CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG TOÁN HỌC TUỔI TRẺ GẦN ĐÂY

<u>Bài T11/375:</u> - THTT tháng 1/2009 tr25

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện:

$f(0)=0$ *và* $\dfrac{f(t)}{t}$ *là hàm đồng biến trên* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. CMR với các số dương x, y, z ta luôn có:

$$x.f(y^2-zx)+y.f(z^2-xy)+z.f(x^2-yz)\geq 0 \qquad (1)$$

Theo giả thiết thì hàm số $\dfrac{f(t)}{t}$ *là hàm đồng biến trên* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, nên tồn tại các giới hạn:

$\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(t)}{t}$ *và* $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$. *Chọn* $d\in R$ *sao cho*: $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(t)}{t}\leq d\leq \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ ta thu được hàm

$$\mathrm{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{f(t)}{t} & \text{nếu } t\neq 0\\ d & \text{nếu } t=0\end{cases}$$

Đặt: $y^2-zx=a;\ z^2-xy=b;\ x^2-yz=c$ *thì* $xa+yb+zc=0$.

Không mất tính tổng quát có thể giả sử: a = max$\{a,b,c\}$

Do: $a+b+c=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0$ *nên* $a\geq 0.$

Do $xa+yb+zc=0$ *nên* $yb=-xa-zc$ *và* $zc=-xa-yb$

Ta biến đổi vế trái của (1):

$T=x.f(a)+y.f(b)+z.f(c)=xag(a)+ybg(b)+zcg(c)$ *dưới dạng*

$T=xag((a)-g(b))+zc(g(c)-g(b))$ (2)

$T=xa(g(a)-g(c))+yb(g(b)-g(c))$ (3)

Nếu $T<0$ *thì từ* (2), *suy ra*: $c(g(c)-g(b))<0$ (4)

Từ (3) *suy ra*: $b(g(b)-g(c))<0$ (5)

Từ (4) *và* (5) *thu được*: $(b-c)(g(b)-g(c))<0$ *mâu thuẫn vì* $g(x)$ *đồng biến trên* R

Vậy: $T\geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z.$

<u>Bài T10/376:</u> - THTT tháng 2/2009 tr24

Cho hàm số f liên tục trên R, thỏa mãn hai điều kiện:

$f(2010)=2009$ *và* $f(x).f_4(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R},$ *kí hiệu* $f_4(x)=f(f(f(f(x))))$. *Tính* $f(2008)$

Gọi D_f là tập giá trị của hàm số f(x). Theo giả thiết thì: $2009\in D_f$.

Từ $f(x).f_4(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$ *suy ra*: $f_4(x)=\dfrac{1}{2009}\in D_f$ *và* $xf_3(x)=1,\forall x\in D_f$

Do f *liên tục trên* $D:=\left[\dfrac{1}{2009};2009\right]\subset D_f$ *nên* $f_3(x)=\dfrac{1}{x},\forall x\in D$

Từ đó suy ra f là đơn ánh trên D và do f là hàm liên tục trên R nên suy ra f là hàm nghịch biến trên D. *Giả sử* $\exists x_0\in D$ *sao cho* $f(x_0)>\dfrac{1}{x_0}$.

Do f *nghịch biến nên* $f_2(x_0) < f(\frac{1}{x_0})$ (1) *và* $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2(\frac{1}{x_0})$.

Từ đây suy ra: $f(\frac{1}{x_0}) < f_3(x_0) = x_0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x_0 > f_2(x_0)$ *hay* $f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0}$, mâu thuẫn với điều đã giả thiết.

Vậy không tồn tại $x_0 \in D$ *để* $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$

Lập luận tương tự, ta cũng CM được không tồn tại $x_0 \in D$ *để* $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$

Vậy nên: $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$. *Mặt khác, do* $2008 \in D$ *nên suy ra*: $f(2008) = \frac{1}{2008}$

<u>Bài T10/377:</u> - THTT tháng 3/2009 tr24

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$f(x^3 - y) + 2y(3f^2(x) + y^2) = f(y + f(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Thay y = x^3 vào (1), ta được: $f(0) + 2x^3(3f^2(x) + x^6) = f(x^3 + f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Tiếp tục thay y = - f(x) vào (1), ta thu được: $f(x^3 + f(x)) + 2f(x)(3f^2(x) + f^2(x)) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$

Hay $f(x^3 + f(x)) = 8f^3(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Từ các (2) và (3), ta suy ra: $f(0) + 2x^3(3f^2(x) + x^6) = 8f^3(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$

Hay: $(f(x) - x^3)(4f^2(x) + f(x)x^3 + x^6) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (4)

Nhận xét rằng: $4f^2(x) + f(x)x^3 + x^6 = (2f(x) + \frac{x^3}{4})^2 + \frac{15x^6}{16} > 0, \forall x \neq 0$

Do đó: $(4) \Leftrightarrow f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử hàm này vào điều kiện bài toán, ta thấy thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm có dạng:

$f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Bài T10/378:</u> - THTT tháng 4/2009 tr23

Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$f(x + y) = g(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Trong (1) lần lượt cho y = 0 và x = 0 ta thu được:

$g(x) = f(x) - a, \forall x \in \mathbb{R}$, *với* $a = h(0)$ (2)

$h(y) = f(y) - b, \forall y \in \mathbb{R}$, *với* $b = g(0)$ (3)

Thay các giá trị từ (2) và (3) vào (1), ta được: $f(x + y) = f(x) + f(y) - (a + b), \forall x, y \in \mathbb{R}$

Hay: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, *với* $\varphi(t) = f(t) - (a + b)$ (4)

Đây là PT hàm Cauchy đối với hàm liên tục trên R nên (4) có nghiệm φ(x) = cx.

Suy ra nghiệm của (1) có dạng: $\begin{cases} f(x) = cx + a + b \\ g(x) = cx + b \\ h(x) = cx + a \end{cases}$ (5), trong đó a, b, c tùy ý.

Thử lại, ta thấy các hàm trong (5) thỏa mãn bài ra.

<u>Bài T12/379:</u> - THTT tháng 5/2009 tr24

Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên [0;1], có đạo hàm trong (0; 1) và thỏa mãn 2 điều kiện:

a/ $20.f'(x)+11f(x)+2009\le 0,\forall x\in(0;1)$

b/ $f(0)=f(1)=\dfrac{-2009}{11}$

Giả sử tồn tại hàm số f(x) thỏa mãn các điều kiện bài ra. Xét hàm số:

$g(x)=e^{\frac{11}{20}x}\left(f(x)+\dfrac{2009}{11}\right)$ *trên* [0;1]

Vì f(x) liên tục trên [0; 1] và có đạo hàm trong (0; 1), suy ra g(x) là hàm số hàm số liên tục trên [0;1] và có đạo hàm trong (0;1), suy ra g(x) là hàm số liên tục trên [0;1] có đạo hàm trong (0;1).

Ta có: $g'(x)=\dfrac{11}{20}e^{\frac{11}{20}x}\left(f(x)+\dfrac{2009}{11}\right)+e^{\frac{11}{20}x}.f'(x)=\dfrac{11}{20}e^{\frac{11}{20}x}\left(20f'(x)+11f(x)+2009\right)$

Từ a/ suy ra $g'(x)\le 0,\forall x\in(0;1)$. Vậy g(x) là hàm đơn điệu giảm trong khoảng (0;1). Mặt khác, ta có: f(0) = f(1) = $-\dfrac{2009}{11}$ nên g(0) = g(1) = 0

Suy ra: g(x) = 0 trên [0;1] và f(x) = $-\dfrac{2009}{11}$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

<u>Bài T11/380:</u> - THTT tháng 6/2009 tr23

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(n^2)=f(m+n).f(n-m)+m^2,\forall m,n\in\mathbb{R}$ (1)

Thay m = 0; n = 0 vào (1), ta được f(0) = 1 hoặc f(0) = 0

Thay n = 2 và m = 2 vào (1), ta được f(4) = f(4).f(0) + 4 nên $f(0)\ne 1$. *Do đó*: $f(0)=0$

Thay m = t; n = t vào (1), ta được: $f(t^2)$ = f(2t).f(0) + t^2 = t^2, tức là f(x) = x, $\forall x\ge 0$ (2)

Xét n = 0 và m = t > 0.

Thế vào điều kiện (1), ta được: f(0) = f(t).f(-t) + t^2, hay $0=t.f(-t)+t^2,\forall t\in\mathbb{R}^+$

Suy ra: $f(-t)=-t,\forall t\in\mathbb{R}^+$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: f(x) ≡ x. Thử lại điều kiện (1), ta thấy hàm này thỏa mãn

Kết luận: f(x) ≡ x.

<u>Bài T4/THPT</u> (Thi 45 năm THTT): - THTT tháng 8/2009 tr26

Hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện:

$f(xy).f(yz).f(zx).f(x+y).f(y+z).f(z+x)=2009\quad(1)\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$

Cho x = y = z = t, từ (1) ta thu được: $f(2t).f(t^2)=\sqrt[3]{2009}$ (2)

Tiếp theo, cho x = y = t, z = 1, ta được: $f(t^2).f(2t)(f(t).f(t+1))^2=2009$

Kết hợp với (2), ta suy ra: $(f(t).f(t+1))^2=\sqrt[3]{2009^2}$ *hay* $f(t).f(t+1)=\sqrt[3]{2009}$ (3)

Tiếp theo thay t = t +1 trong (3) rồi lại kết hợp với (3) ta suy ra: $f(t+2)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}$ (4)

Trong (1) chọn z = 1 và kết hợp với (3), ta thu được: $f(xy).f(x+y)=\sqrt[3]{2009}$ (5)

Lần lượt thay y = 2 và y = 4 trong (5), ta nhận được:

$f(2x).f(x+2)=\sqrt[3]{2009}$ (6)

$f(4x).f(x+4)=\sqrt[3]{2009}$

Kết hợp với (4), suy ra f(2x) = f(4x) hay $f(2t)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}$ (7)

Từ (4), (6), và (7) cho ta $(f(x))^2=\sqrt[3]{2009}$ *hay* $f(x)=\sqrt[6]{2009}$, *do* $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}_+$

Thử lại, ta thấy hàm f(x) = thỏa mãn điều kiện đề bài.

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được nghiệm của bài toán tổng quát:

"*Cho a > 0, xác định tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ *thỏa mãn điều kiện:*

$\prod\limits_{i>j;i,j=1}^{n} f(x_ix_j).f(x_i+x_j)=a$, $\forall x_i\in\mathbb{R}_+$ *có nghiệm duy nhất là hàm hằng* $f(x)\equiv a^{\frac{1}{n(n-1)}}$ "

<u>Bài T7 THPT</u> (Thi 45 năm THTT): - THTT tháng 10/2009 tr26

Cho hàm số $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ thỏa mãn các tính chất:

$$\begin{cases}(f(2n)+f(2n+1)+1).(f(2n+1)-f(2n)-1)=3(1+2f(n))\\ f(2n)\ge f(n)\end{cases}$$

với mọi số tự nhiên n. Hãy tìm các số tự nhiên n sao cho f(n) $\le$ 2009

Do 3(1+2f(n)) là số nguyên dương lẻ, suy ra f(2n+1) - f(2n) - 1 là số nguyên dương lẻ, do đó:

$f(2n+1)\ge f(2n)+2>f(2n)\ge f(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n

Bởi vậy: $f(2n+1)+f(2n)+1\ge 2f(2n)+3>1+2f(n),\forall n\in\mathbb{N}$

$$\textit{Từ đó ta có}:\begin{cases}f(2n+1)-f(2n)-1=1\\ f(2n+1)+f(2n)+1=3(1+2f(n))\end{cases},\forall n\in N$$

Suy ra $\forall n\in\mathbb{N}$ thì f(2n+1) = f(2n) + 2; f(2n) = 3f(n)

Tiếp theo ta sẽ CM bằng quy nạp theo $\forall n\in\mathbb{N}$ rằng: f(n) < f(n + 1) (2)

Từ (1) ta có: f(1) = f(0) + 2 > f(0) (f(0) = 3f(0)=> f(0) = 0)

Giả sử đã có f(0) < f(1) < ... < f(k), $k\in\mathbb{N}^*$

Nếu k chẵn, k = 2m ($m\in\mathbb{N}^*$) thì: $f(k+1)=f(2m+1)=f(2m)+2>f(2m)=f(k)$

Nếu k lẻ, k = 2m + 1 ($m\in\mathbb{N}$) thì:

$f(k+1)=f(2m+2)=3f(m+1)\ge 3(f(m)+1)>3f(m)+2=f(2m)+2=f(2m+1)=f(k)$

(Chú ý: k = 2m + 1 => m + 1 $\le$ k => f(m) < f(m+1) =>f(m) + 1 $\le$f(m+1) do tất cả các số ở đây đều là các số nguyên)

Như vậy trong mọi Trường hợp, ta có: f(k+1) > f(k), tức là khẳng định (2) đúng

Từ (1) ta đã có: f(0) = 0; f(1) = 2

Do đó:

$f(2)=3f(1)=6;\ f(3)=f(2)+2=8;\ \ f(13)=f(12)+2=f(2^2.3)+2=3^2.f(3)+2=74$

$f(27)=f(2.13+1)=3.f(13)+2=224$

$f(53)=f(2^2.13+1)=3^2.f(13)+2=668$

$f(108)=f(2^2.27)=3^2.f(27)=2016$

$f(107)=f(2.53+1)=3.f(53)+2=2006$

Bởi vậy: f(107) < 2009 < f(108). Kết hợp với (2) ta có kết luận f(n) $\le$ 2009 $\Leftrightarrow n\in\{0,1,2,...,107\}$

Bài T10/387: - THTT tháng 1/2010 tr23

Có tồn tại hay không hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 tính chất:

a/ f liên tục trên R

b/ $f(x+2008).(f(x)+\sqrt{2009})=-2010,\forall x\in\mathbb{R}$?

Giả sử tồn tại hàm số f liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+2008).(f(x)+\sqrt{2009})=-2010,\forall x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Khi đó: $f(x)\neq 0$ *và* $f(x)\neq 2009$ *trên* $\mathbb{R}$. Vì f liên tục trên R nên chỉ có thể xảy ra một trong 3 thợp đối với miền giá trị của f (kí hiệu là Imf) như sau:

$\mathrm{Im}\, f\subset(-\infty;-\sqrt{2009})$; $\mathrm{Im}\, f\subset(-\sqrt{2009};0)$; $\mathrm{Im}\, f\subset(0;+\infty)$.

* *Nếu* $\mathrm{Im}\, f\subset(-\infty;-\sqrt{2009})$ *thì* $f(x+2008).(f(x)+\sqrt{2009})>0>-2010,\forall x\in\mathbb{R}$

* *Nếu* $\mathrm{Im}\, f\subset(-\sqrt{2009};0)$ *thì* $-\sqrt{2009}<f(x+2008)<0$

nên $\sqrt{2009}>\left|f(x+2008)\right|$ *và* $\left|f(x)\right|<\sqrt{2009},\forall x\in\mathbb{R}$

kéo theo: $\left|f(x+2008).(f(x)+\sqrt{2009})\right|<2009<2010,\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Từ (2) *suy ra*: $f(x+2008).(f(x)+\sqrt{2009})>-2010,\forall x\in\mathbb{R}$

**Nếu* $\mathrm{Im}\, f\subset(0;+\infty)$ *thì* $f(x+2008).(f(x)+\sqrt{2009})>0>-2010,\forall x\in\mathbb{R}$

Kết luận: Không tồn tại hàm số thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài T11/388: - THTT tháng 2/2010 tr24

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất:

a/ f(0) = 1; b/ $f(x)\leq 1$ *với* $\forall x\in\mathbb{R}$;

c/ $f\left(x+\frac{11}{24}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{8}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$. *Đặt* $F(x)=\sum_{n=0}^{2009}f(x+n)$. *Hãy tính* $F(2009)$

Từ tính chất c/ suy ra: $f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right)=f\left(x+\frac{1}{8}\right)-f\left(x+\frac{11}{24}\right)$ (*)

Từ (*) suy ra: $f(x+\frac{1}{3})-f\left(x+\frac{2}{3}\right)=f\left(x+\frac{11}{24}\right)-f\left(x+\frac{19}{24}\right)$

$$f(x+\frac{2}{3})-f\left(x+1\right)=f\left(x+\frac{19}{24}\right)-f\left(x+\frac{9}{8}\right)$$

Do đó: $f(x)-f\left(x+1\right)=f\left(x+\frac{1}{8}\right)-f\left(x+\frac{9}{8}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(x+\frac{1}{8}\right)=f\left(x+1\right)-f\left(x+\frac{9}{8}\right)$ (**)

Từ $\left(**\right)$ suy ra: $f(x+\frac{1}{8})-f\left(x+\frac{2}{8}\right)=f\left(x+\frac{9}{8}\right)-f\left(x+\frac{10}{8}\right)$

$$f(x+\frac{2}{8})-f\left(x+\frac{3}{8}\right)=f\left(x+\frac{10}{8}\right)-f\left(x+\frac{11}{8}\right)$$

....

$$f(x+\frac{7}{8})-f\left(x+1\right)=f\left(x+\frac{15}{8}\right)-f\left(x+2\right)$$

Do đó: $f(x)-f(x+1)=f(x+1)-f(x+2) \quad (***)$

Trong (***) cho x = -1, và do f(0) = 1 ta thu được:

f(-1) + f(1) = 2, nên từ giả thiết b/ suy ra f(-1) = f(1)=1.

Do đó:f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = ... = f(2.2009) = 1 và vì vậy f(2009) = 2010.

<u>Bổ đề</u>: Cho cặp số thực dương a, b sao cho ab là số hữu tỉ và hàm số f(x) bị chặn thỏa mãn điều kiện: $f(a+b+x)+f(x)=f(x+a)+f(x+b), \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số f(x) là hàm số tuần hoàn.

(CM theo pp quy nạp)

<u>Bài T10/390:</u> - THTT tháng 4/2010 tr23

Với số nguyên dương cho trước, hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sao cho với mọi x, y $\in \mathbb{N}$ ta có:

1/ Nếu f(x) = f(y) thì x = y; 2/ $\underbrace{f(f(f(...(f}_{\text{gồm m lần } f}(f(x)+f(y)))...))) = x+y \quad (1)$

Kí hiệu: $\underbrace{f(f(f(...(f}_{\text{gồm m lần } f}(f(x)+f(y)))...))) = f_m(x) \ và\ f_1(x)=f(x);\ f_0(x)=x$

Từ điều kiện giả thiết 1/ suy ra: Nếu: $f_n(x)=f_n(y)$ *với* $n \geq 1$ *thì* $x=y$

Trong 2/ thay x bởi x+ y; y bởi 0, ta thu được:

$f_m(f(x+y)+f(0)) = x+y = f_m(f(x)+f(y)), \forall x,y \in \mathbb{N}$

Suy ra, theo 1/ có: $f(x+y)+f(0)=f(x)+f(y), \forall x,y \in \mathbb{N} \quad (1)$

Đặt f(0) = a, thì (1) có dạng: $f(x+y)+a=f(x)+f(y), \forall x,y \in \mathbb{N} \quad (2)$

Thế x = 0; y = 0 vào 2/ ta thu được $f_m(2a) = 0$

Tiếp tục thế x = $f_{m-1}(2a)$; y = 0 vào 2/, ta thu được: $f_m(f_m(2a)+f(0)) = f_{m-1}(2a)$

Suy ra: $f_m(a)=f_{m-1}(2a)$ *hay* $f(a)=2a \quad (3)$

Từ (2) và (3), bằng quy nạp, ta thu được: $f_m(2a)=(m+2)a.$ *Suy ra* $a=0$

Vậy (2) có dạng: $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y \in \mathbb{N} \quad (4)$

Từ đây suy ra f(0) = 0 và $f(x+1)=f(x)+f(1)=f(x-1)+2f(1)=...=f(0)+(x+1)f(1)=(x+1).f(1)$

Đặt f(1) = b thì f(x) = bx, $\forall x \in \mathbb{N}$ và $f_m(f(x)+f(y)) = b^m(bx+by)$ *nên* $b^m(bx+by)=x+y, \forall x,y \in \mathbb{N}$

Suy ra: $b^{m+1} = 1$ nên b = 1 (do $m \geq 1, b \in \mathbb{N}$)

Vậy: f(x) = x, $\forall x \in \mathbb{N}$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn.

<u>Bài T10/392:</u> - THTT tháng 6/2010 tr23

Hãy xác định tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$f(2010x-f(y)) = f(2009x)-f(y)+x, \forall x,y \in \mathbb{R} \quad (1)$

Thay (x;y) = (0;0) vào (1), ta được:f(-f(0)) = 0

Tiếp tục thay (x;y) = (t; -f(0)) vào (1) và sử dụng đẳng thức f(-f(0)) = 0, ta được:

$f(2010t)=f(2009t)+t, \forall t \in \mathbb{R} \quad (1')$

hay: $g(2010t)=g(2009t)+t, \forall t \in \mathbb{R}$ (2), *với* $g(t)=f(t)-t$

Viết lại (2) dưới dạng: $g(x)=g\left(\frac{2009}{2010}x\right), \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $g(x) = g\left(\left(\dfrac{2009}{2010}\right)^n x\right), \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Theo gthiết, hsố f(x) liên tục trên R nên g(x) cũng là hàm số liên tục trên R. Từ (3) ta thu được:

$$g(x) = g\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2009}{2010}\right)^n x\right) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$$

Hay $g(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, tức là f(x) = x + c, với hằng số c tùy ý.

Thử lại, ta thấy hàm số f(x)= x + c, với hằng số c tùy ý, thỏa mãn điều kiện bài toán.

<u>Bài T12/393:</u> - THTT tháng 7/2010 tr24

Hãy xác định tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$f(x + f(y)) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Nhận xét rằng f là một đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì ứng với mỗi x ta có:

$f(x + f(y_1)) = f(x + f(y_2))$ *hay* $2y_1 + f(x) = 2y_2 + f(x)$, *tức* $y_1 = y_2$

Tiếp theo, từ đk (1) của bài ra, ta có tập giá trị của hàm f (nếu tồn tại) là R, nên tồn tại a thuộc R để f(a) = 0

Từ (1), ứng với y = a, ta thu được:

$f(x + f(a)) = 2a + f(x)$ *hay* $f(x) = 2a + f(x)$, *tức* $a = 0$ *và* $f(0) = 0$

Từ (1), ứng với x = 0, ta thu được:

$f(f(y)) = 2y + f(0) = 2y$ *hay* $f(f(y)) = 2y, \forall y \in \mathbb{R}$ (2)

Tiếp tục thay x = f(t) trong (1) và sử dụng (2), ta thu được:

$f(f(t) + f(y)) = 2y + f(f(t)) = 2y + 2t = 2(y + t) = f(f(y + t))$

Hay: $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (3) (do tính đơn ánh của f)

Từ đó (3) là PT hàm Cauchy cộng tính và liên tục, nên có nghiệm f(x) = bx. Thế vào (1), ta thu được: $b^2 x = 2x, \forall x \in \mathbb{R},$ *nên* $b = \pm\sqrt{2}$. Thử lại, ta thấy hai hàm số $f(x) = \pm\sqrt{2}x$ thỏa mãn bài ra.

<u>Bài T11/394:</u> - THTT tháng 8/2010 tr25

Hãy xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(f(x) + y) = f(x + y) + xf(y) - xy - x + 1$ (1)

Từ (1) cho y = 0 ta được: $f(f(x)) = f(x) + xf(0) - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Trong (2) cho x = 0 ta được: $f(f(0)) = f(0) + 1$ (3)

Tiếp tục, từ (1) thay y bởi f(y) và sử dụng (2) ta thu được:

$f(f(x) + f(y)) = f(x + f(y)) + xf(f(y)) - xf(y) - x + 1$

$= (f(x + y) + yf(x) - xy - y + 1) + x(f(y) + yf(0) - y + 1) - xf(y) - x + 1$

$Hay: f(f(x) + f(y)) = f(x + y) + yf(x) + xyf(0) - 2xy - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (4)

Hoán vị vai trò của x và y trong (4), ta thu được:

$f(f(x) + f(y)) = f(x + y) + xf(y) + xyf(0) - 2xy - x + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $yf(x) - y = xf(y) - x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (6)

Trong (6) cho x = 0, y = 1 thì f(0) = 1. Thay vào (3) ta được f(f(0)) = 2

Từ (6) thay y = 1 và sử dụng hệ thức f(f(0)) = 2, ta thu được hàm số f(x) = x + 1

Thử lại, thấy hàm số này thỏa đk (1)

Kết luận: Hàm số cần tìm là f(x) = x + 1

Bài T11/397: - THTT tháng 11/2010 tr24

Cho hàm số f liên tục trên R và thỏa mãn 2 điều kiện:

$$\begin{cases} f(2012) = 2011 \\ f(x).f_4(x) = 1,\ \forall x \in R \end{cases}.\ \textit{Kí hiệu}: f_n(x) = \underbrace{f(f(...f(x))...)}_{n\ lần\ f}.\ \textit{Tính}\ f(2010)$$

Gọi D_f là tập giá trị của hàm số f(x). Theo giả thiết thì: $2011 \in D_f$.

Từ $f(x).f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ *suy ra*: $f_4(x) = \dfrac{1}{2011} \in D_f$ *và* $xf_3(x) = 1, \forall x \in D_f$

Do f liên tục trên $D := \left[\dfrac{1}{2011}; 2011\right] \subset D_f$ *nên* $f_3(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in D$

Từ đó suy ra f là đơn ánh trên D và do f là hàm liên tục trên R nên suy ra f là hàm nghịch biến trên D

Giả sử $\exists x_0 \in D$ *sao cho* $f(x_0) > \dfrac{1}{x_0}$.

Do f nghịch biến nên $f_2(x_0) < f(\dfrac{1}{x_0})$ (1) *và* $\dfrac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2(\dfrac{1}{x_0})$.

Từ đây suy ra: $f(\dfrac{1}{x_0}) < f_3(x_0) = x_0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x_0 > f_2(x_0)$ *hay* $f(x_0) < f_3(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$, mâu thuẫn với điều đã giả thiết.

Vậy không tồn tại $x_0 \in D$ *để* $f(x_0) > \dfrac{1}{x_0}$

Lập luận tương tự, ta cũng CM được không tồn tại $x_0 \in D$ *để* $f(x_0) < \dfrac{1}{x_0}$

Vậy nên: $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in D$. *Mặt khác, do* $2010 \in D$ *nên suy ra*: $f(2010) = \dfrac{1}{2010}$