sin 2a}{\sin a + \cos a} - \frac{1-\tan^2 \frac{a}{2}}{1+\tan^2 \frac{a}{2}}$
   - $\frac{\sqrt{1+\cos a}+\sqrt{1-\cos a}}{\sqrt{1+\cos a}-\sqrt{1-\cos a}} = \cot(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4})$

5. Cho $\sin(a + 2b) = 2\sin a$. Chứng minh rằng $\tan(a + b) = 3\tan b$

6. Cho
$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = \frac{a_1}{b_1}$$
với $ab_1 + a_1 b \neq 0$. Chứng minh rằng
$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{aa_1 + bb_1}{ab_1 + a_1 b}$$

7. Cho hàm $f(x) = a\sin x + b\cos x$ thoả mãn điều kiện có hai số thực x_1, x_2 sao cho $x_1 - x_2 \neq k \cdot \pi$ $(k \in Z)$ mà $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Chứng minh rằng $f(x)$ đồng nhất bằng không .

8. Giả sử rằng $a = \cos(x-\alpha), b = \sin(x-\beta)$. Chứng minh rằng $a^2 - 2ab\sin(\alpha - \beta) + b^2 = \cos^2(\alpha - \beta)$

9. Cho $x = 2y$, và $x+y+z = \pi$. Chứng minh rằng $(\sin y + \sin z) \cdot \sin y = \sin^2 x$

10. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và
$$\begin{cases} 3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1 \\ 3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0 \end{cases}$$
Chứng minh rằng $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$

11. Cho
$$\frac{r^2-1}{1+2r\cos u + r^2} = \frac{1+2r\cos v + r^2}{r^2-1}$$
Chứng minh rằng ta có các đẳng thức sau đây
$$\frac{r^2-1}{1+2r\cos u+r^2} = \frac{r+\cos u}{r-\cos v} = \pm\frac{\sin u}{\sin v} = -\frac{1+r\cos u}{1+r\cos v}$$

$$\tan\frac{u}{2}\cdot\tan\frac{v}{2}=\pm\frac{r+1}{r-1}$$

12. Cho $\cos x=\tan y, \cos y=\tan z, \cos z=\tan x$. Chứng minh rằng

$$\sin x=\sin y=\sin z=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

13. Cho

$$\frac{\sin x}{a_1}=\frac{\sin 3x}{a_3}=\frac{\sin 5x}{a_5}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1+a_5}{a_3}=\frac{a_3-a_1}{a_1}$$

14. Cho

$$\frac{\cos x}{a_1}=\frac{\cos 2x}{a_2}=\frac{\cos 3x}{a_3}$$

Chứng minh rằng

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{2a_2-a_1-a_3}{4a_2}$$

15. Cho

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{m}{n}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}}{m+n}=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{m-n}$$

16. Cho $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ và $\alpha\neq\beta$ và giả sử rằng

$$\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$$

Chứng minh rằng

$$\tan^2\frac{x}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cdot\tan^2\frac{\beta}{2}$$

17. Chứng minh đồng nhất thức sau đây

$$\sin(a+b-c-d)=\frac{\sin(a-c)\sin(a-d)}{\sin(a-b)}+\frac{\sin(b-c)\sin(b-d)}{\sin(b-a)}$$

$$\sum_{cyclic}\tan a-\frac{\sin(a+b+c)}{\prod_{cyclic}\cos a}=\prod_{cyclic}\tan a$$

$$\sum_{cyclic}\sin a-\sin(a+b+c)=4\prod_{cyclic}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$\sum_{cyclic}\cos a-\cos(a+b+c)=4\prod_{cyclic}\cos\frac{a+b}{2}$$

18. Giả sử rằng

$$\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\beta}{b}=\frac{1}{a+b}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\beta}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

19. Cho các số thực a, b, c , chứng minh rằng

$$\sum_{cyclic}\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}=0$$

$$\sum_{cyclic}\frac{\sin a}{\sin(a-b)\sin(a-c)}=0$$

$$\sum_{cyclic}\frac{\cos a}{\sin(a-b)\sin(a-c)}=0$$

$$\sum_{cyclic}\sin a\sin(b-c)\cos(b+c-a)=0$$

$$\sum_{cyclic}\cos a\sin(b-c)\sin(b+c-a)=0$$

$$\sum_{cyclic}\frac{1}{\sin(a-b)(a-c)}=\frac{1}{2\prod_{cyclic}\cos\frac{a-b}{2}}$$

20. Cho $a+b+c=\pi$, chứng minh rằng

$$\sum_{cyclic}\sin 3a\sin^3(b-c)=0$$

$$\sum_{cyclic}\sin 3a\cos^3(b-c)=0$$

$$\sum_{cyclic}\sin^3 a\cos(b-c)=0$$

$$\sum_{cyclic}\sin^3 a\sin(b-c)=0$$

$$\sum_{cyclic}\sin a=4\prod_{cyclic}\cos\frac{a}{2}$$

$$\sum_{cyclic}\cos a=1+4\prod_{cyclic}\sin\frac{a}{2}$$

$$\sum_{cyclic}\tan a=\prod_{cyclic}\tan a$$

$$\sum_{cyclic} \tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2} = 1$$

$$\sum_{cyclic} \sin 2a = 4\prod_{cyclic}\sin a$$

$$\sum_{cyclic} \cos^2 a = 2\prod_{cyclic}\cos a + 1$$

21. Giả sử rằng $a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \cdots + a_n\cos\alpha_n = 0$ và $a_1\cos(\alpha_1+\theta) + a_2\cos(\alpha_2+\theta) + \cdots + a_n\cos(\alpha_n+\theta) = 0$ với $\theta \neq k\cdot\pi (k \in Z)$. Chứng minh rằng với mọi $\lambda \in R$ ta có đẳng thức

$$a_1\cos(\alpha_1+\lambda) + a_2\cos(\alpha_2+\lambda) + \cdots + a_n\cos(\alpha_n+\lambda) = 0$$

22. Giả sử rằng

$$\frac{a}{\tan(\alpha+x)} = \frac{b}{\tan(\alpha+y)} = \frac{c}{\tan(\alpha+z)}$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{cyclic}\frac{a+b}{a-b}\sin^2(x-y) = 0$$

23. Giả sử rằng ta có $(a+b)\sin(x-\alpha) = (a-b)\sin(x+\alpha)$ và $atg\frac{x}{2} = c + b\tan\frac{\alpha}{2}$. Chứng minh rằng

$$\sin\alpha = \frac{2bc}{a^2-b^2-c^2}$$

24. Chứng minh rằng

$$\tan 3\alpha = \tan\alpha\cdot\tan(60^0-\alpha)\cdot\tan(60^0+\alpha)$$

$$\cot 3\alpha = \cot\alpha\cdot\cot(60^0-\alpha)\cdot\cot(60^0+\alpha)$$

$$\tan^2\alpha + \tan^2(60^0-\alpha) + \tan^2(60^0+\alpha) = 9\tan^2 3\alpha + 6$$

25. Chứng minh rằng

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$tg15^0 = 2-\sqrt{3}$$

$$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{2}}$$

$$\sin 6^0 = \frac{\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{8}$$
$$\cos 6^0 = \frac{\sqrt{18 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}$$

26. [HongKong TST 2004] Chứng minh rằng

$$\left(\cos 42^0 + \cos 102^0 + \cos 114^0 + \cos 174^0\right)^2 = \frac{3}{4}$$

27. Chứng minh rằng

$$\tan 3^0 \cdot \tan 17^0 \cdot \tan 23^0 \cdot \tan 37^0 \cdot \tan 43^0 \cdot \tan 57^0 \cdot \tan 63^0 \cdot \tan 77^0 \cdot \tan 83^0 = \tan 27^0$$
$$\cos\frac{\pi}{15} \cdot \cos\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{3\pi}{15} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} \cdot \cos\frac{5\pi}{15} \cdot \cos\frac{6\pi}{15} \cdot \cos\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}$$

28. Giả sử rằng $-1 < x < 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\frac{2k\pi}{7} + x^2} = 7 \cdot \frac{1 + x^7}{1 - x^7}$$

Từ đó suy ra rằng

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} = 8$$

29. Chứng minh rằng

$$\tan^2 5^0 + \tan^2 10^0 + \cdots + \tan^2 80^0 + \tan^2 85^0 = 195$$

30. [The Democratic Republic of Germany 3] Chứng minh rằng

$$\tan 7^0 30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$$

31. Chứng minh rằng

$$\tan^2 1^0 + \tan^2 2^0 + \cdots + \tan^2 89^0 = 4005$$

32. Chứng minh rằng

$$\tan^6 20^0 - 33\tan^4 20^0 + 27\tan 20^0 = 3$$

33. Chứng minh rằng

$$\cos^4\frac{\pi}{14} + \cos^4\frac{3\pi}{14} + \cos^4\frac{5\pi}{14} = 12\cos^2\frac{\pi}{14} \cdot \cos^2\frac{3\pi}{14} \cdot \cos^2\frac{5\pi}{14}$$

34. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\pi}{5}$$

35. Các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nhận các giá trị là $+1$ hoặc -1. Chứng minh rằng

$$2\sin\big(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{2^{n-1}}\big)45^0=a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+\cdots+a_n\sqrt{2}}}$$

36. Cho $\tan(a+b)=3\tan a$. Chứng minh rằng $\sin(2a+2b)+\sin 2a=2\sin 2b$
.

37. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos 290^0}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^0}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$\tan 9^0-\tan 63^0+\tan 81^0-\tan 27^0=4$$
$$\cos 10^0\cos 50^0\cos 70^0=\frac{\sqrt{3}}{8}$$
$$\tan\frac{\pi}{11}+4\tan\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$$
$$\tan^6 20^0+\tan^6 40^0+\tan^6 80^0=33273$$
$$\tan^6 10^0+\tan^6 50^0+\tan^6 70^0=433$$
$$4\cos 36^0+\cot 7^0 30'=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$$
$$\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{9\pi}{12}+\cos\frac{9\pi}{12}\cdot\cos\frac{17\pi}{12}+\cos\frac{17\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{3}{4}$$

38. [Mathematical Excalibur 1995] Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{1995}\tan n\tan(n+1)=\frac{\tan 1996}{\tan 1}-1996$$

39. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{2k\cdot\pi}{2n+1}=\frac{n}{2}-\frac{1}{4}$$

40. Giả sử rằng $\epsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ với n là số nguyên dương và đặt

$$A_k=a_0+a_1\epsilon^k+a_2\epsilon^{2k}+\cdots+a_{n-1}\epsilon^{(n-1)k}$$

với $k=0,1,2,...,n-1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n-1}|A_k|^2=n\{a_0^2+a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2\}$$

41. Chứng minh đồng nhất thức sau đây

$$\frac{\cos n\phi}{\cos^n \phi} = 1 - \binom{n}{2}\tan^2\phi + \binom{n}{4}\tan^4\phi - \cdots + A$$

ở đây $A = (-1)^{\frac{n}{2}}\tan^n\phi$ với n chẵn và bằng $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-1}\tan^{n-1}\phi$

42. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin n\phi}{\cos^n \phi} = \binom{n}{1}\tan\phi - \binom{n}{3}\tan^3\phi + \binom{n}{5}tg^5\phi - \cdots + A$$

ở đây $A = (-1)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{n-1}tg^{n-1}\phi$ với n chẵn và bằng $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan^n\phi$ nếu n lẻ .

43. Giả sử rằng $0 < \alpha \le \pi$ và $0 < \beta \le \pi$ thoả mãn tính chất

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}$$

Chứng minh rằng

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$$

44. Giả sử rằng $0 < \alpha \le \pi$ và $0 < \beta \le \pi$ thoả mãn tính chất

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{8}$$

Chứng minh rằng

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$$

45. Giả sử rằng ta có các hệ thức $\cos\theta + \cos\varphi = a; \sin\theta + \sin\varphi = b$. Hãy chứng minh rằng ta có các hệ thức sau đây

$$\cos(\theta+\varphi) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\sin(\theta+\varphi) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

46. Cho α và β là hai nghiệm số phân biệt của phương trình $a\cos x + b\sin x = c$. Chứng minh rằng

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

47. Giả sử rằng $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma\cdot\cos\theta; \sin\alpha = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$. Chứng minh rằng

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$$

48. Chứng minh rằng nếu $(x-a)\cos\theta + y\sin\theta = (x-a)\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = a$ và $\tan\frac{\theta}{2} - \tan\frac{\theta_1}{2} = 2l$ thì ta có đẳng thức
$$y^2 = 2ax - (1-l^2)x^2$$

49. Chứng minh rằng từ các đẳng thức $x\cos\theta + t\sin\theta = x\cos\varphi + y\sin\varphi = 2a$ và $2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} = 1$ ta suy ra rằng
$$y^2 = 4a(a-x)$$

50. Giả sử rằng $\cos\theta = \cos\alpha\cdot\beta$, chứng minh rằng
$$tg\frac{\theta+\alpha}{2}\cdot tg\frac{\theta-\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}$$

51. Chứng minh rằng nếu
$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\theta)}{b} = \frac{\cos(x+2\theta)}{c} = \frac{\cos(x+3\theta)}{d}$$
thì ta có đẳng thức
$$\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$$

52. Giả sử rằng α, β là các góc nhọn thoả mãn đẳng thức $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)$. Chứng minh rằng $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$.

53. Giả sử rằng ta có các đẳng thức sau đây
$$\cos^2\theta = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}; \cos^2\varphi = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}; \frac{\tan\theta}{\tan\varphi} = \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma}$$
Chứng minh rằng
$$\tan^2\frac{\alpha}{2}\cdot\tan^2\frac{\gamma}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}$$

54. Chứng minh rằng nếu $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$, $\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\beta$, $\tan\frac{\theta}{2}\cdot\tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{\beta}{2}$ thì ta có đẳng thức sau đây
$$\sin^2\beta = \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha_1} - 1\right)$$

55. Giả sử rằng $x\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = x\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = x\cos(\gamma+\alpha) + \cos(\gamma-\alpha)$. Chứng minh rằng
$$\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{\tan\beta}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} = \frac{\tan\gamma}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

56. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cdot\cos\alpha}{\sin(\varphi-\beta)\cdot\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\cdot\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\cdot\sin\alpha}=0$$

và

$$\frac{\tan\theta\cdot\tan\alpha}{\tan\varphi\cdot\tan\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=0$$

thì

$$\tan\theta=\frac{1}{2}(\tan\beta+\cot\alpha);\tan\varphi=\frac{1}{2}(\tan\beta-\cot\alpha)$$

57. Cho

$$n^2\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$$

Chứng minh rằng

$$\tan\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\tan\beta$$

58. Chứng minh rằng từ đẳng thức $\cos(\theta-\alpha)=a;\sin(\theta-\alpha)=b$ ta suy ra

$$a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$$

59. Giả sử rằng ta có các đẳng thức $\cos(\alpha-3\theta)=m\cos^3\theta$ và $\sin(\alpha-3\theta)=m\sin^3\theta$. Chứng minh rằng

$$m^2+m\cos\alpha=2$$

60. Chứng minh rằng từ các đẳng thức

$$\cos\theta=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\cos\varphi=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},\cos(\theta-\varphi)=\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

ta suy ra đẳng thức

$$\tan^2\alpha=\tan^2\beta+\tan^2\gamma$$

61. [HongKong TST 2001] Giả sử rằng $\tan\alpha,\tan\beta$ là nghiệm của phương trình $x^2+\pi x+\sqrt{2}=0$. Chứng minh rằng

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\pi\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{2}\cos^2(\alpha+\beta)=\sqrt{2}$$

62. Chứng minh rằng từ các đẳng thức

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1\quad;\quad a\tan\theta=b\tan\varphi$$

ta suy ra đẳng thức

$$(a-b)(a+b-2ab)=0$$

63. Chứng minh các đồng nhất thức sau đây

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1)$$

$$x^{2n+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1)$$

$$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1)$$

$$x^{2n+1}+1=\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1)$$

64. Chứng minh các đồng nhất thức sau đây

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{4\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}$$

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

$$\tan\frac{\pi}{2n}\cdot\tan\frac{2\pi}{2n}\cdots\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}=1$$

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\cdot\tan\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\tan\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$$

65. Chứng minh rằng nếu $\cos\alpha+i\sin\alpha$ là nghiệm của phương trình $x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n=0$ thì $p_1\sin\alpha+p_2\sin 2\alpha+\cdots+p_n\sin n\alpha=0$ ở đó $p_1,p_2,\ldots,p_n$ là các số thực .

66. Chứng minh các đẳng thức sau đây

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(5-\sqrt[3]{7})}$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(3\sqrt[3]{9}-6)}$$

67. Giả sử rằng

$$u_k = \frac{\sin 2nx \cdot \sin(2n-1)x \cdots \sin(2n-k+1)x}{\sin x \cdot \sin 2x \cdots \sin kx}$$

Chứng minh các đẳng thức sau đây

$$1-u_1+u_2-u_3+\cdots+u_{2n} = 2^n(1-\cos x)(1-\cos 3x)\cdots(1-\cos(2n-1)x)$$

$$1-u_1^2+u_2^2-u_3^2+\cdots+u_{2n}^2 = (-1)^n\frac{\sin(2n+2)x \cdot \sin(2n+4)x \cdots \sin 4nx}{\sin 2x \cdot \sin 4x \cdots \sin 2nx}$$

68. Chứng minh đẳng thức sau đây

$$\tan 30^0 + \tan 40^0 + \tan 50^0 + \tan 60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$$

69. Cho $\tan 11x = \tan 34^0$ và $\tan 19x = \tan 21^0$. Hãy xác định $\tan 5x$.

70. Chứng minh các đẳng thức sau đây

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{(}1-x^2)$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{(}1-x^2)$$

$$\tan(arccotx) = \frac{1}{x}$$

$$\cot(\arctan x) = \frac{1}{x}$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\cos(arccotx) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\sin(arccotx) = \frac{1}{1+x^2}$$

71. Chứng minh các đẳng thức sau đây

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan 17 + \arctan 18 = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(2\cdot\arctan\frac{1}{7}) = \sin(4\cdot\arctan\frac{1}{3})$$

72. Chứng minh các đồng nhất thức sau đây

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1+xy} + \epsilon \cdot \pi$$

trong đó $\epsilon = 0$ nếu $xy < 1$, $\epsilon = -1$ nếu $xy > 1$ và $x < 0$, và $\epsilon = 1$ nếu $xy > 1$ và $x > 0$.

$$2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$$

73. Chứng minh rằng với $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ta có đẳng thức

$$\arccos x + \arccos(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-3x^2}) = \frac{\pi}{3}$$

74. Chứng minh rằng

$$\arcsin x + \arcsin y = \zeta \cdot \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \epsilon\pi$$

trong đó
$\zeta = 1, \epsilon = 0$ nếu $xy < 0$ hoặc $x^2 + y^2 \leq 1$
$\zeta = -1, \epsilon = -1$ nếu $x^2 + y^2 > 1, x < 0, y < 0$
$\zeta = -1, \epsilon = +1$ nếu $x^2 + y^2 > 1, x > 0, y > 0$

75. Hãy chứng minh các đồng nhất thức sau

$$\sin 5\alpha = \sin^5 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos^4 \alpha$$

$$\cos 5\alpha = \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha$$

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \cdots$$

$$\sin n\alpha = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \sin^5 \alpha - \cdots$$

76. Giả sử rằng

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$$

thì ta có đẳng thức

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha$$

77. Hãy chứng minh các đẳng thức

$$\sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \cdots + \sin(\varphi + n\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin(\varphi + n\frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\cdots+\cos(\varphi+n\alpha)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos(\varphi+n\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cdots+\cos^2 n\alpha=\frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}-\frac{n-1}{2}$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\cdots+\sin^2 n\alpha=\frac{n+1}{2}-\frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha+\binom{n}{1}\cos 2\alpha+\binom{n}{2}\cos 3\alpha+\cdots+\binom{n}{n-1}\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$$

$$\sin\alpha+\binom{n}{1}\sin 2\alpha+\binom{n}{2}\sin 3\alpha+\cdots+\binom{n}{n-1}\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

$$cosec^2\frac{\pi}{2n+1}+cosec^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cdots+cosec^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

78. [IMO 1966 The fourth Problem][1] Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n và mọi số thực α thoả mãn $\sin 2^n\alpha \neq 0$ ta có đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin 2^k\alpha}=\cot\alpha-\cot 2^n\alpha$$

79. Cho $f(x)=(1+2^{1-2x})^{-1}$. Hãy xác định giá trị của biểu thức

$$\sum_{k=1}^{50}f(\sin^2\frac{k\pi}{100})$$

80. Chứng minh rằng nếu

$$a_0+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos x+b_k\sin x\big)=0$$

với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $a_0=a_1=b_1=a_2=b_2=\cdots=a_n=b_n=0$.

81. Chứng minh rằng với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có

$$\cos^n x=\begin{cases}\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos nx+\binom{1}{n}\cos(n-2)x+\cdots+\frac{1}{2}\binom{\frac{n}{2}}{n}\right] & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos nx+\binom{1}{n}\cos(n-2)x+\cdots+\binom{\frac{n-1}{2}}{n}\cos x\right] & \text{nếu } n \text{ lẻ}\end{cases}$$

[1] International Mathematical Olympiad 1966

82. Hãy rút gọn các tổng sau đây

    1) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}\sin^3\frac{x}{3^k}$
    2) $\sum_{k=1}^{n} arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4}$
    3) $\sum_{k=1}^{n} k\sin a_k$ ở đây $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là một cấp số cộng
    4) $\sum_{k=1}^{n} b_k\sin a_k$ ở đây $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ và $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là các cấp số cộng
    5) $\sum_{k=1}^{n} b_k\cos a_k$ ở đây $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ và $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là các cấp số cộng
    6) $\sum_{k=1}^{n} b_k\sin a_k$ ở đây $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là cấp số nhân và $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là cấp số cộng
    7) $\sum_{k=1}^{n} b_k\cos a_k$ ở đây $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là cấp số nhân và $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là cấp số cộng
    8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin a_k\sin a_{k+1}}$ ở đây $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là cấp số cộng
    9) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos a_k\cos a_{k+1}}$ ở đây $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ là cấp số cộng
    10) $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}}$
    11) $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan\frac{x}{2^{k-1}}$

83. Chứng minh rằng

$$\sin 2^0\sin 18^0\sin 38^0\sin 42^0\sin 58^0\sin 62^0\sin 78^0\sin 82^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$$

84. Chứng minh rằng

$$\big(\sin x+\sin 2x+\sin 4x\big)^5-\big(-\sin x+\sin 2x+\sin 4x\big)^5-$$
$$-\big(\sin x-\sin 2x+\sin 4x\big)^5-\big(\sin x+\sin 2x-\sin 4x\big)^5=15\sqrt{3}$$

85. Sử dụng định lý Viet để tính các tổng sau đây (trong hoàn cảnh các bạn biết cách làm khác thì cũng không sao mà)

    (a) $\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{5\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}$
    (b) $\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{5\pi}{10}+\cos\frac{5\pi}{10}\cdot\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}\cdot\cos\frac{9\pi}{10}$
    (c) $\cos 5^0+\cos 77^0+\cos 149^0+\cos 221^0+\cos 293^0$

    Bài giải.

86. Giả sử ϵ là nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$, ta đặt

$$x+y+z=A$$
$$x+y\epsilon+z\epsilon^2=B$$
$$x+y\epsilon^2+z\epsilon=C$$

    1) Hãy biểu diễn x, y và z qua A, B, C
    2) Chứng minh hệ thức sau đây $|A|^2+|B|^2+|C|^2=3(|x|^2|+|y|^2+|z|^2)$

1.3 Phương trình và bất phương trình

1. Cho các số thực $a, b, c \in \mathbb{R}$ thoả mãn $a(4a+3b+2c) > 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không thể có hai nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

2. Tìm điều kiện cần và đủ cho các số nguyên a, b, c, d với $a \neq 0$ sao cho $axy+bx+cy+d=cd$ có vô số nghiệm nguyên đối với ẩn nguyên x, y.

3. Cho các số thực x, y thoả mãn hệ

$$\begin{cases} |x+y| \leq 1 \\ |xy+x+y| \leq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x \leq 2$.

4. [RoMO97][1] Cho đa thức bậc ba $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(2)+f(5) < 7 < f(3)+f(4)$. Chứng minh rằng tồn tại các số thực u, v thoả mãn $u+v=7$ và $f(u)+f(v)=7$.

5. Cho các số thực $a, b, c, r, s \in \mathbb{R}$ thoả mãn

$$\begin{cases} ar^2+br+c=0 \\ -as^2+bs+c=0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực u thoả mãn

$$(u-r)(u-s) \leq 0 \quad \text{và} \quad \frac{a}{2} \cdot u^2+bu+c=0$$

6. [IMO 1959][2] Xác định tất cả các giá trị của x để đẳng thức sau đây đúng

   (a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

   (b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

   (c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

7. [IMO 1959] Cho các số thực a, b, c. Cho phương trình sau của $\cos x$:

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

Hãy dựng một phương trình bậc hai đối với $\cos 2x$ từ phương trình nói trên và tìm các giá trị của a, b, c để hai phương trình đó có cùng nghiệm x. So sánh giá trị của $\cos x$ và $\cos 2x$ khi mà $a=4$, $b=2$, $c=-1$.

[1] Romania Mathematical Olympiad 1997

[2] International Mathematical Olympiad 1959 The second Problem

8. [IMO 1960] Tìm tất cả các giá trị thực của x mà bất đẳng thức dưới đây đúng
$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x}\,)^2} < 2x+9$$

9. [IMO 1961] Giải phương trình sau theo x, y, z:
$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases}$$

10. [IMO 1961] Giải phương trình $\cos^n x - \sin^n x = 1$, ở đó n là một số nguyên dương.

11. [IMO 1962] Tìm tất cả các số thực x thoả mãn $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

12. [IMO 1962] Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

13. [IMO 1963] Tìm các nghiệm thực của phương trình
$$\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x$$

14. [IMO 1963] Tìm tất cả các nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x_5+x_2=yx_1 \\ x_1+x_3=yx_2 \\ x_2+x_4=yx_3 \\ x_3+x_5=yx_4 \\ x_4+x_1=yx_5 \end{cases}$$

15. [IMO 1965 The first Problem] Tìm tất cả các số thực x trong đoạn thẳng $[0, 2\pi]$ thoả mãn bất đẳng thức
$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\,\right| \le \sqrt{2}$$

16. [IMO 1965 The second Problem] Các hệ số a_{ij} với $i, j \in \{1, 2, 3\}$ của hệ phương trình
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$$

17. [IMO 1966 The fifth Problem] Giải phương trình
$$\left|a_i-a_1\right|x_1+\left|a_i-a_2\right|x_2+\left|a_i-a_3\right|x_3+\left|a_i-a_4\right|x_4=1$$
với $i=1,2,3,4$ ở đó các số a_1, a_2, a_3, a_4 là phân biệt.

18. [IMO 1968 The third Problem] Cho các số thực a, b, c không đồng thời bằng không. Giả sử rằng các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn n phương trình $ax_i^2 + bx_i + c = x_{i+1}$ với mọi $1 \leq i < n$ và $ax_n^2 + bx_n + c = x_1$. Chứng minh rằng hệ này không có nghiệm, một nghiệm, nhiều hơn một nghiệm thực phụ thuộc vào giá trị của số $(b-1)^2 - 4ac$ tương ứng là âm, bằng không hay dương.

19. [IMO 1969 The second Problem] Xét phương trình
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos(a_k + x) = 0$$
ở đó a_k là các hằng số thực và x là biến thực cần tìm. Chứng minh rằng nếu phương trình đó có hai nghiệm thực x_1, x_2 thì $x_1 - x_2$ là một bội hữu tỷ của π ie.. tồn tại số hữu tỷ r sao cho $x_1 - x_2 = r \cdot \pi$.

20. [IMO 1972 The fourth Problem] Hãy xác định tất cả các nghiệm số dương của phương trình
$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

21. [IMO 1980 The fifth Problem] Hãy xác định tất cả các số thực a sao cho tồn tại các số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_5$ thoả mãn điều kiện
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a \\ x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 = a^2 \\ x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 = a^3 \end{cases}$$

22. [IMO 1988 The fourth Problem] Chứng minh rằng tập hợp nghiệm của bất phương trình
$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \cdots + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$
là hợp của các đoạn rời nhau, có tổng độ dài bằng 1988.

23. [Kurs.MO1975 The first Problem][3] Hãy biến đổi phương trình
$$ab^2\Big(\frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(a-c)^2}\Big) = a - b$$
thành dạng đơn giản hơn với $a > c \geq 0$ và $b > 0$.

[3] Kurschák Mathematical Competition 1975

24. [Kurs.MO1976 The third Problem] Chứng minh rằng nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ luôn nhận giá trị dương với mọi giá trị thực x thì nó có thể viết được dưới dạng thương của hai đa thức với các hệ số dương.

25. [Irish Mathematical Olympiad 1999 The first Problem][4] Hãy xác định tất cả các số thực x thoả mãn
$$\frac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

26. [Irish MO 1999 The sixth Problem][5] Giải hệ phương trình sau đây
$$\begin{cases} y^2 = (x+8)(x^2+2) \\ y^2 - (8+4x)y + (16+16x-5x^2) = 0 \end{cases}$$

27. [Irish MO 1995 The seventh Problem] Giả sử rằng a, b, c là các số phức và rằng tất cả ba nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ nằm trên đường tròn đơn vị phức $|z| = 1$. Chứng minh rằng cả ba nghiệm w của phương trình $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$ cũng nằm trên đường tròn đơn vị phức.

28. [Irish MO 1994 The seventh Problem] Giả sử rằng các số thực p, q, r thoả mãn hệ thống phương trình sau đây
$$\begin{cases} q = p(4-p) \\ r = q(4-q) \\ p = r(4-r) \end{cases}$$
Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của tổng $p + q + r$.

29. [Irish MO 1994 The ninth Problem] Cho w, a, b, c là các số thực thoả mãn tồn tại các số thực x, y, z thoả mãn hẹ phương trình sau đây
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xa^2 + yb^2 + zc^2 = w^2 \\ xa^3 + yb^3 + zc^3 = w^3 \\ xa^4 + yb^4 + zc^4 = w^4 \end{cases}$$
Hãy biểu diễn w theo các số a, b, c.

30. [Irish MO 1993 The first Problem] Cho các số thực α, β thoả mãn các hệ phương trình
$$\begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0 \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0 \end{cases}$$
Hãy tìm tổng $\alpha + \beta$.

[4] Irish Mathematical Olympiad 1999 the first Paper
[5] Irish Mathematical Olympiad 1999 the second Paper

31. [MiU.MC1998][6] Hãy xác định tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$1998^x + 1999^x = 1997^x + 2000^x$$

32. [Moscow Mathematical Olympiad 2000, for 9 Class] Hãy xác định tất cả các số dương x, y, z thoả mãn hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 - (y-z)^2 \\ y + \frac{1}{z} = 2 - (x-y)^2 \\ z + \frac{1}{x} = 2 - (y-z)^2 \end{cases}$$

33. [Moscow MO 2000, for 10 Class] Giải phương trình $|x+4| + |x| + |x-4| = 8 - x^2$.

34. [Moscow MO 2000, for 10 Class] Hãy xác định tất cả các số thực x nằm trong khoảng $(0;1)$ thoả mãn phương trình sau

$$\sin^4(\cos^4 3x) + \cos^4(\cos^4 3x) = 1$$

35. [Moscow MO 2000, for 11 Class] Giải phương trình lượng giác sau đây

$$\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \ cosx$$

36. [Moscow MO 2000, for 9 Class] Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} xy = 1 \\ yz = 2 \\ zx = 8 \end{cases}$$

37. [Moscow MO 2000, for 11 Class] Chứng minh rằng phương trình

$$x^{2000} + 3x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$$

vô nghiệm.

38. [Moscow MO 2000, for 11 Class] Xác định nghiệm của hệ thống phương trình sau đây

$$\begin{cases} 2y - x = \sin x - \sin 2y \\ \cos x + 5\sin y = 4 \end{cases}$$

39. [Moscow MO 2001, for 8 Class] Giải phương trình

$$x^3 + 5x^2 + 2x = 8$$

[6] Undergraduate Mathematics Competition 1998 at University of Michigan

40. [Moscow MO 2001, for 9 Class] Giải phương trình sau đây

$$\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{2}{x}$$

41. [Moscow MO 2001, for 11 Class] Giải bất phương trình $x^{10}+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1>0$

42. [Moscow MO 2001, for 9 Class] Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình sau đây

$$(x+1)^{63}+(x+1)^{62}(x-1)+(x+1)^{61}(x-1)^2+\cdots+(x-1)^{63}=0$$

43. [Moscow MO 2001, for 10 Class] Giả sử rằng $f(x)=x^2+12x+30$. Hãy giải phương trình $f(f(f(f(f(x)))))=0$.

44. Giải phương trình $x^4+2(x-1)(x^2-2x+2)=0$

45. Cho n là một số nguyên dương. Hãy xác định tất cả các giá thực a,b,c theo n để hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt[n]{x+a}+\sqrt[n]{y+b}=1\\ x+y=c\end{cases}$$

có nghiệm?

46. Giải các phương trình dưới đây

(a) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

(b) $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4^x$

(c) $2^x+3^x+5^{x-1}=2^{1-x}+3^{1-x}+5^{-x}$

(d) $\log_2(1+\sqrt[3]{x})=\log_7 x$

(e) $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$

(f) $x^2-2x\sin xy+1=0$

(g) $2^{|x|}+2^{|y|}=-y^2+2y$

(h) $2^{\cos x}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$

(i) $(x+1)^4+(x-1)^4=2$

(j) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

(k) $x^2+\sqrt{x^2-3x+5}=3x+7$

(l) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

(m) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\,(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}=2+\sqrt{1-x^2}$

(n) $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

(o) $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt[3]{2}$

(p) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

(q) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}}$

(r) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

(s) $\left|1995-x\right|^{1996}+\left|1996-x\right|^{1995}=1$

(t) $2\log_3\cot x=\log_2\cos x$

(u) $\cos^{1990}x-\sin^{1990}x=1$

(v) $x^4+4=5(x^2-2)x$

(w) $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$

(x) $x^4-4x=1$

(y) $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$ với a là tham số.

47. Xác định tất cả các bộ ba (a,b,c) các số thực thoả mãn hệ phương trình dưới đây

$$\begin{cases} ax^2+bx+c\le 0\\ bx^2+cx+b\le 0\\ cx^2+ax+a\le 0\end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

48. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=x_2\\ ax_2^2+bx_2+c=x_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n\\ ax_n^2+bx_n+c=x_1\end{cases}$$

ở đó $a\neq 0$. Hãy xác định điều kiện cần và đủ cho các số a,b,c sao cho hệ không có nghiệm? Có duy nhất một nghiệm? Có nhiều hơn một nghiệm?

49. Giải phương trình

$$(2+\sqrt{2})^{\sin^2 x}-(2+\sqrt{2})^{\cos^2 x}+(2-\sqrt{2})^{\cos 2x}=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})^{\cos 2x}$$

50. Giải phương trình sau

$$\frac{a-b\cos x}{\sin x}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}\tan y}{1+\tan^2 y}$$

ở đó x,y là các ẩn cần tìm, còn a,b là các số thực cho trước.

51. Giải phương trình
$$\cos x - 3\sqrt{3}\sin x = \cos 7x$$

52. Cho các số nguyên dương $n \geq 2$. Chứng minh rằng phương trình
$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + x + 1 = 0$$
has not any rational root .

53. Cho bất phương trình
$$a^3|x| \leq \sqrt{3}(a^2 - y^2)$$
Xác định a sao cho cặp số nguyên (x, y) thoả mãn bất phương trình nói trên là bé nhất.

54. Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng với mọi $b > n-1$, đa thức
$$g(x) = a_0 + a_1bx + a_2b(b-1)x^2 + \cdots + a_nb(b-1)\cdots(b-n+1)x^n$$
cũng có n nghiệm thực.

55. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^2x^4}} = a \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = b \end{cases}$$

56. Chứng minh rằng đối với mọi cặp các đa thức với hệ số thực $(P(x), Q(x))$ trong đó ít nhất một trong chúng có cấp không bé hơn 1, luôn tồn tại một số $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $P(\sin x_0) \neq Q(x_0)$.

57. Xác định tất cả các số thực a thoả mãn bất phương trình
$$\log_a 11 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{ax^2 - 2x + 3} \cdot \log_a(\sqrt{ax^2 - 2x + 1} + 1) \leq 0$$
có nghiệm duy nhất.

58. Giải phương trình sau
$$\tan^2 x + \tan^2 2x + \cot^2 3x = 1$$

59. Giải phương trình sau
$$\cos x \cos 2x \cos 3x + \sin x \sin 2x \sin 3x = 1$$

60. Hãy xác định tất cả các nghiệm trong khoảng $(0, 1)$ của phương trình
$$32x(x^2 - 1)(2x^2 - 1)^2 = 1 - \frac{1}{x}$$

61. Cho trước số thực α. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos^2 \alpha \\ \sin^4 x + \sin^4 y = \cos 2\alpha \end{cases}$$

62. Giải bất phương trình

$$\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} > 2\sqrt{3} + \sqrt{4 - x}$$

63. Chúng ta giả sử rằng phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$

64. Giả sử rằng hai hàm số $f, g : (0, \infty) \to (0, +\infty)$ liên tục và thoả mãn điều kiện: với mọi số $x > 0$ thoả mãn bất phương trình $g(x) \neq x$ ta có $f(g(x)) = 1$ khi và chỉ khi $f(x) \neq 1$. Chứng minh rằng tồn tại một số thực $x_0 > 0$ sao cho $g(x_0) = x_0$.

65. [Mathematical Olympiad $30 - 4$ of Vietnam] Hãy xác định nghiệm dương của phương trình

$$2x + \frac{x-1}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 3\sqrt{x - \frac{1}{x}}$$

66. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 35 \end{cases}$$

Xác định các giá trị có thể của biểu thức $x^5 + y^5 + z^5$.

67. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2(1-x)}$$

68. Xác định tất cả các tham số m để hai hệ phương trình dưới đây là tương đương

$$(I)\ \begin{cases} x + 2y = 2 - m \\ -x + my = m - 2m^2 \end{cases}$$

$$(II)\ \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 + (m^2 + 2m - 11)x + 12 - 6m = 0 \end{cases}$$

69. Giải phương trình

$$(8\sin^3 x + 1)^3 - 162 \sin x + 27 = 0$$

70. Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a \geq c > 0$. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} cy = x^3 + ax + b \\ cz = y^3 + ay + b \\ cx = z^3 + az + b \end{cases}$$

71. Tìm m để bất phương trình sau đây nghiệm đúng với mọi x:

$$\frac{1+\sin x}{2+\cos x} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{2+\cos x}} \leq m$$

72. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x - 2004 \\ z = 2y - 2004 \\ w = 3z - 2004 \end{cases}$$

Hãy xác định nghiệm (x, y, z, w) sao cho các số x, y, z, w không âm và x có giá trị bé nhất có thể.

73. Cho các số thực dương không bằng nhau tất cả. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$$

74. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$

75. Hãy giải và biện luận hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - 2y = 2 \end{cases}$$

76. Giải phương trình $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

77. Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực, với a, b là các số thực. Hãy xác định giá trị bé nhất của $a^2 + b^2$.

78. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}$$

79. Giải phương trình
$$\frac{15}{2}(30x^2-4x)=2004\sqrt{30060x+1}+1$$

80. Giải phương trình
$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$$

81. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}30\frac{y}{x^2}+4y=2004\\ 30\frac{z}{y^2}+4z=2004\\ 30\frac{x}{z^2}+4x=2004\end{cases}$$

82. Giải phương trình
$$\sqrt{x^2+15}=3\sqrt[3]{x}-2+\sqrt{x^2+8}$$

83. Giải phương trình
$$x^3-3\sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$$

84. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}y^3-6x^2+12x-8=0\\ z^3-6y^2+12y-8=0\\ x^3-6z^2+12z-8=0\end{cases}$$

85. Giải phương trình sau đây
$$\sqrt{-4x^4y^2+16x^2y+9}-\sqrt{y^2x^2-2y^2}=2\big(x^2+\frac{1}{x^2}\big)$$
trong đó $x>0$.

86. Giải phương trình
$$\sqrt[3]{3x^2-x+2002}-\sqrt[3]{3x^2-6x+2003}-\sqrt[3]{5x-2004}=\sqrt[3]{2003}$$

87. Cho phương trình
$$(\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2})x^2+\sqrt{3}x+16=0$$
trong đó A,B,C là ba góc của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng nếu phương trình nói trên có nghiệm thì tam giác $\triangle ABC$ là đều.

88. Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 10 \\ 2xy + 2yz + zx = 5 \end{cases}$$
Hãy xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biến z.

89. Giải phương trình
$$x^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3x - 1}$$

90. Giải phương trình
$$x^2 - 4x + 2 = \sqrt{x + 2}$$

91. Giải phương trình
$$3^{x^7} + 3^{32x^2} + 3^{128} = 3^{16x^3+1}$$

92. Cho bốn số thực a, b, c, d thoả mãn $0 < a < c < d < b$. Giải phương trình sau đây
$$\sqrt{x + a^2} + \sqrt{x + b^2} = \sqrt{x + c^2} + \sqrt{x + d^2}$$

93. Giải phương trình
$$x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{-3x^2 + 9x - 5}$$

94. Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - x + 1 = 0$. Chứng minh rằng
$$x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11} = -22$$

95. (**Mathematical Olympiad on the occation of the Date** $04 - 30$ **in the Sounth of Vietnam 2004**) Cho phương trình
$$x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1 = 0$$
   (a) Chứng tỏ rằng phương trình nói trên có đúng 5 nghiệm.
   (b) Kí hiệu năm nghiệm của phương trình đó là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Chứng minh rằng ta có đẳng thức
$$\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2} = -\frac{8959}{4789}$$

96. Xác định tất cả các số thực x thoả mãn đồng thời hai phương trình dưới đây
$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{2 + 2001^x + 2004^x} = \log_3 \sqrt[3]{3 + 12(2002^x + 2003^x)} \\ \log_2 \sqrt{2 + 2002^x + 2003^x} = \log_3 \sqrt[3]{3 + 12(2001^x + 2004^x)} \end{cases}$$

97. Giải phương trình

$$\sqrt{2^{1-3\sin x}}+1+3^{\sin x}=\log_2(1-9\sin x)$$

98. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}=3\sqrt{3}\\ x+y+z=1\\ xy+yz+zx=\frac{7}{27}+2xyz\end{cases}$$

99. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2(x^3+2x-y-1)=x^2(y+1)\\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0\end{cases}$$

100. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y+xy=z^{2^{2003}}+2z^{2^{2002}}\\ x^4+y^4=2z^{2^{2004}}\\ (x+y)^{z-1}=(z+2004)^{x-y}\end{cases}$$

101. Giải phương trình

$$x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)^{1+\frac{1}{x}}+x=x^3\ln\big(1+\frac{1}{x^2}\big)^{1+\frac{1}{x^2}}+1$$

với $x>0$.

102. Giải phương trình

$$\big(\cos 72^0\big)^x+\big(\cos 36^0\big)^x=3\cdot 2^{-x}$$

103. Giải bất phương trình sau đây

$$\Big(2\cos\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}\Big)^x-\Big(\cos^2\frac{\pi}{7}-3\sin^2\frac{\pi}{7}\Big)^x\leq 1$$

104. Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ thì ta có bất đẳng thức $x_0^2\leq 1+a^2+b^2+c^2$.

105. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x\geq m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

106. Chứng minh rằng phương trình $\lg x=\sin x$ có đúng một nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

107. Cho phương trình bậc ba

$$x^3 - px^2 + qx - p = 0$$

với $p > 0$ và $q > 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình đó có ba nghiệm đều lớn hơn hay bằng 1 thì ta có bất đẳng thức

$$p \geq \Big(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\Big)\big(q + 3\big)$$

108. Giải bất phương trình

$$\big(2 + \sqrt{2}\big)^{\sin^2 x} - \frac{2^{\cos 2x + \sin^2 x}}{\big(2 - \sqrt{2}\big)^{\cos^2 x}} + (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} > \Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^{\cos 2x}$$

109. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{1 + 3\sin x} = \log_3(3\cos y) \\ \log_2 \sqrt{1 + 3\cos y} = \log_3(3\sin x) \end{cases}$$

110. Xét phương trình lượng giác

$$\tan\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) + \tan\Big(x + \frac{\pi}{2^2}\Big) + \cdot + \tan\Big(x + \frac{\pi}{2^n}\Big) = 0$$

trong đó n là số nguyên dương.

(a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 2$ phương trình nói trên có đúng một nghiệm nằm trong khoảng $\big(0\,;\,\frac{\pi}{4}\big)$. Ký hiệu nghiệm đó là x_n.

(b) Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}_{n=2}^{+\infty}$ có giới hạn hữu hạn.

111. Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số a để hệ sau đây có một số chẵn các nghiệm

$$\begin{cases} \sin(3a - 3y) + 3\sin x = 0 \\ 2\log_4(a - y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2 \sqrt{y} + 3\log_8 2x \end{cases}$$

112. Giải phương trình

$$(1 + \cos x)^{\log_{\cos x} \sin x} = (1 + \sin x)^{\log_{\sin x} \cos x}$$

113. Giải phương trình

$$x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$$

114. Cho các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng không. Xét đa thức
$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n$$
Đặt $A = \sum_{k=1}^{n} a_k$ và $B = \sum_{k=1}^{n} ka_k$. Chứng minh rằng mọi nghiệm thực dương của đa thức không nhỏ hơn $A^{\frac{A}{B}}$.

115. Giả sử rằng tam thức $ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ có hai nghiệm phân biệt. Cho x_0 là một số thực, xác định bằng quy nạp dãy số thực $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ bởi công thức $x_n(ax_{n-1} + b) = c$. Hãy biện luận theo x_0 sự hội tụ của dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ và tìm giới hạn trong trường hợp có thể.

116. Giải hệ phương trình sau đây
$$\begin{cases} \log_2(1 + 3\sqrt{1 - \tan^2 x}) = 2 + \log_3(1 - \tan^2 y) \\ \log_2(1 + 3\sqrt{1 - \tan^2 y}) = 2 + \log_3(1 - \tan^2 x) \end{cases}$$

117. Chứng minh rằng tích của hai trong bốn nghiệm của đa thức $x^4 + x^3 - 1$ là nghiệm của đa thức $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

Các bài toán tiếp theo đây được chúng tôi sưu tầm từ cuốn sách nổi tiếng "Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics" của các cố giáo sư Toán học thuộc Liên Xô cũ đó là $D.O.Shklyarsky$, $N.N.Chentsov$ và $I.M.Yaglom$.

118. Giải phương trình $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

119. Giải và biện luận theo tham số $0 < a < \frac{1}{4}$ phương trình
$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$$

120. Hãy xác định phương trình dạng đa thức với hệ số nguyên sao cho nó có nghiệm là

   (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

   (b) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

121. Giả sử rằng α, β là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và γ, δ là các nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$. Chứng minh rằng ta có đẳng thức
$$(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma) = q^2 - p^2$$

122. Giả sử rằng α, β là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ và γ, δ là các nghiệm của phương trình $x^2 + Px + Q = 0$. Hãy tính giá trị của biểu thức $(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)$ theo các hệ số của phương trình.

123. Giả sử rằng α, β lần lượt là các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c$ và $-ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng phương trình $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ có một nghiệm nằm giữu hai số α và β.

124. Cho tam thức $p(x) = ax^2 + bx + c$. Giả sử rằng $p(x)$ không có nghiệm thực, chứng minh rằng phương trình $p(p(x)) = 0$ cũng không có nghiệm thực.

125. Cho tam thức $p(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn $\left|p(x)\right| \leq 1$ với mọi $\left|x\right| \leq 1$. Chứng minh rằng $\left|q(x)\right| \leq 1$ với mọi $\left|x\right| \leq 1$, ở đó $q(x) = cx^2 + bx + a$.

126. Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số a để hai phương trình $x^2+x+a = 0$ và $x^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm chung.

127. Xét phương trình biến phức $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$ trong đó a là tham số. Hãy xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của modul của z.

128. Trong mặt phẳng phức cho một đa giác lồi có các đỉnh có toạ vị là các số phức $c_1, c_2, \dots, c_n$. Chứng minh rằng nếu z là một nghiệm phức của phương trình
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - c_k} = 0$$
thì toạ vị của nó là một điểm trong của đa giác nói trên.

129. Giải phương trình nghiệm thực
$$\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \cdots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}} = x$$

130. Giải phương trình
$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$$

131. Giải phương trình
$$\left|x + 1\right| - \left|x\right| + 3\left|x - 1\right| - 2\left|x - 2\right| = x + 2$$

132. Giải phương trình
$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = 0$$

133. Tìm a để hệ phương trình sau có hai nghiệm, ba nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)62 + y^2 = 1 \end{cases}$$

134. Giải và biện luận hệ sau đây

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

135. Giải và biện luận hệ sau đây

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

136. Hãy xác định điều kiện cần và đủ của các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và α_4 để hệ bốn ẩn sáu phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \\ x_1 + x_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_3 \\ x_1 + x_4 = \alpha_1 \cdot \alpha_4 \\ x_2 + x_3 = \alpha_2 \cdot \alpha_3 \\ x_2 + x_4 = \alpha_2 \cdot \alpha_4 \\ x_3 + x_4 = \alpha_3 \cdot \alpha_4 \end{cases}$$

và hãy xác định các giá trị của ẩn trong các kết quả tìm được.

137. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

138. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

139. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x + yzt = 2 \\ y + xzt = 2 \\ z + xyt = 2 \\ t + xyz = 2 \end{cases}$$

140. Giả sử rằng a, b, c, d là bốn số thực đôi một khác nhau. Giải hệ bốn phương trình bốn ẩn số sau đây

$$\begin{cases} \left|a-b\right| y+\left|a-c\right| z+\left|a-d\right| t=1 \\ \left|b-a\right| x+\left|b-c\right| z+\left|b-d\right| t=1 \\ \left|c-a\right| x+\left|c-b\right| y+\left|c-d\right| t=1 \\ \left|d-a\right| x+\left|d-b\right| y+\left|d-c\right| z=1 \end{cases}$$

141. Cho số nguyên $n \geq 2$ và n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hãy xác định tất cả các nghiệm thực của hệ sau

$$\begin{cases} x_1 x_2 \quad = a_1 \\ x_2 x_3 \quad = a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} x_n = a_{n-1} \\ x_n x_1 \quad = a_n \end{cases}$$

142. Hãy xác định số nghiệm số của các phương trình dưới đây

(a) $\sin x = \frac{x}{100}$

(b) $\sin x = \lg x$

143. Xác định các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ thoả mãn hệ bất phương trình sau đây

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geq 0 \\ x_2 - 4x_3 + 3x_4 \geq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{98} - 4x_{99} + 3x_{100} \geq 0 \\ x_{99} - 4x_{100} + 3x_1 \geq 0 \\ x_{100} - 4x_1 + 3x_2 \geq 0 \end{cases}$$

144. Xác định tất cả các số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $x_1^{x_2} = x_2^{x_3} = \cdots = x_{n-1}^{x_n} = x_n^{x_1}$.

145. Chứng minh rằng nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$ thì với mọi số nguyên dương n số $x_1^n + x_2^n$ là một số nguyên không chia hết cho 5.

Những bài toán sau đây được chúng tôi sưu tầm từ các bài thi học sinh giỏi toàn Liên bang Xô Viết trước đây (**All Soviet Union Mathematical Olympiads**).

146. Hãy xác định tất cả các giá trị thực p, q, a, b sao cho phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

$$(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{20}$$

147. Chứng minh rằng nếu các số thực p_1, p_2, q_1, q_2 thoả mãn điều kiện

$$(q_1-q_2)^2 + (p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1) < 0$$

thì các phương trình $x^2+p_1x+q_1=0$ và $x^2+p_2x+q_2=0$ có nghiệm và giữu hai nghiệm của một phương trình có một nghiệm của phương trình còn lại.

148. Hãy xác định các số thực a, b, c sao đẳng thức sau

$$|ax+by+cz| + |bx+cy+az| + |cx+ay+bz| = |x|+|y|+|z|$$

nghiệm đúng với mọi số thực x, y, z.

149. Đa thức $x^{10}+?x^9+?x^8+\cdots+?x+1$ được viết trên bảng. Hai người chơi thay nhau điền các số thực vào một trong các dấu hỏi ở trên. Người chiến thắng nếu đa thức có nghiệm thực. Hỏi rằng ai sẽ chiến thắng?

150. Hãy xác định các số thực x, y thoả mãn hệ

$$\begin{cases} \frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = a \\ \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = b \end{cases}$$

ở đó a, b là các tham số thực.

151. Hãy xác định nghiệm thực của hệ sau đây

$$\begin{cases} sinx + 2sin(x+y+z) = 0 \\ siny + 3sin(x+y+z) = 0 \\ sinz + 4sin(x+y+z) = 0 \end{cases}$$

152. Biết rằng a, b là các số thực thoả mãn bất phương trình $acos(x)+bcos(3x) > 1$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng $|b| \le 1$.

153. Giải hệ thống phương trình sau đây

$$\begin{cases} y^2 = x^3-3x^2+2x \\ x^2 = y^3-3y^2+2y \end{cases}$$

154. Các số dương x, y, z thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$$

Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của biểu thức $xy + 2yz + 3zx$.

155. Giải phương trình

$$\cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{\ddots}{2 + \cfrac{x}{1 + \sqrt{x+1}}}}} = 1$$

1985 lần.

156. Chứng minh rằng nếu đồ thị của một hàm số $y = f(x)$ không thay đổi khi quay nó quanh gốc toạ độ một góc vuông thì phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất. Hãy dựng một hàm như thế.

Ba bài toán đơn giản dưới đây mang tính lịch sử nhiều hơn, được chúng tôi trích từ cuốn sách " Các bài toán cổ điển trong Toán học sơ cấp" của $V.D.Tristaiakov$

157. [Một bài toán trong cuốn sách $Arithmetic$ của Diophantus] Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}$$

158. [Bài toán Al-Karkhi] Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases}$$

159. [Bài toán Decartes] Giải phương trình sau đây

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

160. Với a, b thoả mãn điều kiện nào thì hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a \\ x^3 + y^3 + z^3 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất?

Các bài toán dưới đây được lấy từ các bài toán dự tuyển thi Toán quốc tế (Long and Short Lists problems for IMOs)

161. [IMO Longlist 1987] Chứng minh rằng nếu các nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ đều là các số thực thì $ab \le 0$.

162. [IMO Longlist 1987] Giả sử rằng các số a_{11}, a_{22} là các số thực còn $x_1, x_2, a_{12}, b_1, b_2$ là các số phức thoả mãn $a_{11}a_{22} = a_{21}\overline{a_{12}}$. Xét hai phương trình dưới đây

$$\overline{x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$\overline{x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

a) Hãy xác định điều kiện để hai phương trình đó là tương đương?

b) Hãy tìm điều kiện để $\arg x_1 - \arg x_2 > \frac{\pi}{2}$

163. [IMO Longlist 1988] Giả sử rằng a là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Chứng minh rằng $[a^{1788}]$ và $[a^{1988}]$ đều chia hết cho 17.

Các bài toán tiếp theo đây được lấy từ cuốn sách nổi tiếng "Các bài toán Olympiad" của giáo sư $I.N.Sergeiva$ trong chùm sách kinh điển "Thư viện Toán học trong Nhà trường". Cuốn sách này đã được dịch và ấn hành bởi nhà Xuất bản Hải Phòng với tựa đề tên là "Các đề thi vô địch 19 nước".

164. Giải phương trình $8^x(3x + 1) = 4$.

165. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ luôn có nghiệm thực.

166. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

167. Giải và biện luận theo $a \in \mathbb{R}$ phương trình

$$(a - 1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 2$$

168. Hãy tìm số thực $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ thoả mãn phương trình

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{97}{128}$$

169. Xác định các số tự nhiên $A \neq B$ sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos Ax + \cos Bx = 0 \\ A \sin Ax + B \sin Bx = 0 \end{cases}$$

có nghiệm?

170. Tìm cặp số $x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y \end{cases}$$

171. Giải phương trình $\big(\sin(x-y)+1\big)\big(\cos(2x-y)+1\big) = 6$

172. Đối với mỗi số nguyên dương n hãy giải phương trình

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdots \sin nx + \cos x \cdot \cos 2x \cdots \cos nx = 1$$

173. Với mỗi số nguyên dương n hãy giải phương trình

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

174. Giải hệ thống sau đây

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

175. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại duy nhất một bộ các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn phương trình

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$

176. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương n để tồn tại các số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn hệ phương trình dưới đây

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1 \end{cases}$$

177. Với mỗi số nguyên dương n, k hãy xác định tất cả các số thực không âm thoả mãn hệ phương trình dưới đây

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = 1 \\ (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = 2 \end{cases}$$

178. [West Germany MO 1980] Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

179. Đối với mỗi số nguyên dương n và số thực $a \in \mathbb{R}$ hãy giải hệ sau đây

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = a^n \end{cases}$$

180. **(COMC[7] 2000)** Giải phương trình $4 \cdot 16^{\sin^2 x} = 2^{6 \sin x}$

181. **(WMSETS [8] 1998)** Giả sử rằng a là số thực thoả mãn phương trình $x^4 - 10x^2 + a = 0$ có bốn nghiệm và trên đường thẳng thực chúng tạo ra các đoạn thẳng bằng nhau. Hãy xác định các nghiệm thực đó và chứng minh rằng không có giá trị nào khác.

182. [WMSETS 2000] Với các số nguyên a, b ta dựng phương trình $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$. Giả sử rằng r là một số không âm và cùng với $-r$ là nghiệm của phương trình. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của r?

183. **(USA[9] MO 1978)** Giả sử rằng x là nghiệm của phương trình $(3+2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2}-1)^x + 3$. Chứng minh rằng x cũng là nghiệm của phương trình

$$(\sqrt{2}+1)^x = 2\cos\frac{\pi}{9}$$

184. [USA MO 1984] Biết rằng trong các nghiệm của phương trình

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

có hai nghiệm có tích là -32. Hãy xác định k?

[7] Canadian Open Mathematics Challenge
[8] Wincosin Mathematics Science& Engineering Talent Search
[9] USA: United State of American

185. [USA MO 1990] Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$$

186. **(USA OP[10] 1995** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3-2x^2y-x^4y^2}+x^2(1-2x^2)=y^2 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=x^3(x^3-x-2y^2) \end{cases}$$

187. [Putnam MO 1986] Cho các số phức x, y, z thoả mãn điều kiện

$$x(x-1)+2yz=y(y-1)+2zx=z(z-1)+2xy$$

Chứng minh rằng chỉ có một số hữu hạn các bộ ba dạng $(x-y, y-z, z-x)$ và hãy xác định các bộ ba đó.

188. [Crux Mathematicorum Vol.22, No.4, 5-1996] Hãy xác định đa thức $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-c$ thoả mãn $abc \neq 0$ và phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên phân biệt.

189. **(CMO[11] 1996)** Giả sử rằng a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3-x-1=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1+b}+\frac{1-c}{1+c}$$

190. [CMO 1996] Hãy xác định tất cả các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y \\[2ex] \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z \\[2ex] \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x \end{cases}$$

191. [CMO 1998] Xác định tất cả các số thực x thoả mãn phương trình

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

[10] USA OP: United State of America Olympiad Program

[11] CMO: Canada Mathematical Olympiad

192. [IMO Shortlist 1995] Cho các số thực dương a, b, c. Xác định tất cả các số thực dương x, y, z thoả mãn

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc \end{cases}$$

193. Hãy xác định tất cả các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$$

194. Giải phương trình $\left|x - 1993\right|^{1993} + \left|x - 1994\right|^{1994} = 1$

195. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$$

196. Giải phương trình

$$(x^2 + 1)(y^2 + 2)(z^2 + 8) = 32xyz$$

197. Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$$

198. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$$

199. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2 \\ xy = 2 + x^2 \end{cases}$$

200. Giải các phương trình sau đây

(a) $\sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = a$ với a là tham số.

(b) $\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$

201. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x^2(y-z) = -\frac{5}{3} \\ \\ y^2(z-x) = 3 \\ \\ z^2(x-y) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

202. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 185 \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 65 \end{cases}$$

203. Xác định a, b để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} xyz+z = a \\ xyz^2+z = b \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

204. Hãy xác định tất cả các số thực x, y, z thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x^4+y^4+z^4 = xyz \end{cases}$$

205. Giả sử rằng $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_n) = n$$

206. Giải các phương trình sau đây với x là ẩn cần tìm

(a) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ca}+\dfrac{x-c}{ab} = 2\big(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\big)$

(b) $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a} = a+b+c$

(c) $\dfrac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b-c} = \dfrac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}$

(d) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{4x}{a+b+c} = 1$

(e) $\dfrac{\sqrt[p]{b+x}}{b}+\dfrac{\sqrt[p]{b+x}}{x} = \dfrac{c\sqrt[p]{x}}{a}$

(f) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=1$

(g) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$

(h) $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=1$

(i) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

(j) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(k) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$

(l) $(b-c)\tan(x+\alpha)+(c-a)\tan(x+\beta)+(a-b)\tan(x+\gamma)=0$

(m) $\sin^4 x+\cos^4 x=a$

(n) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

(o) $\cos nx+\cos(n-2)x-\cos x=0$

(p) $b\sin(a-x)=c\sin(d-x)$

(q) $\sin(x+3a)=3\sin(a-x)$

(r) $\sin 5x=16\sin^5 x$

(s) $\sin x+2\sin x\cos(a-x)=\sin a$

(t) $\sin x\sin(\gamma-x)=a$

(u) $\sin(x+\alpha)+\sin\alpha\sin x\tan(\alpha+x)=1+2\cos\alpha\cos(\alpha+x)$

(v) $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

(w) $\tan x+\tan 2x+\tan 3x+\tan 4x=0$

(x) $x^{x+1}=1$

(y) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

(z) $\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}-3\sqrt{a+b-2x}=0$

207. Giải phương trình

$$x^2\frac{(b+x)(c+x)}{(x-b)(x-c)}+b^2\frac{(b+c)(b+x)}{(b-c)(b-x)}+c^2\frac{(c+x)(x+b)}{(c-x)(c-b)}=(b+c)^2$$

với a,b,c là các tham số.

208. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=a\\ x+y+t=b\\ x+z+t=c\\ y+z+t=d \end{cases}$$

209. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2a_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2a_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2a_4 \end{cases}$$

210. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + m(y + z + v) = k \\ by + m(x + z + v) = l \\ cz + m(x + y + v) = p \\ dv + m(x + y + z) = q \end{cases}$$

211. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a \\ \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b \\ \frac{1}{t} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = c \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = d \end{cases}$$

212. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

213. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} cy + bz = 2d_1yz \\ az + cx = 2d_2zx \\ bx + ay = 2d_3xy \end{cases}$$

214. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y + z - x = \frac{xyz}{a^2} \\ z + x - y = \frac{xyz}{b^2} \\ x + y - z = \frac{xyz}{c^2} \end{cases}$$

215. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{xy}{ay+bx} = c \\ \frac{yz}{bz+cy} = a \\ \frac{zx}{az+cx} = b \end{cases}$$

216. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (b+c)(y+z) - ax = b - c \\ (c+a)(x+z) - by = c - a \\ (a+b)(x+y) - cz = a - b \end{cases}$$

ở đó $a + b + c \neq 0$.

217. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (c+a)y + (a+b)z - (b+c)x = 2a^3 \\ (a+b)z + (b+c)x - (c+a)y = 2b^3 \\ (b+c)x + (c+a)y - (a+b)z = 2c^3 \end{cases}$$

ở đó $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$

218. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{a+\lambda} + \frac{y}{b+\lambda} + \frac{z}{c+\lambda} = 1 \\ \frac{x}{a+\mu} + \frac{y}{b+\mu} + \frac{z}{c+\mu} = 1 \\ \frac{x}{a+\nu} + \frac{y}{b+\nu} + \frac{z}{c+\nu} = 1 \end{cases}$$

219. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + ay + a^2x + a^3 = 0 \\ z + by + b^2x + b^3 = 0 \\ z + cy + c^2x + c^3 = 0 \end{cases}$$

220. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + ay + a^2x + a^3t + a^4 = 0 \\ z + by + b^2x + b^3t + b^4 = 0 \\ z + cy + c^2x + c^3t + c^4 = 0 \\ z + dy + d^2x + d^3x + d^3t + d^4 = 0 \end{cases}$$

221. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z + u = m \\ ax + by + cz + du = n \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2u = k \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3u = l \end{cases}$$

222. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= a_1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + nx_1 &= a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} &= a_n \end{cases}$$

223. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots\cdots + x_n = 1 \\ x_1 + \qquad\ \ x_3 + \cdots\cdots\cdots + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + \qquad\ \ x_4 + \cdots + x_n = 3 \\ x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_{n-1} \qquad = n \end{cases}$$

224. [Hệ phương trình Vandermonde] Cho các số a, b, c không bằng nhau. Hãy giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$$

225. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$$

226. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ \frac{a^2x}{a-d} + \frac{b^2y}{b-d} + \frac{c^2z}{c-d} &= 0 \\ \frac{ax}{a-d} + \frac{by}{b-d} + \frac{cz}{c-d} &= d(a-b)(b-c)(c-a) \end{cases}$$

227. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+a)(y+l) = (a-n)(l-b) \\ (y+b)(z+m) = (b-l)(m-c) \\ (z+c)(x+n) = (c-m)(n-a) \end{cases}$$

228. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sin a + y\sin 2a + z\sin 3a = \sin 4a \\ x\sin b + y\sin 2b + z\sin 3b = \sin 4b \\ x\sin c + y\sin 2c + z\sin 3c = \sin 4c \end{cases}$$

229. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \tan x \tan y = a \\ x + y = 2b \end{cases}$$

230. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y \end{cases}$$

231. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases}$$

232. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin z}{c} \end{cases}$$

233. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\tan x}{a} = \frac{\tan y}{b} = \frac{\tan z}{c} \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

234. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a^2 \\ y(x+y+z) = b^2 \\ x(x+y+z) = c^2 \end{cases}$$

235. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a - yz \\ y(x+y+z) = b - xz \\ x(x+y+z) = c - xy \end{cases}$$

236. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y + 2x + z = a(y+x)(z+x) \\ z + 2y + x = b(z+y)(x+y) \\ x + 2z + y = c(y+z)(x+z) \end{cases}$$

237. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y+z+yz=a \\ z+x+zx=b \\ x+y+xy=c \end{cases}$$

238. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} yz=ax \\ zx=by \\ xy=cz \end{cases}$$

239. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=cxyz \\ y^2+z^2=axyz \\ z^2+x^2=bxyz \end{cases}$$

240. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y+z)=a^2 \\ y(z+x)=b^2 \\ z(x+y)=c^2 \end{cases}$$

241. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3=ax+by \\ y^3=bx+ay \end{cases}$$

242. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2=a+(y-z)^2 \\ y^2=b+(z-x)^2 \\ z^2=c+(x-y)^2 \end{cases}$$

243. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-yz=a \\ y^2-zx=b \\ z^2-xy=c \end{cases}$$

244. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2+z^2-(y+z)x=a \\ z^2+x^2-(z+x)y=b \\ x^2+y^2-(x+y)z=c \end{cases}$$

245. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2+z^2+yz=a^2 \\ z^2+x^2+zx=b^2 \\ x^2+y^2+xy=c^2 \end{cases}$$

246. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y+z)=a^3 \\ y^2(z+x)=b^3 \\ z^2(x+y)=c^3 \end{cases}$$

247. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2+z^2-2ayz=0 \\ z^2+x^2-2bxz=0 \\ x^2+y^2-2cxy=0 \end{cases}$$

248. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{y}{z}-\frac{z}{y}=a \\ \frac{z}{x}-\frac{x}{z}=b \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=a \end{cases}$$

249. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1-b_1}+\dfrac{x_2}{a_1-b_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_1-b_n}=1 \\ \\ \dfrac{x_1}{a_2-b_1}+\dfrac{x_2}{a_2-b_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_2-b_n}=1 \\ \dotfill \\ \dfrac{x_1}{a_n-b_1}+\dfrac{x_2}{a_n-b_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n-b_n}=1 \end{cases}$$

250. Giải hệ
$$\begin{cases} x+y+z+t=15 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=65 \\ x^3+y^3+z^3+t^3=315 \\ xt=yz \end{cases}$$

251. Giải phương trình sau đây
$$\sqrt{x+1}+2(x+1)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$$

252. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xz+yt=4 \\ xz^2+yt^2=6 \\ xz^3+yt^3=10 \end{cases}$$

253. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x+y=z^2 \\ x=2(y+z) \\ xy=2(z+1) \end{cases}$$

254. Giải phương trình

$$(\sqrt{x^2+1}-x)^5+(\sqrt{x^2+1}+x)^5=123$$

255. Giải phương trình

$$2000x^4+x^4\sqrt{x^2+2000}+x^2=3998000$$

256. Giải phương trình

$$\sqrt{x+1}+2(x+1)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$$

257. [Bulgary MO 1995 for K10] Tìm tất cả các nghiệm dương của phương trình

$$\log_{x+a-1}\frac{4}{x+1}=\log_a 2$$

ở đây a là một tham số lớn hơn 1.

258. [Bulgary MO 1995 for K8] Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số thực a sao cho hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x+4|y|=|x| \\ |y|+|x-a|=1 \end{cases}$$

259. Bulgary MO 1995 for K10] Tìm tất cả các giá trị thực p,q sao cho các nghiệm của các phương trình $x^2-px-1=0$ và $x^-qx-1=0$ theo một thứ tự nào đó sẽ lập thành một cấp số cộng gồm bốn số hạng.

260. [Bulgary MO 1995] Cho đa thức $f(x)=x^3-(p+5)x^2-2(p-3)(p-1)x+4p^2-24p+36$ trong đó p là một tham số thực. Hãy chứng minh rằng $3-p$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ và hãy xác định tất cả các giá trị của p để hai nghiệm của phương trình đó là độ dài cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $4\sqrt{2}$.

261. [Bulgary MO 1996] Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình
$$x^2 - 2x - |x - 1 - a| - |x - 2| + 4 \geq 0$$
nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x.

262. [Bulgary MO 1996] Trong mặt phẳng toạ độ hãy xác định tất cả các điểm có toạ độ (x, y) sao cho có đúng một số thực z thoả mãn
$$xz^4 + yz^3 - 2(x + |y|)z^2 + yz + x = 0$$

263. [Bulgary MO 1996] Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số thực a để bất phương trình
$$x^6 - 6x^5 + 12x^4 + ax^3 + 12x^2 - 6x + 1 \geq 0$$
nghiệm đúng với mọi giá trị thực x.

264. [Bulgary MO 1997] Cho F là một tập hợp các điểm có toạ độ (x, y) trong mặt phẳng thoả mãn
$$||x| - |y|| + |x| + |y| = 2$$
Chứng minh rằng tập hợp đó là tập hợp các điểm nằm trên các cạnh của một hình chữ nhật và hãy xác định tất cả các điểm thuộc F thoả mãn hệ thức
$$2y = |2x - 1| + 3$$

265. [Bulgary MO 1997] Hãy xác định tất cả các số thực x thoả mãn các số $\tan(\frac{\pi}{12} - x)$, $\tan(\frac{\pi}{12} - x)$ và $\tan(\frac{\pi}{12} + x)$ lập thành một cấp số nhân theo thứ tự đó.

266. [Bulgary MO 1997] Cho phương trình $|x - a| + 15 = 6|x + 2|$ trong đó a là tham số thực.

   a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số a phương trình đã cho luôn có đúng hai nghiệm phân biệt.

   b) Ký hiệu hai nghiệm đó là x_1, x_2. Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| \geq 6$ và hãy xác định tất cả các giá trị của a để dấu bằng xảy ra.

267. [Bulgary MO 1997] Cho $f(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$ trong đó a là một tham số thực. Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số a sao cho bất phương trình $|f(x)| \leq 1$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x trong đoạn $[-1; 1]$.

268. [Bulgary MO 1997] Hãy xác định số nguyên dương bé nhất sao cho phương trình
$$\cos^2 \pi(a - x) - 2\cos \pi(a - x) + \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos(\frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi}{3}) + 2 = 0$$

269. [Bulgary MO 1998] Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số thực a để phương trình $x^3 - 3x^2 + (a^2+2)x - a^2 = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 sao cho ba số $\cos\frac{2\pi x_1}{3}, \cos\frac{2\pi x_2}{3}$ và $\cos\frac{2\pi x_3}{3}$ theo một thứ tự nào đó sẽ lập thành một cấp số cộng.

270. [Bulgary MO 1998] Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-4} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-3}$. Hãy xác định theo a số nghiệm thực của phương trình

$$f(x) = a\sqrt{\frac{x-3}{x}}$$

271. [Bulgary MO 1998] Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số a để hai bất phương trình $|x+1| + |2-x| < a$ và $\frac{5a-8}{6x-5a+5} < -\frac{1}{2}$ là tương đương.

272. [Bulgary MO 1998] Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình $|ax^2 - 3x - 4| \leq 5 - 3x$ nghiệm đúng với mọi x trong đoạn $[-1; 1]$.

273. [Bulgary MO 1998] Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Hãy xác định số các nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) = 0$.

274. [Bulgary MO 1998] Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho chúng không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng phương trình

$$\sqrt{1+a_1x} + \sqrt{1+a_2x} + \cdots + \sqrt{1+a_nx} = n$$

có không quá một nghiệm thực khác không.

275. [Bulgary MO 1998] Cho phương trình $x^2 - 3px - p = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt là x_1, x_2 trong đó p là một tham số thực. Chứng minh rằng

a) Chứng minh rằng $3px_1 + x_2^2 - p > 0$.

b) Hãy xác định giá trị bé nhất của biểu thức

$$A = \frac{p^2}{3px_1 + x_2^2 + 3p} + \frac{3px_2 + x_1^2 + 3p}{p^2}$$

276. [Bulgary MO 1998] Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số dương a để bất phương trình $a^{\cos x} + a^{2\sin^2 x} \leq 2$ nghiệm đúng với mọi x thực.

277. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} = \sqrt[3]{4x-3}$$

278. Cho các số thực a, b, c. Hãy giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (ax^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (by^2+y+1)z^2x^2 \\ x^2(x+y)^2 = (cz^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ có nghiệm (x, y, z) thoả mãn $xyz \neq 0$ khi và chỉ khi $a+b+c \geq -\frac{1}{4}$

279. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$$

280. Giải bất phương trình

$$2\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1} \geq \sqrt[3]{2x-1}$$

281. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ với $c \neq 0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $x^3 - bx^2 + acx - c^2 = 0$ cũng có ba nghiệm phân biệt.

282. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{85}{3} \\ 2x + \frac{1}{x+y} = \frac{85}{3} \end{cases}$$

283. Xét hệ phương trình hai ẩn x, y sau đây

$$\begin{cases} k(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ k(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (k-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

a) Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số k để hệ có nghiệm.

b) Giải hệ với $k = 16$.

284. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x^3(2+3y) = 1 \\ x(y^3-2) = 3 \end{cases}$$

285. Cho số thực $a \geq 1$. Hãy xác định tất cả các bộ ba các số thực (x, y, z) thoả mãn $|y| \geq 1$ thoả mãn phương trình

$$\log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + xyz)^2 + \frac{8 + \sqrt{4z - y^2}}{2} = 0$$

286. Hãy xác định điều kiện cần và đủ của tham số m để hệ phương trình dưới đây có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x^2 = (2+m)y^3 - 3y^2 + my \\ y^2 = (2+m)z^3 - 3z^2 + mz \\ z^2 = (2+m)x^3 - 3x^2 + mx \end{cases}$$

287. Giải phương trình sau đây

$$\sqrt[3]{3x^2 - x + 2001} + \sqrt[3]{3x^2 - 7x + 2002} + \sqrt[3]{6x - 2003} = \sqrt[3]{2002}$$

288. Phương trình $x^2 = 100^{\sin x}$ có bao nhiêu nghiệm? Hãy giải thích câu trả lời của bạn.

289. Giải phương trình sau đây

$$(x - 18)(x - 7)(x + 35)(x + 90) = 2001x^2$$

290. Giả sử rằng a, b, c là ba số thực thoả mãn phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$$

291. Giải phương trình

$$\frac{6x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - x}} = 3 + 2\sqrt{x - x^2}$$

292. Cho hai số a, b thoả mãn bất đẳng thức $a + b \geq 2$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình $x^2 + 2a^2bx + b^5 = 0$ và $x^2 + 2ab^2x + a^5 = 0$ có nghiệm.

293. Giải phương trình $(x - 2)\sqrt{x - 1} - \sqrt{2}x + 2 = 0$.

294. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 = 2 - y \\ y^3 = 2 - x \end{cases}$$

295. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_i} = n \\ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_i + b^2 - 1} = bn \end{cases}$$

trong đó n là số nguyên dương, $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$.

296. [Proposed by Trần Nam Dũng] Xác định số thực c lớn nhất thoả mãn điều kiện: với mọi cặp số nguyên dương (m, n) bất phương trình

$$\sin(mx) + \cos(nx) \geq c$$

luôn có nghiệm.

297. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[m]{x_i} = \sqrt[m]{u}n \\ \sum_{k=1}^{n} \sqrt[m]{x_i + a} = \sqrt[m]{u + a}n \end{cases}$$

298.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_i + a} = pn \\ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_i + c} = qn \end{cases}$$

trong đó $a, c, p, q \in \mathbb{R}$ và $a - c = p^2 - q^2$.

299. Giả sử rằng a, b là các số dương thoả mãn phương trình $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ có ba nghiệm lớn hơn 1. Xác định giá trị a, b để biểu thức

$$\frac{b^n - 3^n}{a^n}$$

đạt giá trị bé nhất và tìm giá trị nó.

300. Giải phương trình

$$x + \sqrt{5 + \sqrt{x - 1}} = 6$$

301. Giải phương trình

$$4x^2 - 4x - 10 = \sqrt{8x^2 - 6x - 10}$$

.

302. Chứng minh rằng nếu x_0 là một nghiệm dương của phương trình

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

thì ta có bất đẳng thức

$$2 - \frac{1}{n} < x_0 < 2$$

ở đây n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2.

303. Giải hệ dưới đây

$$\begin{cases} x_1(x_2 - x_3 + x_4) < 0 \\ x_2(x_3 - x_4 + x_5) < 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_6(x_7 - x_8 + x_9) < 0 \\ x_7(x_8 - x_9 + x_1) < 0 \\ x_8(x_9 - x_1 + x_2) < 0 \\ x_9(x_1 - x_2 + x_3) < 0 \end{cases}$$

304. Giải và biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$ phương trình sau đây

$$\arctan \frac{2x}{1 - x^2} = m\sqrt{1 - x^2} + 2\arctan x$$

305. Giải phương trình $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$.

306. Giải phương trình $a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}$

307. Tìm a để phương trình $x^3 - a = \sqrt[3]{x + a}$ có ba nghiệm phân biệt.

308. Giải phương trình $5^x + \log_5(x + 1) = 1$.

309. Tìm a để phương trình $\sqrt{3a + \sqrt{3a + 2x - x^2}} = 2x - x^2$ có nghiệm.

310. Giải phương trình $x^4 - 13x^2 + 18x - 5 = 0$.

311. Giải phương trình $6x^4 + 8x^2 + 6 = (x^4 + 2x^2 + 1)(1 + 4y - y^2)$

312. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$

313. Giải phương trình $(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3 \cdot 4^{\cos x}$

314. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 125y^5 - 125y^3 + 6\sqrt{15} = 0 \end{cases}$$

315. Giải phương trình $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$.

316. [Proposed by Hà Duy Hưng] Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x - 3)y^2 + 155 = 48(x + y) \end{cases}$$

317. Cho hai phương trình

$$\cos 2x + a\cos x + 2 = 0$$
$$\cos 2x + b\cos x + 2 = 0$$

Giả sử rằng mỗi phương trình đều có bốn nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 2\pi)$. Chứng minh rằng phương trình $\cos 2x + (a+b)\cos x + 5 = 0$ vô nghiệm.

318. Các số thực a, b, c thoả mãn điều kiện phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$$

319. Xác định tất cả các giá trị thực a thoả mãn phương trình

$$\cos x^3 = \cos(x+a)^3$$

với mọi x.

320. Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a < b$ và $f(x) \geq 0$ với mọi x. Hỏi rằng biểu thức

$$\frac{a+b+c}{b-a}$$

có thể nhận giá trị bé nhất là bao nhiêu?

321. Giải phương trình

$$\frac{1998x^4 + x^4\sqrt{x^2+1998}}{1997} = 1998$$

322. [Vietnam MO 1998 for Secondery School] Giải phương trình

$$x^4 - 8\sqrt{2}x + 12 = 0$$

323. Giải phương trình $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1 = 0$

324. Giải phương trình

$$\frac{(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} = \frac{1}{x}$$

325. Giải phương trình

$$(a^2-a)^2(x^2-x+1)^3 = (a^2-a+1)^3(x^2-x)^2$$

326. Giải phương trình

$$(a+x)^n + (a-x)^n = (a+b)^n + (a-b)^n$$

trong đó $a \neq 0$ và n là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng hai.

327. Giải phương trình

$$x = 1 - 1978(1 - 1978x^2)^2$$

328. Giải phương trình

$$x(x^2-1) = \sqrt{2}$$

329. Giải phương trình

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a$$

330. Giải phương trình

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a$$

331. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt[6]{1-x} = 1$$

332. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x^2} = (\frac{2}{3} - \sqrt{x})^2$$

333. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}$$

334. Giải phương trình

$$\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$$

335. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(x_2 + \frac{a}{x_2}) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(x_3 + \frac{a}{x_3}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}) \end{cases}$$

336. Giải phương trình

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x_1 = \cos(\pi x_2) \\ 3\sqrt{3}x_2 = \cos(\pi x_3) \\ 3\sqrt{3}x_3 = \cos(\pi x_4) \\ 3\sqrt{3}x_4 = \cos(\pi x_1) \end{cases}$$

337. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1^2 &= x_2 + 1 \\ x_2^2 &= x_3 + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}^2 &= x_n + 1 \\ x_n^2 &= x_1 + 1 \end{cases}$$

338. Giải phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = bx + cy - az \\ y^2 + z^2 = ay + bz - cx \\ z^2 + x^2 = cz + ax - by \end{cases}$$

339. Hãy xác định các số a, b, c, d, e, f để hai phương trình $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ và $x^2 + y^2 - 1 = 0$ tương đương với nhau.

340. Tìm điều kiện để hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và $px^2 + qx + r = 0$ có nghiệm chung.

341. Hãy xác định xem phương trình
$$x = 1978 \sin x - 197$$
có bao nhiêu nghiệm thực?

342. Hãy xác định tất cả các giá trị của a và b sao cho hệ
$$\begin{cases} \left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$
chỉ có đúng một nghiệm thực với $x > 0$.

343. Hãy xác định tất cả các giá trị của a sao cho hệ
$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$
có ít nhất một nghiệm thực với mọi b.

344. Hãy xác định tất cả các giá trị của a và b sao cho hệ
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$
có ít nhất một nghiệm thoả mãn $x_k > 0$ với $k = 1, 2, 3, 4$.

345. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\sqrt[3]{x+\cdots}}}=2$$

346. Giải phương trình

$$(x+1)^{(x+1)^{(x+1)^{\vdots}}}=4$$

347. Cho trước 12 số thực a_k, b_k, c_k với $k = 1, 2, 3, 4$. Đặt

$$A = (x-a_1)^2 + (x-b_1)^2 - c_1^2$$

$$B = (x-a_2)^2 + (x-b_2)^2 - c_2^2$$

$$C = (x-a_3)^2 + (x-b_3)^2 - c_3^2$$

$$D = (x-a_4)^2 + (x-b_4)^2 - c_4^2$$

Chứng minh rằng trong $2^4 = 16$ hệ bất phương trình dạng

$$\begin{cases} A \lesseqgtr 0 \\ B \lesseqgtr 0 \\ C \lesseqgtr 0 \\ D \lesseqgtr 0 \end{cases}$$

có ít nhất hai hệ vô nghiệm.

348. Giải bất phương trình

$$\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

349. [Czech and Slovak Republics MO 1999] Hãy xác định tất cả các số thực a, b sao cho hệ hai phương trình

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} = a \\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b \end{cases}$$

có nghiệm thực.

350. [Romania MO 1999] Với a, b dương, ta ký hiệu $t(a, b)$ là nghiệm dương của phương trình

$$(a+b)x^2 - 2(ab-1)x - (a+b) = 0$$

Đặt $M = \{\,(a,b)\,|\,a \neq b, t(a,b) \leq \sqrt{ab}\}$. Hãy xác định tất cả các cặp $(a, b) \in M$ sao cho $t(a, b)$ đạt giá trị bé nhất.

351. [Romania MO 1999] Cho các số thực a, b, c với $a \neq 0$ là các số phức. Ký hiệu z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ và đặt w_1, w_2 là các nghiệm của phương trình $(a + \overline{c})z^2 + (b + \overline{b})z + (\overline{a} + c) = 0$. Chứng minh rằng nếu $|z_1|, |z_2| < 1$ thì $|w_1| = |w_2| = 1$.

352. [Vietnam MO 1999] Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 262x - y + 1 \\ y^3 + 4x + 1\ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

353. [Vietnam Selection Team for IMO 1999] Xét tất cả các số thực a, b thoả mãn $a \neq 0$, $a \neq b$ và tất cả các nghiệm của phương trình

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$$

là các số thực và dương. Xác định giá trị bé nhất có thể của biểu thức

$$P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a(b - a)}$$

354. [Poland MO 2000] Cho số nguyên $n \geq 2$. Hỏi rằng hệ sau có bao nhiêu nghiệm thực không âm

$$\begin{cases} x_1 + x_n^2 = 4x_n \\ x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \end{cases}$$

355. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 + 4xy - 2y^2 = 16 \end{cases}$$

356. Giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = m \\ \frac{xyz}{y+z} = 1 \\ \frac{xyz}{z+x} = 2 \end{cases}$$

357. Giải phương trình $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$.

358. Giải hệ

$$\begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ xy = 2(z + 1) \end{cases}$$

359. Giải hệ

$$\begin{cases} xy = x + 3y \\ yz = 2(2y + z) \\ zx = 3(3z + 2x) \end{cases}$$

360. Giải hệ

$$\begin{cases} (x + y + z)^3 = 12t \\ (y + z + t)^3 = 12x \\ (x + z + t)^3 = 12y \\ (x + y + t)^3 = 12z \end{cases}$$

361. Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

362. Giải các phương trình sau đây

(a) $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

(b) $\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$

(c) $\sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

(d) $\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$

(e) $2\sqrt{(2-x)(5-x)} = x + \sqrt{(2-x)(10-x)}$

363. Giải các phương trình và bất phương trình dưới đây

(a) $\sqrt{2x + 15} = 32x^2 + 32x - 20$

(b) $\sqrt{x^2 - x + 19} + \sqrt{17x^2 + 8x + 13} + \sqrt{13x^2 + 17x + 7} = 3\sqrt{3}(x + 2)$

(c) $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$

(d) $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y - 3} = \sqrt[4]{x^4 - 16} + 5 - y$

(e) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq \frac{9}{16}$

(f) $\sqrt{x^2 - 8x + 816} + \sqrt{x^2 + 10x + 267} = \sqrt{2003}$

(g) $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{35}{12}$

(h) $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$

364. Giải hệ

$$\begin{cases} x^2 + x - y - 1 = 0 \\ y^2 + y - z - 1 = 0 \\ z^2 + z - t - 1 = 0 \\ t^2 + t - x - 1 = 0 \end{cases}$$

365. Xác định m để hệ sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} x^2+y^2-x^2+xy-yz-zx=1 \\ y^2+z^2+yz=2 \\ x^2+z^2+zx=m \end{cases}$$

366. Giải hệ

$$\begin{cases} (x-1)^4(y-2)^2z^3t^6=1024 \\ 4x^2+z^3+16y+t^6=8x+76 \\ x\geq 1; y\geq 2; z\geq 0; t\geq 0 \end{cases}$$

367. Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+21}=\sqrt{y-1}+y^2 \\ \sqrt{y^2+21}=\sqrt{x-1}+x^2 \end{cases}$$

368. Tìm m để phương trình

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$$

có nghiệm.

369. Giả sử rằng đa thức $p(x)=x^5+ax^2+b$ có năm nghiệm thực x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Ký hiệu $f(x)=x^2-3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)\cdot f(x_4)\cdot f(x_5)\geq -234$$

370. Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số a để phương trình

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}-\sqrt{8+2x-x^2}=a$$

có duy nhất một nghiệm thực.

371. Giải hệ sau đây

$$\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\geq 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$$

372. Giải hệ sau đây

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=10 \\ x^7+y^7+z^7=350 \end{cases}$$

373. Giải và biện luận theo tham số a phương trình

$$a\cdot\frac{9x^8+84x^6+126x^4+36x^2+1}{x^8+36x^6+126x^4+84x^2+9}+x\cdot\frac{9a^8+84a^6+126a^4+36a^2+1}{a^8+36a^6+126a^4+84a^2+9}=0$$

374. Giải các phương trình dưới đây

    (a) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}=\sqrt[4]{x+80}$

    (b) $2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1-\sqrt{x^2+2}$

375. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m$$

376. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy^3=9 \\ x+3y=6 \end{cases}$$

377. Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\cdots+\sqrt{1+x_n}=n\sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\cdots+\sqrt{1-x_n}=n\sqrt{\frac{n-1}{n}} \end{cases}$$

ở đây $n>1$ là một số nguyên.

378. Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình $x^5-x^3+x-2=0$ đều nằm trong khoảng $\left(\sqrt[6]{3};\sqrt[6]{4}\right)$

379. Giả sử rằng a,b,c là các số thực thoả mãn

$$\frac{a}{2003}+\frac{b}{2004}+\frac{c}{2005}=0$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

380. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+y^3=3xy+1 \\ x^{2004}+y^{2004}=\frac{1}{2^{2003}} \end{cases}$$

381. Giải phương trình

$$\sqrt{x-1+\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}+\sqrt{x-2+\sqrt[3]{(x-2)^2(x-1)}}=\sqrt{(2x-3)^3}$$

382. Cho các số dương x,y,z thoả mãn hệ

$$\begin{cases} 3x^2+3xy+y^2=75 \\ y^2+3z^2=63 \\ z^2+zx+x^2=48 \end{cases}$$

Hãy xác định giá trị của biểu thức $xy+2yz+3zx$.

383. Hãy tìm tất cả các giá trị của a, b để bất phương trình

$$\left| 2\sin^2 x + a\sin x + b \right| \le 1$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

384. Giải phương trình

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = a$$

với a là tham số.

385. Giải phương trình

$$3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2+3\sqrt{2})\cos x$$

386. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x(x+y) + y(y+z) = 0 \\ x(x+1) + y(2z+1) = 0 \\ (x+y)^2 + (y+z)^2 = \dfrac{(x+1)^2 + (2z+1)^2}{2004} \end{cases}$$

387. [04-30 Mathematical Olympiad 2000] Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (3 - \frac{5}{y+42x})\sqrt{2y} = 4 \\ (3 + \frac{5}{y+42x})\sqrt{x} = 2 \end{cases}$$

388. [04-30 Mathematical Olympiad 2000] Giải phương trình

$$2\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 5 = 0$$

389. Giải phương trình

$$\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}$$

390. Tìm m để phương trình

$$\cos x + \sqrt{2-\cos^2 x} + \cos x\sqrt{2-\cos^2 x} = m$$

có nghiệm?

391. Giải phương trình

$$2x^2 + \sqrt{1-x^2} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$$

392. Giải hệ

$$\begin{cases} 6x(y^2+z^2) = 13yz \\ 3y(z^2+x^2) = 5zx \\ 6z(x^2+y^2) = 5xy \end{cases}$$

393. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+(1-\sqrt{3}x+2}+\sqrt{x^2+(1+\sqrt{3})x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}=3\sqrt{2}$$

394. Giải hệ

$$\begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = (z-1)^2 \\ z = (t-1)^2 \\ t = (x-1)^2 \end{cases}$$

395. Giả sử rằng hai phương trình $x^2+ax+1=0$ và $x^2+bx+1=0$ thoả mãn tích của một nghiệm của phương trình thứ nhất với một nghiệm nào đó của phương trình thứ hai là nghiệm của phương trình $x^2+cx+1=0$. Chứng minh rằng ta có hệ thức

$$a^2+b^2+c^2+abc=4$$

396. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam thức $f(x)=ax^2+bx+c$ có nghiệm trong khoảng $(0;1)$ là tồn tại các số dương $m<n<p$ thoả mãn $mp \geq n^2$ và $ma+nb+pc=0$.

397. Giải hệ

$$\begin{cases} x^3-3x = y(3x^2-1) \\ y^3-3y = z(3y^2-1) \\ z^3-3z = t(3z^2-1) \\ t^3-3t\ = x(3t^2-1) \end{cases}$$

398. Giải phương trình

$$2\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 5 = 0$$

399. [04-30 Mathematical Olympiad 2000] Hãy xác định m để phương trình

$$(4m-3)\sqrt{x+3}+(3m-4)\sqrt{1-x}+m-1=0$$

có nghiệm?

400. Giả sử rằng a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ sắp xếp theo thứ tự tằng dần. Hãy xác định giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

401. Giải phương trình

$$(x^4 + x^2 + 2 + \sqrt{3})(x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 3$$

402. Hãy xác định giá trị bé nhất của tham số nguyên dương n sao cho phương trình

$$x^{12} - 4x^4\sqrt{x^n - 1} + 1 = 0$$

có nghiệm.

403. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{x_n \cdot x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}} \quad \text{với} \quad n = \overline{1, 8} \\ x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_9 \end{cases}$$

404. Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = a(x^2 - x)^2 + b(x^2 - x) + c$. Tìm a, b, c để giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0, 1]$ của $f(x)$ tương ứng bằng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0, 1]$ của hàm số $g(x)$.

405. [Mathematical Excalibur Vol.8, No.5, 2003] Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}$$

406. [Proposed by Fei Zhenpeng, Math. Excalibur Vol.8, No.5, 2003] Giả sử rằng α, β, γ là các số phức thoả mãn hệ

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 7 \end{cases}$$

Hãy xác định giá trị của biểu thức $\alpha^{21} + \beta^{21} + \gamma^{21}$.

407. [Dutch Mathematical Olympiad 1983] Cho a, b, c là các số thực thoả mãn

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$$

Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của p và chứng minh rằng $abc + p = 0$.

408. [Putnam Exam 1974] Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình

$$\cos \pi x = \frac{1}{3}$$

là các số vô tỷ.

409. [Math.Excal 1996] Cho $n > 2$ là một số nguyên và c là một số thực khác không còn z là một nghiệm không thực của phương trình $x^n + cx + 1 = 0$. Chứng minh rằng

$$|z| \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$$

410. [Problem 52, Math.Excal.] Cho các số thực phân biệt a, b, c thoả mãn hệ

$$\begin{cases} a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25 \\ b^3 = 3(c^2 + a^2) - 25 \\ c^3 = 3(a^2 + b^2) - 25 \end{cases}$$

Hãy xác định giá trị của biểu thức abc.

411. [British MO 1975; Problem 59, Math.Excali.] Cho n là một số nguyên lớn hơn 2. Hãy xác định tất cả các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện

$$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$

412. [Greek MO 1995; Problem 68, Math.Excali.] Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$ thoả mãn tất cả các nghiệm của nó đều thực và lớn hơn 1 thì phương trình

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

có ít nhất một nghiệm thực.

413. [Israel MO 1995; Problem 71, Math.Excali.] Hãy xác định tất cả các số thực x, y, z thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y \\ y + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = z \\ z + \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) = x \end{cases}$$

414. [Problem 86, Math. Excali.] Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x + y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 + \dfrac{1}{x + y}\right) = 2 \end{cases}$$

415. [Vietnam MO 1996; Problem 91, Math. Excali.] Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \end{cases}$$

416. [Russia MO 1994; Problem 143, Math. Excali.] Giải phương trình

$$\cos\cos\cos\cos x = \sin\sin\sin\sin x$$

417. [HongKong TST 2001] Hãy xác định tất cả các số thực x thoả mãn

$$(2^x-4)^3+(4^x-2)^3=(4^x+2^x-6)^3$$

418. [HongKong TST 1989] Giải bất phương trình

$$x^{-3x-8} > x^7$$

với $x > 0$

419. [HongKong TST 1989] Hỏi rằng phương trình

$$\frac{x}{1988} = \sin x$$

có bao nhiêu nghiệm?

420. [Chọn đội tuyển trường KHTN Hanoi 2003] Giải phương trình

$$8t^3+12t^2+469t-48\sqrt{2}2^t+69=0$$

421. [Crux Mathematicorum 1996, Vol.22, No.4, Problem M 2150] Giải phương trình sau đây

$$\sqrt{1-x} = 2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$$

422. Giải phương trình

$$4^x = 2^x + 6$$

Hà Nội ngày 30 tháng 8 năm 2003

Hà Duy Hưng.