BÀI TẬP LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN MIỀN NAM LẦN THỨ XVIII

Chủ đề: PHƯƠNG TRÌNH HÀM (trên $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$)

(VĂN PHÚ QUỐC- GV. TRƯỜNG ĐH QUẢNG NAM)

1. Cho hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $f(m+n)=f(m)+f(n)+3(4mn-1)$, $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

HD:

- Thay $m=n=1$, ta có: $f(2)=2f(1)+9=9$;
- Thay $m=n=2$, ta có: $f(4)=2f(2)+45=63$;
- Thay $m=n=4$, ta có: $f(8)=2f(4)+189=315$;
- Thay $m=n=8$, ta có: $f(16)=2f(8)+765=1395$;
- Thay $m=2$, $n=1$ ta có: $f(3)=f(2)+f(1)+21=30$.
- Thay $m=16, n=3$ ta có kết quả:

$f(19)=f(16+3)=f(16)+f(3)+573=1998$.

2. Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(1)=5; f(f(n))=4n+9$ và $f(2^n)=2^{n+1}+3\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Tính $f(1789)$.

HD:

Ta có: $1789=4.445+9$; $445=4.109+9$; $109=4.25+9$; $25=4.4+9$

Lần lượt áp dụng các giả thiết ta được:

$f(4)=8+3=11$;

$f(11)=f(f(4))=4.4+9=25$;

$f(25)=f(f(11))=4.11+9=53$;

$f(53)=f(f(25))=4.25+9=109$;

$f(109)=f(f(53))=4.53+9=221$;

$f(221)=f(f(109))=4.109+9=445$;

$f(445)=f(f(221))=4.221+9=893$;

$f(893)=f(f(445))=4.445+9=1789$;

$f(1789)=f(f(9893))=4.893+9=3581$

3. Cho hàm số f xác định trên tập $\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn:

$$f(n+1)=n(-1)^{n+1}-2f(n)\ ;\ f(1)=f(2013).$$

Tính tổng $S=f(1)+f(2)+...+f(2012)$.

HD:

Ta có: $f(2)=1-2f(1)$; $f(3)=-2-3f(2)$; $f(4)=3-2f(3)$; ...;

$f(2012)=2011-2f(2011)$; $f(2013)=-2012-2f(2012)$.

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$f(2)+f(3)+...+f(2012)+f(2013)=1-2+3-4+...+2011-2012-2\sum_{k=1}^{2012}f(k).$$

Thay $f(2013)=f(1)$ ta được: $\sum_{k=1}^{2012}f(k)=-1006-2\sum_{k=1}^{2012}f(k)\Rightarrow\sum_{k=1}^{2012}f(k)=-\frac{1006}{3}$.

4. Cho hàm số f xác định trên tập các số nguyên dương và thỏa mãn:

$$f(1)=1006\ ;\ f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2f(n)\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Tính $f(2012)$.

HD:

Từ giả thiết bài toán ta có: $(n-1)^2f(n-1)+f(n)=n^2f(n)\Rightarrow\frac{f(n)}{f(n-1)}=\frac{n-1}{n+1}$.

Cho $n=2,3,...,2012$ ta được: $\frac{f(2)}{f(1)}=\frac{1}{3}$; $\frac{f(3)}{f(2)}=\frac{2}{4}$; $\frac{f(4)}{f(3)}=\frac{3}{5}$; ...; $\frac{f(2012)}{f(2011)}=\frac{2011}{2013}$.

Nhân vế theo vế các đẳng thức trên ta được: $\frac{f(2012)}{f(1)}=\frac{1}{1006.2013}\Leftrightarrow f(2012)=\frac{1}{2013}$.

5. Cho hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn: $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2)$, $\forall x,y\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng: f là hàm hằng.

Giả sử: f không là hàm hằng. Chọn x,y sao cho $f(y)-f(x)>0$ và bé nhất.

Từ

$$f(x)=\frac{xf(x)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(y)}{x+y}=f(y)\Rightarrow 0<f(x^2+y^2)-f(x)<f(y)-f(x)$$

Điều này mâu thuẫn nên f là hàm hằng.

6. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

$$f(1)=1;\ f(m+n)=f(m)+f(n)+mn\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

HD:

Cho $m=1$ ta thược: $f(n+1)=f(n)+n+1$. Từ đây suy ra nếu tồn tại hàm số thì đó là duy nhất.

Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh: $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

7. Cho hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $f(m)\neq f(n)$ nếu $m-n$ là số nguyên tố. Hỏi tập giá trị của hàm f có ít nhất bao nhiêu phần tử?

HD:

Ta có: $3-1=2;\ 6-3=3;\ 6-1=5;\ 8-3=5;\ 8-6=2$ là các số nguyên tố nên $f(1); f(3); f(6); f(8)$ phải khác nhau. Do đó tập giá trị của hàm f có ít nhất 4 phần tử.

Xét hàm số $f(n)$ xác định như sau: Nếu $n\equiv r(\mathrm{mod}\,4)$ thì $f(n)=r$. Khi đó tập giá trị của hàm f có 4 phần tử là: $0;1;2;3$.

Ta chứng tỏ hàm f xây dựng như trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Thật vậy, nếu $f(m)=f(n)$ thì $m\equiv n(\mathrm{mod}\,4)\Leftrightarrow m-n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\Rightarrow m-n$ là hợp số.

Vậy tập giá trị của hàm f có ít nhất 4 phần tử.

8. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $f(m+f(n))=f(m)+n\ \ \forall m,n\in\mathbb{N}$.

HD:

Giả sử: $f(0)=a>0$.

Khi đó: $f(m+f(0))=f(m)$ hay $f(m+a)=f(m),\ \forall m\in\mathbb{N}$. Vì thế f là hàm tuần hoàn và như thế giá trị của f là tập $A=\{f(0); f(1);...; f(a-1)\}$.

Ta gọi M là số lớn nhất trong A. Khi đó: $f(n)\le M\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Mặt khác: thay $m=0$ vào $f(m+f(n))=f(m)+n$ ta được: $f(f(n))=n+a$ có thể lớn tùy ý, vô lý.

Vậy ta phải có $f(0)=0$. Khi đó: $f(f(n))=n\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Nếu $f(1)=0$ thì $0=f(0)=f(f(1))=1$, mâu thuẫn. Do đó: $f(1)=b>0$.

Chứng minh quy nạp: $f(n)=bn\ \ \forall n\in\mathbb{N}$?

Ta có: $f(bn)=b^2n=n\Rightarrow b=1$. Vậy $f(n)=n\ \forall n\in\mathbb{N}$. Thử lại thấy đúng.

9. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $f(mn+1)=mf(n)+2\ \forall m,n\in\mathbb{N}$.

HD:

- Thay $m=0$ ta có: $f(1)=2$.

- Lại thay $n=0$ ta có: $f(1)=mf(0)+2\Rightarrow mf(0)=0\ \forall m\in\mathbb{N}\Rightarrow f(0)=0$ (1)

- Thay $n=1$ ta có: $f(m+1)=mf(1)+2=2m+2=2(m+1)\Rightarrow f(m)=2m,\ \forall m\in\mathbb{N}^*$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $f(m)=2m\ \forall m\in\mathbb{N}$. Vậy $f(n)=2n\ \forall n\in\mathbb{N}$.

10. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$f(f(n))=n+2;\ f(f(n+1)+1)=n+4;\ f(0)=1\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

HD:

- Chứng minh f là một đơn ánh?

- Ta có: $f(f(n+2))=n+4=f(f(n+1)+1)\Rightarrow f(n+2)=f(n+1)+1$.

Hay $f(n)=f(0)+n=n+1\ \forall n\in\mathbb{N}$ (thỏa mãn).

11. Cho hàm số $f(n)$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương và thỏa mãn:

$$f(1)=2\ \text{ và }\ f(n+1)=f^2(n)-f(n)+1\ ;\ n=1;2;3;...$$

Chứng minh: $1-\dfrac{1}{2^{2^{2011}}}<\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+...+\dfrac{1}{f(2012)}<1-\dfrac{1}{2^{2^{2012}}}$.

HD:

- Ta có: $f(n+1)-f(n)=(f(n)-1)^2\Rightarrow f$ tăng và $f(n)\geq 2\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

- Chứng minh: $\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+...+\dfrac{1}{f(n)}=1-\dfrac{1}{f(n+1)-1}$?

- Chứng minh quy nạp: $2^{2^{n-1}}<f(n+1)-1<2^{2^n}$?

- Cho $n=2012$ ta suy ra điều phải chứng minh.

12. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ thỏa mãn: $f(x+1)=f(x)+1\ ;\ f(x^2)=f^2(x)\quad\forall x\in\mathbb{Q}^+$.

- Chứng minh quy nap: $f(x+n)=f(x)+n\quad\forall x\in\mathbb{Q}^+,\forall n\in\mathbb{N}$?

- Với $x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+\ (p,q\in\mathbb{N}^*)$.Giả sử: $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{m}{n}\ (m,n\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow f\left(\dfrac{p^2}{q^2}\right)=\dfrac{m^2}{n^2}$.

Khi đó: $f\left(\dfrac{p}{q}+q\right)=f\left(\dfrac{p}{q}\right)+q=\dfrac{m}{n}+q\Rightarrow f\left(\dfrac{p^2}{q^2}+2p+q^2\right)=\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{2mq}{n}+q^2$

Hay $f\left(\frac{p^2}{q^2}\right)+2p+q^2=\frac{m^2}{n^2}+\frac{2mq}{n}+q^2 \Rightarrow \frac{2mq}{n}=2p \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

Vậy $f(x)=x\ \ \forall x\in\mathbb{Q}^+$.

13. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

HD:

- Cho $x=y=0$ ta được: $2f(0)=4f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

- Với $x=ny\ (n\in\mathbb{N})$ ta được: $f((n+1)y)=f(ny+y)=2f(ny)+2f(y)-f((n-1)y)$.

- Chứng minh quy nạp: $f(nx)=n^2f(x)\ \ \forall n\in\mathbb{N}$?

- Thay x bởi $\frac{1}{n}$ ta được: $f(1)=n^2f\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)}{n^2}$.

- Ta có: $f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m.\frac{1}{n}\right)=m^2f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^2f(1)$.

Do đó: $f(x)=ax^2\ \ \forall x\in\mathbb{Q}$, trong đó: $a=f(1)$. Thử lại thấy đúng.

14. Tồn tại hay không hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x+f(y))=f(x)-y\ \ \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

HD:

- Chứng minh f là đơn ánh ?

- Cho $x=y=0$ ta được: $f(f(0))=f(0)\Rightarrow f(0)=0$

- Cho $x=0$ ta được: $f(f(y))=-y\ \ \forall y\in\mathbb{Q}$ (*)

- Thay $f(y)$ bởi y vào điều kiện bài toán đã cho và chú ý đến (*) ta có: $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Do đó: $y=kx\ \ \forall x\in\mathbb{Q}$. Thay vào điều kiện bài toán đã cho ta suy ra được: $k^2=-1$, vô lý.

Vậy không tồn tại hàm số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

15. Đặt $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và gọi $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ là hàm số thỏa mãn điều kiện $|f(n)-qn|<\frac{1}{q}\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $f(f(n))=f(n)+n\ \forall n\in\mathbb{N}$.

HD:

- Từ $1>\frac{1}{q}>|f(0)|\geq 0\Rightarrow f(0)=0$. Như vậy điều kiện $|f(n)-qn|<\frac{1}{q}$ đúng với $n=0$.

- Với $n>0$ thì $f(n)>0$. Thật vậy, nếu $f(n)=0$ thì từ $\left|f(n)-qn\right|<\frac{1}{q}$ cho ta:

$$\left|-qn\right|<\frac{1}{q}\Leftrightarrow qn<\frac{1}{q}\Leftrightarrow 0<n<\frac{1}{q^2}<1\text{, vô lý.}$$

- Để ý rằng $q(q-1)=1$. Từ đó với $n>0$ tùy ý ta có:

$$\left|f(f(n))-f(n)-n\right|=\left|f(f(n))-qf(n)+(q-1)f(n)-q(q-1)n\right|$$

$$=\left|f(f(n))-qf(n)+(q-1)(f(n)-qn)\right|\le\left|f(f(n))-qf(n)\right|+\left|(q-1)(f(n)-qn)\right|$$

$$=\left|f(f(n))-qf(n)\right|+(q-1)\left|f(n)-qn\right|$$

Từ $\left|f(n)-qn\right|<\frac{1}{q}$ thay n bởi $f(n)$ ta có: $\left|f(f(n))-qf(n)\right|<\frac{1}{q}$.

Vậy $\left|f(f(n))-f(n)-n\right|<\frac{1}{q}+(q-1).\frac{1}{q}=1$.

Do $f(f(n))-f(n)-n\in\mathbb{Z}$ nên $f(f(n))=-f(n)-n=0\Leftrightarrow f(f(n))=f(n)+n$.

16. Chứng minh rằng không tồn tại song ánh $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(mn)=f(m)+f(n)+3f(m)f(n)\quad\forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

HD:

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Cho $m=1$ ta được: $f(n)=f(n)+f(1)+3f(1)f(n)$. Nếu $f(1)>0$ thì $f(n)<0$, vô lý. Vậy phải có: $f(1)=0$. Vì f là song ánh nên $f(n)\ge 1\ \forall n\ge 2$.

- Suy ra nếu n là hợp số thì $f(n)\ge 5$.

Cũng do f song ánh nên có duy nhất $p,q,r\in\mathbb{N}^*$ sao cho $f(p)=1,\ f(q)=3,\ f(r)=8$. Chú ý rằng p,q là các số nguyên tố phân biệt. Khi đó: $f(q^2)=f(pr)=33\Rightarrow q^2=pr$, vô lý. Vậy không tồn tại hàm số.

17. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $m,n,k\in\mathbb{N}$ ta đều có:

$$f(km)+f(kn)-f(k)f(mn)\ge 1.$$

HD:

- Cho $k=m=n=0\Rightarrow(f(0)-1)^2\le 0\Rightarrow f(0)=1$.

- Cho $m=n=k=1\Rightarrow f(1)=1$.

- Cho $m = n = 0 \Rightarrow f(k) \le 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

- Cho $k = 1, m = 0 \Rightarrow f(n) \ge 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $f(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

18. Cho $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện: $f\left(m^2 f(n)\right) = mnf(m) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng nếu $f(2003) = a^2$ thì a là số nguyên tố.

HD:

- Chứng minh f là đơn ánh và $f(1) = 1$?

- Dễ thấy $f(f(n)) = n \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thay n bởi $f(n)$ có:

$f\left(m^2 f(f(n))\right) = mf(n) f(m) \Rightarrow f\left(m^2 n\right) = mf(m) f(n)$.

Vậy $f\left(m^2\right) = mf(m) \ \forall m$ và $f\left(m^2 n^2\right) = mf(m) f\left(n^2\right) = f\left(m^2\right) f\left(n^2\right)$, nghĩa là f nhân tính trên tập hợp các số chính phương.

Giả sử $f(2003) = a^2$ với a là hợp số, nghĩa là $a = mn$ với $m \ge n > 1$.

Khi đó: $f(f(2003)) = f\left(a^2\right) = f\left(m^2 n^2\right) \Rightarrow 2003 = f\left(m^2\right) f\left(n^2\right)$ Vô lý vì 2003 là số nguyên tố.

19. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:

(i) f tăng thực sự

(ii) $f\left(mf(n)\right) = n^2 f(mn) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

HD:

- Thay $m = 1$ ta có: $f(f(n)) = n^2 f(n)$.

- Giả sử $f(n) > n^2 \Rightarrow f(f(n)) > f\left(n^2\right) \Rightarrow n^2 f(n) > f^2(n) \Rightarrow f(n) < n^2$, vô lý.

- Tương tự ta cũng chứng minh được: $f(n) < n^2$.

Vậy $f(n) = n^2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

20. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn hai điều kiện:

(i) $\forall m, n \in \mathbb{N}$ thì $2f\left(m^2 + n^2\right) = f^2(m) + f^2(n)$

(ii) $\forall m, n \in \mathbb{N}$ mà $m \ge n$ thì $f\left(m^2\right) \ge f\left(n^2\right)$.

HD:

- Cho $m = 0$ và $n = 0$ ta được $2f\left(n^2\right) = f^2(n) + f^2(0)$ và $2f\left(m^2\right) = f^2(m) + f^2(0)$.

Do đó $f^2(m)-f^2(n)=2\left(f(m^2)-f^2(n^2)\right)$.

- Cho $m=n=0$ có $f(0)=0$ hay $f(0)=1$.

+ Nếu $f(0)=1$ thì ta có: $2f(m^2)=f^2(m)+1 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow f(2)=1$.

Từ đẳng thức: $f\left(2^{2^n}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(2^{2^{n-1}}\right)^2+1\right)$, bằng quy nạp ta có: $f\left(2^{2^n}\right)=1\ \forall n$.

Với n tùy ý luôn có số k sao cho $2^{2^{k-1}}<n<2^{2^k} \Rightarrow f\left(2^{2^{k-1}}\right)\le f(n)\le f\left(2^{2^k}\right) \Rightarrow f(n)=1$.

+ Nếu $f(0)=0 \Rightarrow f(1)=0$ hoặc $f(1)=2$.

Với $f(1)=0$ ta có hàm số $f(n)=0$ và với $f(1)=2$ ta có $f(n)=2n$.

21. Xác định hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(f(n)+f(m)\right)=n+m\ \forall n,m\in\mathbb{N}$.

HD:

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Chứng minh f là đơn ánh ?

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có: $f\left(f(n)+f(n)\right)=n+n=2n=(n-1)+(n+1)=f\left(f(n-1)+f(n+1)\right)$

$\Rightarrow f(n)+f(n)=f(n-1)+f(n+1) \Rightarrow f(n+1)-f(n)=f(n)-f(n-1)\ \ \forall n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ f là hàm tuyến tính tức f có dạng: $f(n)=an+b$.

Thử lại ta có: $a\left[(an+b)+(am+b)\right]+b=m+n \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a=1, b=0$.

Suy ra: $f(n)=n$.

22. Cho $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0\in\mathbb{Z}$ sao cho: $f\left(f(x_0)\right)\ne 1-x_0^4$.

HD: Giả sử: $f\left(f(x)\right)=1-x^4\ \forall x\in\mathbb{Z}$

Dễ thấy: $f(1)=1-f^4(0)$; $f(0)=1-f^4(1)$.

Suy ra: $f(1)-f(0)=f^4(1)-f^4(0)=\left[f(1)-f(0)\right]\left[f(1)+f(0)\right]\left[f^2(1)+f^2(0)\right]$.

Chứng minh $f(1)-f(0)\ne 0$?

Khi đó: $\left[f(1)+f(0)\right]\left[f^2(1)+f^2(0)\right]=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1)+f(0)=1 \\ f^2(1)+f^2(0)=1 \end{cases}$

hay $f(1)=1, f(0)=0$ hoặc $f(1)=0, f(0)=1$.

Giả sử: $f(1)=1, f(0)=0$. Suy ra: $f\left(f(1)\right)=f(1), f\left(f(0)\right)=f(0)$. Điều này mâu thuẫn.

23. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f\left(f\left(n\right)\right)=f\left(n\right)$

(ii) $f\left(f\left(m\right)+f\left(n\right)\right)=f\left(m+n\right)$

(iii) f nhận vô số giá trị.

HD:

Giả sử tồn tại $m_1\neq m_2$ mà $f\left(m_1\right)=f\left(m_2\right)$. Ta có thể xem $m_2>m_1$.

Khi đó với mọi n ta có: $f\left(f\left(m_1\right)+f\left(n\right)\right)=f\left(f\left(m_2\right)+f\left(n\right)\right)\Rightarrow f\left(m_1+n\right)=f\left(m_2+n\right)$.

Dễ có $f\left(n\right)=f\left(n+d\right)$ với $d=m_2-m_1>0$. Như thế f là hàm tuần hoàn và do đó chỉ nhận hữu hạn giá trị. Điều này mâu thuẫn với (iii).

Suy ra f là một đơn ánh. Từ (i) có ngay $f\left(n\right)=n\ \ \forall n\in\mathbb{Z}$.

24. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn $f\left(n+m\right)+f\left(n-m\right)=f\left(3n\right)\ \ \forall m,n\in\mathbb{N}$ và $n\geq m$.

HD:

- Cho $m=0$ ta có: $2f\left(n\right)=f\left(3n\right)\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Cho $m=n=0$ ta được: $2f\left(0\right)=f\left(0\right)\Rightarrow f\left(0\right)=0$.

- Cho $m=n$ ta được: $f\left(2n\right)=f\left(3n\right)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra: $f\left(4m\right)=f\left(6m\right)=f\left(2.3m\right)=f\left(3.3m\right)=f\left(9m\right)$.

Như thế: $f\left(2m\right)=0\ \ \forall m\in\mathbb{N}^*$.Cuối cùng $\forall m\in\mathbb{N}^*$ ta có: $f\left(m\right)=\dfrac{1}{3}f\left(3m\right)=\dfrac{1}{2}f\left(2m\right)=0$.

Kiểm tra hàm số: $f\left(n\right)=0\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

25. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+2xy\ \ \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

HD: Từ điều kiện bài toán ta có: $f\left(x+y\right)-\left(x+y\right)^2=f\left(x\right)-x^2+f\left(y\right)-y^2$.

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^2$, như vậy $g\left(x+y\right)=g\left(x\right)+g\left(y\right)$.Dễ dàng có: $g\left(0\right)=0$.Đặt $g\left(1\right)=k$.

Chứng minh quy nạp: $g\left(nx\right)=ng\left(x\right)\ \ \forall x\in\mathbb{Q}$

Lại có: $k=g\left(1\right)=g\left(n.\dfrac{1}{n}\right)=ng\left(\dfrac{1}{n}\right)\Rightarrow g\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{k}{n}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Với $x=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+$, ta có: $g\left(x\right)=g\left(\dfrac{m}{n}\right)=g\left(m.\dfrac{1}{n}\right)=mg\left(\dfrac{1}{n}\right)=m.\dfrac{k}{n}=kx$. Hơn nữa

$g\left(0\right)=g\left(x\right)+g\left(-x\right)\Rightarrow g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$. Do đó: $g\left(x\right)=kx\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Suy ra: $f\left(x\right)=x^2+kx$.

26. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ và $x+y$ chia hết cho 3.

HD:

Với mọi $n\in\mathbb{Z}$ ta có: $f(n)=f\left(\frac{0+3n}{3}\right)=\frac{f(0)+f(3n)}{2}\Rightarrow 2f(n)=f(0)+f(3n)$ (*)

Và $f(n)=f\left(\frac{n+2n}{3}\right)=\frac{f(n)+f(2n)}{3}\Rightarrow f(n)=f(2n)$.

Lại có: $f(n)=f(2n)=f\left(\frac{3n+3n}{3}\right)=\frac{f(3n)+f(3n)}{2}=f(3n)$.

Vậy $f(n)=f(2n)=f(3n)$. Do đó để ý đến (*) ta có: $f(n)=f(0)$. Suy ra f là hàm hằng.

27. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $3f(n)-2f(f(n))=n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

HD:

Giả sử f là hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đặt: $g(n)=f(n)-n$.

Khi đó: $2g(f(n))=g(n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (*)

Áp dụng liên tiếp hệ thức (*) ta suy ra: $g(n)=2g(f(n))=2^2g(f(f(n)))=...=2^m\underbrace{g(f(f(...f(n)...)))}_{m}$

Như vậy $g(n)$ luôn chia hết cho 2^m $\forall m\in\mathbb{N}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $g(n)=0$ hay $f(n)=n$.

28. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x^3+f(y))=y+f^3(x)$ $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

HD:

- Chứng minh f là một đơn ánh?

- Thay y bởi $-f^3(x)$ thì ta có $f(x^3+y)=0$, nghĩa là tồn tại số a sao cho $f(a)=0$.

Đặt $f(0)=b$. Tìm cách chứng minh $f(0)=0$?

- Thay $y=0$ vào điều kiện bài toán ta được: $f(x^3)=f^3(x)$ $\forall x\in\mathbb{Z}$.

Từ đó $f(1)=f^3(1)\Rightarrow f(1)=0$ hoặc $f(1)=\pm1$.

Nhưng do f là đơn ánh và $f(0)=0$ nên chỉ xảy ra hai khả năng:

a) TH: $f(1)=1$.

Thay $x=1$ và y bởi $f(y)$ thì ta được:

$$f\left(1+f\left(f\left(y\right)\right)\right)=f\left(y\right)+f^3\left(1\right)\Rightarrow f\left(y+1\right)=f\left(y\right)+1 \text{ hay } f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+1\ \forall x\in\mathbb{Z}.$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được: $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{Z}$.

b) TH: $f(1)=-1$. Dễ dàng chứng minh $f(x)=-x\ \forall x\in\mathbb{Z}$.

29. Cho hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $\left|f(x+y)-f(x)\right|\le\dfrac{y}{x}\quad\forall x,y\in\mathbb{Q}^+$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(2^n\right)-f\left(2^i\right)\right|\le\frac{n(n-1)}{2}$.

HD:

Cho $x=y=2^i\quad\forall i\in\mathbb{N}$ ta có: $\left|f\left(2^i+2^i\right)-f\left(2^i\right)\right|\le\dfrac{2^i}{2^i}\Rightarrow\left|f\left(2^{i+1}\right)-f\left(2^i\right)\right|\le 1$.

Do đó: $\left|f\left(2^n\right)-f\left(2^i\right)\right|=\left|f\left(2^n\right)-f\left(2^{n-1}\right)+f\left(2^{n-1}\right)-f\left(2^{n-2}\right)+...+f\left(2^{i+1}\right)-f\left(2^i\right)\right|$

$$\le\left|f\left(2^n\right)-f\left(2^{n-1}\right)\right|+\left|f\left(2^{n-1}\right)-f\left(2^{n-2}\right)\right|+...+\left|f\left(2^{i+1}\right)-f\left(2^i\right)\right|\le n-i.$$

Vì thế $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(2^n\right)-f\left(2^i\right)\right|\le\sum_{i=1}^{n}(n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{n(n-1)}{2}$.

30. Cho hàm số $f(n)$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f(p)=1$ nếu p nguyên tố.

(ii) $f(mn)=mf(n)+nf(m)\quad\forall m,n\in\mathbb{N}^*$

Hãy tìm giá trị n sao cho $f(n)=n$.

HD:

Ta xét hàm f xác định như sau:

Với p nguyên tố thì $f\left(p^k\right)=kp^{k-1}$.

Với $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_k^{m_k}$ thì đặt $f(n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i n}{p_i}$.

Dễ kiểm tra hàm số trên thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii). Hơn nữa đó là hàm duy nhất thỏa mãn đề bài.

Ta thấy $f(n)=n\Leftrightarrow\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{p_i}=1$. Từ đó xác định được n có dạng $n=p^n$ với p là số nguyên tố.

31. Chứng minh rằng tồn tại vô số các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f\left(f(n)\right)=n\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$ (ii) $f(n)\ne n\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$.

HD:

- Dễ chứng minh f là một đơn ánh?

- Giả sử $f(m)=n$, khi đó $f(n)=f(f(m))=m$, từ (ii) ta phải có $m \neq n$.

- Hàm f được xây dựng như sau: chia tập hợp các số tự nhiên được phân thành hai tập vô hạn

$$S=\{m_1,m_2,...\} \quad ; \quad T=\{n_1,n_2,...,\}$$

và đặt $f(m_k)=n_k$ và $f(n_k)=m_k$. Hiển nhiên có vô hạn hàm f được xây dựng như cách trên.

32. Hãy tìm tất cả các hàm tăng thực sự $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn: $f(mf(n))=nf(2m) \quad \forall m,n \in \mathbb{N}^*$.

HD:

- Chứng minh f là đơn ánh?

- Thay $m=n=1$ vào phương trình trên ta được $f(f(1))=f(2)$.

- Vì f đơn ánh nên $f(1)=2$.

- Từ đây cho phép ta dự đoán $f(n)=2n$.

- Thay $m=1$ ta được $f(f(n))=nf(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $f(f(f(n)))=f(nf(2)) \Rightarrow f(n)f(2)=2f(2n)$.

Ta chứng minh $f(n)=2n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử có n mà $f(n)>2n$. Do f tăng thực sự và sử dụng $f(n)f(2)=2f(2n)$ ta có:

$f(f(n))>f(2n) \Rightarrow nf(2)>f(2n) \Rightarrow 2nf(2)>2f(2n)=f(n)f(2) \Rightarrow f(n)<2n$ mâu thuẫn.

Giả sử có n mà $f(n)<2n$. Khi đó $f(f(n))<f(2n) \Rightarrow 2nf(2)<2f(2n)=f(n)f(2) \Rightarrow f(n)>2n$, vô lý

Vậy $f(n)=2n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy đúng.

33. Cho hàm $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. Giả sử với mọi n ta có: $f(f(n))<f(n+1)$. Chứng minh $f(n)=n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

HD:

Gọi a là số nhỏ nhất của tập hợp

$\{f(f(1)), f(2), f(f(2)), f(3),..., f(f(n-1)), f(n), f(f(n)), f(n+1),...\}$.

Khi đó a phải có dạng $f(f(n))$ và suy ra $f(n)=1$.

Tiếp theo chứng minh $f(1)=1$ và $f(n)>1$ khi $n>1$.

Bằng quy nạp chứng minh $f(k)=k$ và $f(n)>k$ khi $n>k$. Từ đó dẫn đến kết luận bài toán.