GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN QUA GIỚI HẠN DÃY SỐ

Phương pháp chuyển qua giới hạn dãy số đôi khi khá hữu hiệu trong việc giải một số dạng toán liên quan đến bất đẳng thức hàm. Bài viết đề cập đến phương pháp này thông qua một số bài toán minh họa.

1 Một số dạng toán bất đẳng thức hàm.

Bài toán 1.1 Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ thỏa các điều kiện sau

$$f(x)\geq 1+x,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}; \tag{1}$$

$$f(x+y)\geq f(x)f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Lời giải:
Trước hết lưu ý rằng $f(x)>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Trong (1), cho $x=0$ ta có $f(0)\geq 1$.
Trong (2), cho $x=0$ ta có $f(0)\geq f^2(0)$, suy ra $f(0)\leq 1$. Do đó $f(0)=1$.
Điều kiện (2) suy ra rằng $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geq f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$, với mỗi $x_i\in\mathbb{R}, 1\leq i\leq n$.
Do đó $f(x)=f\left(\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}\right)\geq f^n\left(\frac{x}{n}\right)$, với mỗi $x\in\mathbb{R}$ và $n\in\mathbb{N}^*$.
Kết hợp điều kiện (2), ta có $f(x)\geq f^n\left(\frac{x}{n}\right)\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
Từ bất đẳng thức này, cho $n\to\infty$, ta có $f(x)\geq e^x$.
Hơn nữa, ta có $1=f(0)=f\left(x+(-x)\right)\geq f(x)f(-x)\geq e^xe^{-x}=1$.
Do đó $f(x)=e^x$. Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài toán. □

Bài toán 1.2 Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ sao cho

$$f(x+y)\geq f(x)+y.f(f(x)),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+ \tag{3}$$

Lời giải:
Giả sử rằng tồn tại hàm f thỏa mãn điều kiện bài toán.
Trong (3), cho $x=1$ và thay y bởi x ta được $f(1+x)\geq f(1)+x.f(f(1))$.
Điều này suy ra rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, và do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$.
Mặt khác trong (3), cho $y=1$, ta được

$$f(x+1)\geq f(x)+f(f(x)),\quad \forall x\in\mathbb{R}^+ \tag{4}$$

Điều này suy ra rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=+\infty$. Do đó tồn tại $x_0\in\mathbb{R}^+$ sao cho

$$f(x_0+k)-f(x_0+k-1)>2,\quad \forall k\geq 1. \tag{5}$$

Bây giờ, chọn một giá trị xác định $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \geq x_0 + 1$. Trong (5), cho k lần lượt nhận các giá trị $1, 2, \dots, n$ và sau đó cộng các bất đẳng thức thu được, ta có

$$f(x_0 + n) - f(x_0) > 2n, \quad n \geq x_0 + 1. \tag{6}$$

Hơn nữa, vì $f(x_0) > 0$ nên với cách chọn $n \geq x_0 + 1$, ta có $n > x_0 + 1 - f(x_0)$. Do đó bởi (6), ta có

$$f(x_0 + n) > 2n + f(x_0) > x_0 + n + 1 \tag{7}$$

Thế thì, ta có

$$f(f(x_0 + n)) \geq f(x_0 + n + 1) + f(x_0 + n) - (x_0 + n + 1).f(f(x_0 + n + 1)). \tag{8}$$

Vì $f(f(x_0 + n + 1)) > 0$ nên, bởi (7), ta có

$$f(x_0 + n + 1) + f(x_0 + n) - (x_0 + n + 1).f(f(x_0 + n)) > f(x_0 + n + 1). \tag{9}$$

Hơn nữa, bởi eqrefpt4, ta có

$$f(x_0 + n + 1) \geq f(x_0 + n) + f(f(x_0 + n)). \tag{10}$$

Ngoài ra, vì $f(x_0 + n) > 0$ nên ta có

$$f(x_0 + n) + f(f(x_0 + n)) > f(f(x_0 + n)). \tag{11}$$

Cuối cùng, từ các bất đẳng thức (8), (9), (10), (11), suy ra $f(f(x_0 + n)) > f(f(x_0 + n))$, mâu thuẫn.
Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 1.3 Tìm tất cả các hàm $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) \geq 2xf(x^2), \quad \forall x \in [0; 1]. \tag{12}$$

Lời giải:
Trong (12), thay lần lượt $x = 0$ và $x = 1$ ta được

$$f(0) \geq 0, \quad f(1) \leq 0. \tag{13}$$

Với $0 < x < \frac{1}{2}$, áp dụng (13) n lần, ta được

$$f(x) \geq 2xf(x^2) \geq 2^2x^3f(x^4) \geq \cdots \geq (2x)^n x^{2^n - n - 1} f(x^{2n}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{14}$$

Vì $x \in (0; \frac{1}{2})$ và f liên tục nên

$$\lim_{n \to +\infty} \left((2n)^n x^{2^n - n - 1} f(x^{2n})\right) = f(0) - 0. \tag{15}$$

Từ eqrefpt14 và (15), ta có

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0; \tfrac{1}{2}). \tag{16}$$

Mặt khác với $x \in (0; 1)$, bởi (12), ta có $f(\sqrt{x}) \geq 2\sqrt{x} f(x)$. Suy ra

$$f(x) \leq \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \leq \cdots \leq \frac{f(x^{\frac{1}{2^n}})}{2^n x^{1 - \frac{1}{2^n}}}. \tag{17}$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x^{\frac{1}{2^n}})}{2^n x^{1-\frac{1}{2^n}}} = 0$, nên bởi (17), ta có

$$f(x) \le 0 \quad \forall x \in (0;1). \tag{18}$$

Từ (16) và (18), ta có

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0;\tfrac{1}{2}). \tag{19}$$

Với mỗi $x \in [\frac{1}{2};1)$, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x^{2^n} < \dfrac{1}{2}$.
Thế thì, khi đó $f(x) \ge x^{2^n-n-1} f(x^{2n}) = 0$. Do đó

$$f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [\tfrac{1}{2};1). \tag{20}$$

Bởi (18) và (20), ta có

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [\tfrac{1}{2};1). \tag{21}$$

Bởi (19) và (21), suy ra $f(x) = 0, \quad \forall x \in [0;1)$.
Hơn nữa, vì hàm f liên tục trên $[0;1]$ nên $f(x) = 0, \quad \forall x \in [0;1]$.
Thử lại , ta thấy $f(x) = 0, \quad \forall x \in [0;1]$. thỏa mãn điều kiện bài toán □

Bài toán 1.4 Xét bất phương trình hàm

$$f(x+y) \ge f(x)g(y) + f(y)g(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

trong đó $g(x)$ là một hàm giới nội, khả vi tại 0, $g(0) = 1$ và $g'(0) = k$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bất phương trình đã cho với điều kiện

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \tag{23}$$

Lời giải:
Giả sử rằng $f(x)$ là nghiệm của (22), với điều kiện (23).
Thế thì, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có $f(x+h) \ge f(x)g(h) + f(h)g(x)$
hay $$f(x+h) - f(x) \ge (g(h)-1)f(x) + f(h)g(x).$$
Do đó $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge \frac{g(h)-g(0)}{h} f(x) + \frac{f(h)}{h} g(x)$$
Mặt khác, ta có $f(x) = f(x+h-h) \ge f(x+h)g(-h) + f(-h)g(x+h)$
hay $g(-h)(f(x) - f(x+h)) \ge g(-h)f(x) - f(x) + f(-h)g(x+h)$.
Vì hàm $g(x)$ khả vi tại 0 nên nó liên tục tại điểm đó. Do đó với $h > 0$ đủ nhỏ ta có $g(-h) > 0$.
Vậy với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &\le \frac{(g(-h)-1)f(x) + f(-h)g(x+h)}{-g(-h)} \\ &= \frac{g(-h)-g(0)}{-hg(-h)} f(x) + \frac{f(-h)}{-hg(-h)} g(x+h).\end{aligned}$$

Vậy với $h > 0$ đủ nhỏ, từ các kết quả trên, ta có

$$\begin{aligned}\frac{g(h)-g(0)}{h}f(x)+\frac{f(h)}{h}g(x) &\le \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &\le \frac{g(-h)-g(0)}{-hg(-h)}f(x)+\frac{f(-h)}{-hg(-h)}g(x+h).\end{aligned}$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h < 0$ có $|h|$ đủ nhỏ.
Do đó, bởi điều kiện (23), ta có $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tồn tại
và bằng $g'(0)f(x) = kf(x)$, với $x \in \mathbb{R}$, vì $g(x)$ là một hàm giới nội.
Từ đó, với $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'(x)-kf(x)}{e^{kx}} = \frac{kf(x)-kf(x)}{e^{kx}} = 0.$$

Do đó $f(x) = Ce^{kx}$ (C là hằng số). Hơn nữa từ điều kiện (2) suy ra rằng $C = 0$
Vậy $f(x) \equiv 0$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bất phương trình đã cho, với điều kiện (23). □

2 Một số dạng toán liên quan đến bất dẳng thức hàm.

Bài toán 2.1 Giả sử f là hàm thỏa mãn điều kiện

$$f(2x) \ge x + f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{24}$$

Chứng minh rằng $f(x) \ge x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Lời giải:
Bởi (24), ta có

$$f(x) \ge \frac{x}{2} + f\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) > \frac{x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{25}$$

Giải sử rằng

$$f(x) \ge a_n x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{26}$$

trong đó a_n là hằng số. Thế thì, bởi (24), (25), (26), ta có

$$f(x) \ge \frac{x}{2} + f\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) > \frac{x}{2} + a_n f\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1+{a_n}^2}{2}x.$$

Xét dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{1+{a_n}^2}{2}$, $\forall n \ge 1$.
Thế thì $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(1+a_n)^2}{2} \ge 0$, nghĩa là $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số tăng.
Hơn nữa, dễ thấy rằng $a_n < 1$, $\forall n \ge 1$.
Suy ra dãy là hội tụ và nếu ký hiệu a là giới hạn của nó thì $a = \dfrac{1+a^2}{2}$, nghĩa là $a = 1$.
Do đó, cho $n \to \infty$ thì từ bất đẳng thức $f(x) > \dfrac{1+{a_n}^2}{2}x$, ta có $f(x) \ge x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.
Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.2 Giả sử $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn các điều kiện

$$f^2(x)\geq 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right),\quad \forall x\in\mathbb{R};\quad f(x)\leq 1,\quad x\in(-1,1).$$

Chứng minh rằng $f(x)\leq \dfrac{x^2}{2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải:
Dễ thấy rằng $f(0)=0$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $x\neq 0$.
Thế thì $g^2(x)\leq g\left(\dfrac{x}{2}\right)$ và do đó $g^{2^n}(x)\leq g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, với $x\neq 0$ và $n\in\mathbb{N}^*$.
Chú ý rằng, $g(x)\geq g^2(2x)\geq 0$. Do đó ta có

$$g(x)\leq \sqrt[2^n]{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\sqrt[2^n]{\frac{2f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}}\leq \sqrt[2^n]{\frac{2^{2n+1}}{x^2}},\text{ vì }\frac{x}{2^n}\in(-1,1).$$

Bây giờ cho $n\to\infty$ và sử dụng kết quả $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$, ta thu được $g(x)\leq 1$.
Do đó $f(x)\leq\dfrac{x^2}{2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$. □

Bài toán 2.3 Giả sử F là tập tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$f(3x)\geq f(f(2x))+x,\quad \forall x\in\mathbb{R}^+. \tag{27}$$

Tìm số thực a lớn nhất sao cho với mọi hàm $f\in F$, ta luôn có

$$f(x)\geq ax. \tag{28}$$

Lời giải:
Dễ thấy rằng $f(x)=\dfrac{x}{2}$ thỏa mãn (27), nên $f(x)=\dfrac{x}{2}\in F$.
Thay $f(x)=\dfrac{x}{2}$ vào (28), ta suy ra $a\leq\dfrac{1}{2}$.
Vì $f(x)>0,\quad \forall x>0$, nên từ (27) ta có

$$f(x)=f\left(\frac{3x}{3}\right)\geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right)+\frac{x}{3}>\frac{x}{3},\quad \forall x>0. \tag{29}$$

Ta xác định một dãy (a_n) như sau

$$a_1=\frac{1}{3};\ a_{n+1}=\frac{2{a_n}^2+1}{3},\quad \forall n\geq 1. \tag{30}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng

$$0<a_n<\frac{1}{2},\quad \forall n\geq 1. \tag{31}$$

Suy ra

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2{a_n}^2 + 1}{3} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - 1)(2a_n - 1) > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Do đó, (a_n) là dãy số dương, tăng nghiêm ngặt và bị chặn bởi $\frac{1}{2}$. Vậy dãy (a_n) hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Thế thì, bởi (30) và (31), ta có $\alpha = \dfrac{2\alpha^2 + 1}{3}$ hay $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
Bây giờ ta cần chứng minh rằng, với mỗi $n \geq 1$, ta luôn có

$$f(x) \geq a_n x, \quad \forall x > 0. \tag{32}$$

Thật vậy, bởi (29) nên (32) đúng với $n = 1$. Giả sử (32) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là

$$f(x) \geq a_k x, \quad \forall x > 0. \tag{33}$$

Khi đó, bởi (27) và (33), ta có

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \geq a_k.f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} \\ &\geq {a_k}^2.\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2{a_k}^2 + 1}{3}x \geq a_{k+1}x, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Vậy (32) đúng với $n = k + 1$. Do đó (32) đúng với mọi $n \geq 1$.
Từ các điều trên suy ra rằng, với mọi hàm $f \in F$, ta luôn có $f(x) \geq \dfrac{1}{2}x$.

Tóm lại, giá trị của a cần tìm là $a = \dfrac{1}{2}$. □

Bài toán 2.4 Tìm tất cả các hàm số $f : [1, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ thỏa các điều kiện sau

$$f(x) \leq 2(1 + x), \quad \forall x \geq 1; \tag{34}$$

$$xf(x + 1) = f^2(x) - 1, \quad \forall x \geq 1. \tag{35}$$

Lời giải:
Bởi các giả thiết (34) và (35), ta có

$$f(x) = \sqrt{xf(x + 1) + 1} \leq \sqrt{2x(x + 1) + 1} < \sqrt{2}(x + 1), \quad \forall x \geq 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được rằng

$$f(x) < 2^{\frac{1}{2^n}}(x + 1), \quad \forall x \geq 1, \quad n \geq 1. \tag{36}$$

vì $2^{\frac{1}{2^n}} \to 1$ khi $n \to \infty$, nên từ (36) ta có

$$f(x) \leq x + 1, \quad \forall x \geq 1. \tag{37}$$

Bây giờ, bởi (35), ta có $\dfrac{f^2(x) - 1}{x} = f(x + 1) \geq 1$. Do đó

$$f(x) \geq \sqrt{x + 1} > \sqrt{x}, \quad \forall x \geq 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được rằng

$$f(x) > x^{1-\frac{1}{2^n}}, \quad \forall x \geq 1, \quad n \geq 1. \tag{38}$$

vì $\frac{1}{2^n} \to 0$ khi $n \to \infty$, nên từ (38) ta được

$$f(x) \geq x, \quad \forall x \geq 1. \tag{39}$$

Bây giờ, bởi (35) và (39) ta có

$$f(x) = \sqrt{xf(x+1)+1} \geq \sqrt{x(x+1)+1} > x + \frac{1}{2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được rằng

$$f(x) > x + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \quad \forall x \geq 1, \quad n \geq 1. \tag{40}$$

vì $\frac{1}{2^n} \to 0$ khi $n \to \infty$, nên từ (40) ta được

$$f(x) \geq x + 1, \quad \forall x \geq 1. \tag{41}$$

Bởi (37) và (41), ta suy ra $f(x) = x + 1, \quad \forall x \geq 1$.
Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x + 1, \quad \forall x \geq 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán. □

3 Bài tập

Bài 1. Gọi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số thỏa điều kiện

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng tồn tại hàm số $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau
i) $|f(x) - g(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
ii) $g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
Hướng dẫn Hàm $g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(2^n x)}{2^n}$ là hàm cần tìm.

Bài 2. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán. Ta chứng minh được bất đẳng thức

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2^n|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì $2^n \to +\infty$, khi $n \to +\infty$, nên dẫn đén điều mâu thuẫn.

Bài 3. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{3f(x)} - \sqrt{3f(x) - \frac{9}{4}f\left(\frac{4x}{3}\right)} \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tìm số thực k lớn nhất sao cho $f(x) \geq k$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Hướng dẫn Xét dãy số (u_n) xác định như sau $u_1 = \dfrac{4}{9}$, $u_{n+1} = -\dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{9}\sqrt{3u_n}, \quad \forall n \geq 1$.
Dãy số này tăng và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn, giới hạn đó là $\dfrac{4}{3}$. Suy ra $k = \dfrac{4}{3}$.

Tài liệu

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức, định lí và áp dụng*, NXB Giáo dục (2006)

[2] IH-Ching, *On some functional inequalities*, 129-135, Aequationes Mathematicae, Vol. 9, 1973.

[3] Titu Andresscu, Iurie Boreico, *Functional equations - 17 Chapters and 199 Problems with solution*, Electronic Edition, 2007.

[4] Một số Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Mục lục