BÀI 2.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT. HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

A. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT:

Đặt điều kiện cho $\log f(x)$ là: $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

1. Dạng cơ bản: $\log f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

2. Đưa về cùng cơ số:

Biến đổi phương trình về dạng: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (*)

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$

3. Đặt ẩn số phụ:

Đặt t = log x để đưa phương trình logarit về phương trình đại số đối với t.

4. Đoán nhận nghiệm và chứng minh nghiệm đó là duy nhất.

B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT.

Ta có thể dùng các phương pháp biến đổi như đối với phương trình logarit và sử dụng các công thức sau:

. Nếu a > 1 thì: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$

$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$

. Nếu 0 < a < 1 thì: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$

$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$

Tổng quát ta có:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] > 0 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0,\ g(x) > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] \geq 0 \end{cases}$$

II. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1:

Tìm tất cả m để phương trình: $\sqrt{(\sqrt{2}+x)^m} + \sqrt{(\sqrt{2}-x)^m} = 2\sqrt{2}$ là hệ quả của phương trình:

$$\frac{\log_2(9-x^3)}{\log_2(3-x)} = 3 \quad (1)$$

(ĐH Bách Khoa TPHCM năm 1994)

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 9 - x^3 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{9} \\ x \neq 2 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 9 - x^3 = (3-x)^3 \Leftrightarrow 9x^2 - 27x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thế x = 1 vào phương trình: $\sqrt{(\sqrt{2}+x)^m} + \sqrt{(\sqrt{2}-x)^m} = 2\sqrt{2}$

ta được: $\sqrt{(\sqrt{2}+x)^m} + \sqrt{(\sqrt{2}-x)^m} = 2\sqrt{2}$ (2)

Đặt $t = (\sqrt{2}+1)^{\frac{m}{2}}$ $\quad \left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1\right)$

$(2) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}+1 \\ t = \sqrt{2}-1 \end{array}\right.$

$t = \sqrt{2}+1 : (\sqrt{2}+1)^{\frac{m}{2}} = \sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 2$

$t = \sqrt{2}-1 : (\sqrt{2}+1)^{\frac{m}{2}} = \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}+1)^{-1}$

$\Leftrightarrow \frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy $m = 2 \vee m = -2$

Ví dụ 2:

Giải bất phương trình:

$$\frac{\log_2(x^2-9x+8)}{\log_2(3-x)} < 2 \quad (*)$$

(ĐH Tổng hợp TPHCM năm 1964)

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x^2-9x+8>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \vee x>8 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x<1$

$\Rightarrow 3-x>2>1 \Rightarrow \log_2(3-x)>0$

$(*) \Leftrightarrow \log_2(x^2-9x+8) < 2\log_2(3-x) = \log_2(3-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2-9x+8<(3-x)^2 \Leftrightarrow 3x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

So với điều kiện $\Rightarrow -\frac{1}{3}<x<1$

Ví dụ 3:

Giải bất phương trình: $\log_x\left(x-\frac{1}{4}\right) \ge 2$

(ĐH Huế năm 1998)

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 0<x\ne 1 \\ x-\frac{1}{4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4} \\ x\ne 1 \end{cases}$

$\log_x\left(x-\frac{1}{4}\right) \ge 2 \Leftrightarrow \log_x\left(x-\frac{1}{4}\right) \ge \log_x x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4}, x\ne 1 \\ (x-1)\left(x-\frac{1}{4}-x^2\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4}, x\ne 1 \\ (x-1)(4x^2-4x+1) \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4}, x\ne 1 \\ (x-1)\left(x-\frac{1}{4}-x^2\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4}, x\ne 1 \\ x-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4} \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4}<x<1$

Ví dụ 4:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{1+x} 1-2y+y^2) + \log_{1-y}(1+2x+x^2) = 4 & (1) \\ \log_{1+x}(1+2y) + \log_{1-y}(1+2x) = 2 & (2) \end{cases}$$

(ĐH Quốc Gia TPHCM năm 1997)

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 0,1-y\ne 1 \\ 0<1+x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y<1 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y)^2 + \log_{1-y}(1+x)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y) + \log_{1-y}(1+x) = 2 \quad (3)$

Đặt $t=\log_{1+x}(1-y)$, $\log_{1-y}(1+x) = \frac{1}{\log_{1+x}(1-y)} = \frac{1}{t}$

$(3) \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$

$\Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y)=1 \Leftrightarrow 1-y=1+x \Leftrightarrow x=-y(x>-1)$

Thay y = - x vào phương trình (2):

$\log_{1+x}(1-2x) + \log_{1+x}(1+2x) = 2$

$\Leftrightarrow \log_{1+x}(1-4x^2) = \Leftrightarrow 1-4x^2 = (1+x)^2 (x\ne 0)$

$\Leftrightarrow 5x^2+2x=0 \Leftrightarrow 5x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5} \Rightarrow y=\frac{2}{5}$

Vậy nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ.

2.1. Giải bất phương trình: $\log_2(7.10^x - 5.25^x) > 2x + 1$

(ĐH Thủy Sản 1999).

2.2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

(Học Viện Công nghệ bưu chính viễn thông 1999).

2.3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)\ (2 + xy) \quad (1) \\ x^3 + y^3 = 16\ (2) \end{cases}$$

(ĐH Ngoại Thương năm 1999).

2.4. Giải bất phương trình: $\dfrac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5-x)} > 3$ (a là tham số > 0, khác 1)

(ĐH Y DƯỢC TPHCM)

HƯỚNG DẪN VÀ GIẢI TÓM TẮT

2.1.

$\log_2(7.10^x - 5.25^x) > 2x + 1$

$\Leftrightarrow \log_2(7.10^x - 5.25^x) > \log_2 2^{2x+1}$

$\Leftrightarrow 7.10^x - 5.5^{2x} > 2^{2x+1}$

$\Leftrightarrow 5.5^{2x} - 7.2^x.5^x + 2.2^{2x} < 0$

$\Leftrightarrow 5.\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} - 7\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x} + 2 < 0 \qquad (1)$

Đặt $t = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0$

$(1) \Leftrightarrow 5t^2 - 7t + 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < t < 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < \left(\dfrac{5}{2}\right)^x < \left(\dfrac{5}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1} < \left(\dfrac{5}{2}\right)^x < \left(\dfrac{5}{2}\right)^0$

$\Leftrightarrow -1 < x < 0$ (vì $a = \dfrac{5}{2} > 1$)

2.2. (I) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 4^{\frac{5}{2}} \\ \log_3(x-y) = \log_3 3 - \log_3(x+y) = \log_3 \dfrac{3}{x+y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} \\ x - y = \dfrac{3}{x+y} \\ x > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} \ (1) \\ x^2 - y^2 = 3 \ (2) \\ x > y \qquad (3) \end{cases}$$

Giải (Δ): Đặt $t = \dfrac{x}{y}$

$$(1) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 2 \end{array}\right.$$

$$t = \frac{1}{2} :\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2x$$

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x^2 = 3 \Leftrightarrow -3x^2 = 3$ VN

$$t = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Leftrightarrow x = 2y$$

$$(2) \Leftrightarrow 4y^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 < (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ.

2.3. $(I)\begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2+xy) & (1) \\ x^3 + y^3 = 16 & (2) \end{cases}$

(1) có điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow xy + 2 > 0$

. Nếu $x > y$: (1) $\Rightarrow \begin{cases} VT > 0 \\ VP < 0 \end{cases} \Rightarrow$ (1) VN

. Nếu $x < y$: (1) $\Rightarrow \begin{cases} VT < 0 \\ VP > 0 \end{cases} \Rightarrow$ (1) VN

Vậy $x = y$ (từ (1))

Thế vào (2): $2x^3 = 16 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow (I)$ có nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

2.4. $\dfrac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5 - x)} > 3$ (*) $(0 < a \neq 1)$

Điều kiện $\begin{cases} 35 - x^3 > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{35} \sim 3{,}27 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{35}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\log_{5-x}(35 - x^3) \Rightarrow 5 - x > 1}{\log_{5-x} a . \log_a(5 - x)} > 3 \Leftrightarrow \log_{5-x}(35 - x^3) > 3$$

$\Leftrightarrow 35 - x^3 > (5 - x)^3$

$\Leftrightarrow 35 - x^3 > 125 - 75x + 15x^2 - x^3$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3 < \sqrt[3]{35}$

$\Rightarrow 2 < x < 3$