Các phương trình giải bằng các đặc trưng của hàm số

Trong phần trên, ta đã thấy một bài dùng đặc trưng hàm số là sử dụng tính đơn điệu để giải quyết. Trên thực tế, các dạng phương trình này khá phổ biến, thú vị và có một số bài quen thuộc mà chúng ta sẽ xét trong các ví dụ dưới đây. Các bài toán trong phần này có một đặc điểm chung là chúng có số nghiệm xác định trước được và giá trị chính xác của từng nghiệm được nhẩm ra dựa trên phương trình chứ không phải thông qua một phép biến đổi cụ thể nào.

Ta phát biểu lại hai định lí quan trọng dùng trong các bài toán liên quan.

Định lí Lagrange

> Cho hàm số $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Khi đó, tồn tại một số thực $c\in(a,b)$ sao cho $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Định lí Rolle

> Cho hàm số $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b), đồng thời $f(a)=f(b)$. Khi đó, tồn tại một số thực $c\in(a,b)$ sao cho $f'(c)=0$.

Một số hệ quả thường dùng của các định lí này là

(1) Nếu hàm số $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) và phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm thuộc (a,b) thì phương trình $f'(x)=0$ có ít nhất $k-1$ nghiệm thuộc (a,b).

(2) Nếu $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi cấp k trên (a,b), đồng thời đạo hàm cấp k của hàm $f(x)$ không đổi dấu trên (a,b) thì phương trình $f(x)=0$ có không quá k nghiệm phân biệt thuộc (a,b).

Ta cũng nhắc lại các dạng của bất đẳng thức Bernoulli, một bất đẳng thức gắn liền với hàm số mũ là

(1) Với $0<a\neq 1$ thì ta có $\begin{cases} a^x \geq (a-1)x+1 & \text{với } x\leq 0 \vee x\geq 1 \\ a^x < (a-1)x+1 & \text{với } 0<x<1. \end{cases}$

(2) Với $x>0$ thì $x^a \geq a(x-1)+1$ với mọi $a>1$ và đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

Chứng minh.

(1) Xét hàm số $f(x)=a^x-(a-1)x-1$.

Ta có $f'(x)=a^x\ln a-(a-1), f''(x)=a^x(\ln a)^2>0$ nên phương trình $f(x)=0$ có không quá hai nghiệm phân biệt. Ta lại thấy $f(0)=f(1)=0$ nên $x=0, x=1$ là hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Vẽ bảng biến thiên, ta dễ dàng thấy được rằng

$$f(x) \geq 0, x \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty) \text{ và } f(x) < 0, \forall x \in (0;1).$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

(2) Ta xét hàm số $f(x) = x^a - a(x-1) - 1, x > 0$.

Ta có $f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1), f''(x) = a(a-1)x^{a-2} > 0$ nên hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ hay $f(x) \geq f(1) = 0$.

Do đó, ta được $x^a \geq a(x-1) + 1, \forall x > 0, a > 1$. □

Dạng 1. Dùng hàm số đánh giá trực tiếp

Trong phần này, ta xét các bài toán có dạng $f(x) = 0$ và trong đó, hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp 1, 2 hoặc 3 đồng biến. Khi đó, số nghiệm của phương trình đã cho được biết chính xác và để hoàn tất lời giải, ta chỉ cần nhẩm ra các nghiệm đó.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

a) $(2-x)(2+4^x) = 6$ b) $x^3 + 2x + 3 + \ln(x^2 + x + 1) = 0$.

Giải. Do $2 + 4^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$2 - x = \frac{6}{2+4^x} \Leftrightarrow x + \frac{6}{2+4^x} - 2 = 0.$$

Đặt $f(t) = t + \dfrac{6}{2+4^t} - 2, t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \dfrac{4^{2t} + 4^t(4 - 6.\ln 4) + 4}{(2+4^t)^2}$ và

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4^{2t} + 4^t(4 - 6.\ln 4) + 4 = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo biến 4^t nên nó có không quá hai nghiệm. Do đó, phương trình $f'(t) = 0$ có không quá hai nghiệm (mỗi giá trị dương của 4^t cho ta đúng một giá trị của t).

Từ đó ta thấy phương trình $f(t) = 0$ có không quá ba nghiệm.

Mặt khác ta cũng có $f(0) = f(1) = f(\frac{1}{2}) = 0$ nên các giá trị này cũng nghiệm đúng phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = 0, x = 1, x = \dfrac{1}{2}$.

b) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x + 3 + \ln\left(x^2 + x + 1\right), x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{\left(3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 2\right) + (2x+1)}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{\left(3x^4 + 3x^3 + 3x^2\right) + \left(2x^2 + 4x + 3\right)}{x^2+x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số này đồng biến và phương trình $f(x)=0$ có không quá một nghiệm.

Hơn nữa $f(-1)=(-1)^3+2.(-1)+3+\ln\left((-1)^2+(-1)+1\right)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=-1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-1$. □

H4 *Giải phương trình sau*

a) $(1+\cos x)^{\log_{\cos x}\sin x}=(1+\sin x)^{\log_{\sin x}\cos x}$

b) $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}+x=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}}+1$.

Ví dụ 5. (Phương trình có dạng $a^x=(a-1)x+1$)

Giải các phương trình sau

a) $2^{\cos 2x}\cos x+2\cos^2 x=2^{\cos 2x-1}+4\cos^3 x$

b) $3^x=1+x+\log_3(1+2x)$

c) $4^x+3^x=4x+2+\log_4\left(5x+2-3^x\right)$.

Giải.

a) Ta có

$$2^{\cos 2x+1}\cos x+2\cos^2 x=2^{\cos 2x}+4\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos 2x}(2\cos x-1)=2\cos^2 x(2\cos x-1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(2^{\cos 2x}-2\cos^2 x)=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\vee 2^{\cos 2x}=\cos 2x+1.$$

- Với $\cos x=\frac{1}{2}$, ta có $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

- Với $2^{\cos 2x}=\cos 2x+1$, ta thấy đây chính là phương trình có dạng Bernoulli nên nó có nghiệm là $\cos 2x=0\vee\cos 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\vee x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có ba họ nghiệm là

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, x=k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

b) $3^x=1+x+\log_3(1+2x)$. Điều kiện xác định $x>-\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3^x+x=3^{\log_3(2x+1)}+\log_3(2x+1)$.

Dễ thấy hàm số $f(t)=3^t+t, t\in\mathbb{R}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình trên chính là $f(x)=f(\log_3(2x+1))$ nên ta được $x=\log_3(2x+1)\Leftrightarrow 3^x=2x+1$.

Phương trình này có dạng bất đẳng thức Bernoulli nên nó có nghiệm là $x=0, x=1$ và đây cũng chính là hai nghiệm của phương trình đã cho.

c) $4^x+3^x=4x+2+\log_4\left(5x+2-3^x\right)$. Điều kiện xác định : $5x+2>3^x$.

Đặt $t=\log_4(5x+2-3^x)\Leftrightarrow 4^t+3^x=5x+2$, mà thay t vào phương trình đã cho thì ta có $4^x+3^x=4x+2+t$.

So sánh hai đẳng thức này, ta được $4^t-4^x=x-t\Leftrightarrow 4^x+x=4^t+t$.

Cũng từ tính đồng biến của hàm số $f(y)=4^y+y$, ta có ngay $x=t$ hay

$$4^x+3^x=5x+2.$$

Phương trình này tương đương với $(4^x-3x-1)+(3^x-2x-1)=0$.

Theo bất đẳng thức Bernoulli thì hai biểu thức trong ngoặc của vế trái luôn cùng dấu với nhau nên đẳng thức xảy ra khi $x=0, x=1$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=0, x=1$.

Nhận xét. Ta thấy rằng hai bài b, c ở trên có cùng dạng là hai hàm số ngược nhau ở hai vế khác nhau. Cũng tương tự như ở phương trình đại số thông thường, dạng này có hai cách giải quen thuộc là đưa về hệ đối xứng hoặc biến đổi để đưa phương trình về dạng $f(x)=f(y)$ và trong phần lời giải nêu trên, chúng ta đã được thấy hai cách đó. Từ các bất đẳng thức Bernoulli bình thường (và có thể là các dạng khác), bằng cách dùng hàm số, ta đã thu được các bài toán thú vị hơn.

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau

a) $5^x+4^x=3^x+2^x+10x^2-6x$

b) $12^x+13^x+14^x=2^x+3^x+4^x+870x^3-2400x^2+1560x$.

Giải.

a) Xét hàm số $f(x)=5^x+4^x-\left(3^x+2^x+10x^2-6x\right), x\in\mathbb{R}$.

Ta thấy $f'''(x)=5^x(\ln 5)^3+4^x(\ln 4)^3-3^x(\ln 3)^3-2^x(\ln 2)^3$.

Rõ ràng $x<0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho vì nếu ngược lại thì $5^x+4^x<3^x+2^x, 10x^2-6x>0\Rightarrow 5^x+4^x<3^x+2^x+10x^2-6x$, mâu thuẫn. Do đó $x\geq 0$. Khi đó $f'''(x)>0$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có không quá ba nghiệm phân biệt. Hơn nữa : $f(0)=f(1)=f(2)=0$ nên phương trình đã cho có đúng ba nghiệm là $x=0, x=1, x=2$.

Trong trường hợp này, nếu như phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm âm thì $g^{(n+1)}(x)\geq 0$ nên các nghiệm của phương trình ban đầu cũng chính là $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$.

H5 *Giải các phương trình sau*

a) $8^x(3x+1)=4$

b) $4^x = x+1$

c) $9^x+3^x=(2x+1)\cdot 2^{x+1}$

d) $e^{\frac{2x}{1-x^2}}+\dfrac{x^2+2x-1}{1-x^2}=\ln\left[\dfrac{1+(e-1)2x-x^2}{1-x^2}\right]^e$.

***Dạng 2. Dùng hàm số để đánh giá gián tiếp**

Các bài xét trong các ví dụ dưới đây tương đối khó hơn và tính đơn điệu của các hàm chưa được nhìn nhận ngay từ đầu, thậm chí, ta chưa tìm được biểu thức tường minh của hàm cần xét mà phải thông qua một số bước biến đổi.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

a) $2^{2^x}+3^{2^x}=2^x+3^{x+1}+x+1$

b) $7^{x-1}=1+2\log_7(6x-5)^3$

c) $2.x^{\log_2 x}+\log_2^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=x^2$.

Giải. a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2^{2^x}-2^{x+1}\right)+\left(3^{2^x}-3^{x+1}\right)=x+1-2^x.$$

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $2^x>x+1$ thì $2^{2^x}-2^{x+1}>0$; $3^{2^x}-3^{x+1}>0$; $x+1-2^x<0$ nên phương trình đã cho không thỏa mãn.

- Nếu $2^x<x+1$ thì $2^{2^x}-2^{x+1}<0$; $3^{2^x}-3^{x+1}<0$; $x+1-2^x>0$ nên phương trình đã cho cũng không thỏa mãn.

- Nếu $2^x=x+1$ thì phương trình đã cho thỏa mãn và khi đó, nghiệm của nó cũng là nghiệm của $2^x=x+1$.

Xét hàm số $f(t)=2^t-(t+1)$. Ta thấy $f'(t)=2^t.\ln 2-1, f''(t)=2^t.(\ln 2)^2>0$ nên phương trình $f(t)=0$ có không quá hai nghiệm phân biệt.

Ta lại thấy $f(0)=f(1)=0$ nên phương trình $f(t)=0$ có đúng hai nghiệm là 0 và 1.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0, x=1$.

b) Điều kiện xác định $x\neq\dfrac{5}{6}$.

Đặt $x-1=a\Rightarrow a\neq-\dfrac{1}{6}$. Ta có phương trình $7^a=1+6\log_7(6a+1)$.

Ta tiếp tục đặt $\log_7(6a+1)=t \Rightarrow 6a+1=7^t$ và $7^a=1+6t$.

Ta được hệ $\begin{cases}7^t=6a+1\\7^a=6t+1\end{cases} \Rightarrow 7^t-7^a=6a-6t \Leftrightarrow 7^t+6t=7^a+6a$

Dễ thấy hàm số $f(y)=7^y+6y$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Đẳng thức cuối ở trên chính là $f(t)=f(a)$ nên ta có được $a=t$ hay $7^a=6a+1$.

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli suy ra nó có nghiệm là $a=0 \vee a=1$, tương ứng, ta tìm được hai nghiệm của phương trình ban đầu là $x=1 \vee x=2$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1, x=2$.

c) Điều kiện $0<x\neq 1$. Đặt $t=\log_2 x \Rightarrow x=2^t$.

Thay vào phương trình đã cho, ta có

$$2.\left(2^t\right)^t+(t-1)^2=2^{2t} \Leftrightarrow 2^{t^2+1}+t^2+1=2^{2t}+2t.$$

Vì hàm số $f(y)=2^y+y$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà đẳng thức cuối ở trên chính là $f(t^2+1)=f(2t)$ nên $t^2+1=2t \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$.

Từ đó suy ra $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho. □

H6 *Giải các phương trình sau*

a) $2011^x(\sqrt{x^2+1}-x)=1$ *b)* $3x\log_3 x=\frac{13}{3}(x-1)+\log_{27} x$.

***Dạng 3. Dùng định lí Lagrange với các phương trình có dạng $f(a)=f(b)$**

Trong dạng này, ta cũng sẽ xét một hàm số để giải quyết nhưng không phải là với biến x thông thường mà biến được chọn dựa vào các hệ số hoặc cơ số cho trước, biến x được xét dưới dạng tham số. Đây là một dạng phương trình thú vị và cách dùng định lí Lagrange để giải quyết là hiệu quả nhất.

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

a) $3^x+7^x=2.5^x$ b) $9^x(3^x+2^x)=2^x(8^x+7^x)+5^x(5^x-2^x)$.

Giải. a) Phương trình đã cho tương đương với $3^x-5^x=5^x-7^x$.

Xét hàm số $f(t)=t^{x_0}-(t+2)^{x_0}$, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình trên, suy ra $f(3)=f(5)$.

Ta thấy hàm số này liên tục trên [3 ; 5], khả vi trên (3 ; 5) nên theo định lí Lagrange, ta có

$$\exists c\in(3;5): f'(c)=\frac{f(3)-f(5)}{3-5}=0 \text{ hay } x_0\left(c^{x_0-1}-(c+2)^{x_0-1}\right)=0.$$

Từ đẳng thức này, ta thấy $x_0 = 0 \vee x_0 = 1$, tức là nếu x_0 là nghiệm của phương trình đã cho thì $x_0 = 0 \vee x_0 = 1$. Thử lại, ta thấy cả hai nghiệm này đều thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$9^x(3^x + 2^x) = 2^x(8^x + 7^x) + 5^x(5^x - 2^x) \Leftrightarrow 10^x - 16^x - 25^x = 14^x - 18^x - 27^x$$

$$\Leftrightarrow 10^x + 12^x - 16^x - 25^x = 12^x + 14^x - 18^x - 27^x. \quad (*)$$

Giả sử x_0 là nghiệm (nếu có) của phương trình (*).

Ta xét hàm số sau $f(t) = t^{x_0} + (t+2)^{x_0} - (t+6)^{x_0} - (t+15)^{x_0}, t > 0$.

Dễ thấy (*) $\Leftrightarrow f(10) = f(12)$.

Hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn [10 ;12], khả vi trên (10 ; 12) nên theo định lí Lagrange thì tồn tại số thực $c \in (10;12)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(10) - f(12)}{10 - 12} = 0$. Do đó, nếu x_0 là nghiệm của phương trình (*) thì nó phải thỏa mãn

$$x_0\left[c^{x_0-1} + (c+2)^{x_0-1} - (c+6)^{x_0-1} - (c+15)^{x_0-1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \vee c^{x_0-1} + (c+2)^{x_0-1} = (c+6)^{x_0-1} + (c+15)^{x_0-1}$$

Đẳng thức thứ hai cho ta $x_0 = 1$ vì nếu

$$x_0 < 1 \Rightarrow x_0 - 1 < 0 \Rightarrow c^{x_0-1} + (c+2)^{x_0-1} > (c+6)^{x_0-1} + (c+15)^{x_0-1},$$

tương tự với $x_0 > 1$ cũng mâu thuẫn.

Thử lại trực tiếp, ta thấy hai giá trị $x = 0, x = 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$. □

H7 *Giải các phương trình sau*

a) $10^x + 40^x = 20^x + 30^x$ *b)* $2^x + 8^x - 10^x = 3^x + 4^x - 7^x$

c) $3^x(4^x + 6^x + 9^x) = 25^x + 2.16^x$.

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

a) $x^{\log_6 2} + 10^{\log_6 x} = 2x$ b) $9^{\cos x} - 4^{\cos x} = 2\cos x$.

Giải. a) Điều kiện xác định : $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{\log_6 x} + 10^{\log_6 x} = 2.6^{\log_6 x} \Leftrightarrow 6^{\log_6 x} - 2^{\log_6 x} = 10^{\log_6 x} - 6^{\log_6 x}.$$

Giả sử phương trình có nghiệm là $x = x_0$.

Ta xét hàm số $f(t) = (t+4)^{\log_6 x_0} - t^{\log_6 x_0}, t > 0$.

Phương trình đã cho chính là $f(2)=f(6)$. Hàm số này liên tục trên $[2; 6]$, khả vi trên $(2; 6)$ nên theo định lí Lagrange thì tồn tại số thực $c \in [2; 6]$ thỏa mãn

$$f'(c)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=0 \Leftrightarrow \log_6 x_0\left[(c+4)^{\log_6 x_0-1}-c^{\log_6 x_0-1}\right]=0.$$

Dễ thấy đẳng thức trên cho ta $x_0=1 \vee x_0=6$, đây chính là điều kiện cần để $x=x_0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Thử hai giá trị này trực tiếp vào phương trình đã cho, ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1, x=6$.

b) Phương trình đã cho có thể viết lại là

$$3^{2\cos x}-2^{2\cos x}=3.2\cos x-2.2\cos x \Leftrightarrow 3^{2\cos x}-3.2\cos x=2^{2\cos x}-2.2\cos x.$$

Đặt $t=2\cos x$ thì $3^t-3t=2^t-2t$ (*)

Giả sử phương trình có nghiệm là $t=t_0$. Ta xét hàm số $f(a)=a^{t_0}-at_0$, phương trình trên chính là $f(2)=f(3)$.

Hàm số này liên tục trên $[2 ; 3]$ và khả vi trên $(2 ; 3)$ nên theo định lí Lagrange thì tồn tại $c \in (2 ; 3)$ thỏa mãn

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=0 \Leftrightarrow t_0c^{t_0-1}-t_0=0 \Leftrightarrow t_0(c^{t_0-1}-1)=0.$$

Dễ thấy rằng đẳng thức này tương đương với $t_0=0 \vee t_0=1$, đây chính là điều kiện cần để $t=t_0$ là nghiệm của phương trình (*). Thử trực tiếp hai giá trị này vào, ta thấy (*) thỏa mãn.

Do đó, (*) có hai nghiệm là $t=0, t=1$ và tương ứng, ta có

$$\cos x=0 \vee \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Nhận xét. Ta thấy rằng phương pháp dùng định lí Lagrange như thế rất hiệu quả đối với các bài toán dạng này. Tuy nhiên, ở bước tìm điều kiện cần của nghiệm phương trình đã cho, nếu phương trình có đạo hàm bằng 0 với ẩn c nêu trên không có nghiệm không phụ thuộc c thì cách giải này không thể sử dụng được và bài toán cần phải áp dụng phương pháp khác để giải quyết. □

H8 *Giải các phương trình sau*

a) $(a+b)^{2\sin^2 x}+(a+b)^{2\cos^2 x}=a^{2\sin^2 x}+a^{2\cos^2 x}+b^{2\sin^2 x}+b^{2\cos^2 x}$

b) $\sqrt{2^{1-3\sin x}+1}+3^{\sin x}=\log_2(1-9\sin x)$

c) $10^{\log_4 x}-4^{\log(x+6)}=6$.

2. Một số dạng toán khác

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau

a) $6^x+1=8^x-27^{x-1}$

b) $x.3^{x^2-1}+(x^2-1).3^x+1-x-x^2=0$

c) $3^{\sin^2 x+1}+3^{\cos^2 x+1}=2^{x+1}+2^{-2x}+9$

Giải.

a) Phương trình đã cho có thể viết lại là $(3^{x-1})^3+(-2^x)^3+1^3=3.3^{x-1}.(-2^x).1$.

Ta đã có một kết quả quen thuộc là $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow a+b+c=0$.

Do đó, từ phương trình trên, ta được $3^{x-1}-2^x+1=0 \Leftrightarrow 3^x+3=3.2^x$.

Ta sẽ chứng minh phương trình này chỉ có không quá hai nghiệm. Thật vậy, xét hàm số $f(t)=3^t+3-3.2^t, t\in\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t)=\ln 3.3^t-3.\ln 2.2^t,$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \ln 3.3^t-3.\ln 2.2^t=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{3\ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}\left(\ln\frac{8}{3}\right).$$

Đạo hàm của hàm số này có nghiệm duy nhất nên hàm số $f(t)$ đổi dấu không quá hai lần, tức là phương trình $f(t)=0$ có không quá hai nghiệm.

Ta lại thấy rằng $f(1)=f(2)=0$ nên $t=1, t=2$ nghiệm đúng phương trình $f(t)=0$. Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm là $x=1, x=2$.

b) Phương trình đã cho có thể viết lại là

$$x.3^{x^2-1}+(x^2-1).3^x+1-x-x^2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(3^x-1)+x(3^{x^2-1}-1)=0.$$

Xét các trường hợp sau :

- Nếu $x=0, x=\pm 1$, ta thấy các giá trị này đều thỏa mãn nên phương trình trên có các nghiệm là $x=0, x=\pm 1$.

- Nếu $x\neq 0, x\neq \pm 1$, ta biến đổi tiếp phương trình thành $\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{3^{x^2-1}-1}{x^2-1}=0$.

Với $t\neq 0$, ta xét hàm số sau $f(t)=\dfrac{3^t-1}{t}$.

Dễ thấy nếu $t>0$ thì $3^t-1>0 \Rightarrow f(t)=\dfrac{3^t-1}{t}>0$; nếu ngược lại $t<0$ thì ta cũng có $3^t-1<0 \Rightarrow f(t)=\dfrac{3^t-1}{t}>0$, tức là $f(t)>0, \forall t\neq 0$.

Phương trình cuối ở trên chính là $f(x)+f(x^2-1)=0$ nên dễ thấy rằng nó vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm là $x=0, x=\pm 1$.

c) Ta xét biến đổi sau

$$3^{\sin^2 x+1}+3^{\cos^2 x+1}-3-9=2^{x+1}+2^{-2x}-3$$

$$\Leftrightarrow 3.3^{\sin^2 x}+3.3^{\cos^2 x}-3^{\sin^2 x+\cos^2 x}-9=2.2^x+2^{-2x}-3$$

Ta có $3.3^{\sin^2 x}+3.3^{\cos^2 x}-3^{\sin^2 x+\cos^2 x}-9=(3^{\sin^2 x}-3)(3-3^{\cos^2 x})$

Do $0\le \sin^2 x, \cos^2 x\le 1$ nên $3^{\sin^2 x}-3\le 0, 3-3^{\cos^2 x}\ge 0$, suy ra

$$(3^{\sin^2 x}-3)(3-3^{\cos^2 x})\le 0.$$

Trong khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$2.2^x+2^{-2x}=2^x+2^x+2^{-2x}\ge 3.\sqrt[3]{2^x.2^x.2^{-2x}}=3 \text{ nên } 2.2^x+2^{-2x}-3\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra trong hai bất đẳng thức trên khi và chỉ khi $x=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$. □

H9 *Giải các phương trình sau*

a) $3^{x^7}+3^{32x^2}+3^{128}=3^{16x^3+1}$ *b)* $(x-1)(x+2)=(x^2-2)e^x+xe^{x^2-2}$.

Ví dụ 11.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $11+10^x+6^x=\left(\sqrt{3}\right)^{y!}$.

b) Cho số thực $a\ge 1$. Hãy tìm tất cả các bộ ba số thực (x,y,z) với $|y|\ge 1$ thỏa mãn phương trình $\log_a^2(xy)+\log_a(x^3y^3+xyz)^2+\dfrac{8+\sqrt{4z-y^2}}{2}=0$.

Giải.

a) Do vế trái nguyên nên vế phải cũng phải nguyên, suy ra $y!>1\Leftrightarrow y\ge 2$.

Mặt khác, ta thấy

$$\left(\sqrt{3}\right)^{y!}=11+10^x+6^x>10\Rightarrow y!>2\Rightarrow y\ge 3\Rightarrow y!\ge 6\Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{y!}\ge 27.$$

- Nếu $y=3$ thì $11+10^x+6^x=27\Leftrightarrow 10^x+6^x=16$. Vế trái tăng theo biến x nên phương trình này có nghiệm duy nhất là $x=1$.

- Nếu $y>3$ thì dễ thấy $x\ge 2$. Ta có

$$11+10^x+6^x=11+(9+1)^x+6^x=11+\sum_{i=0}^{x}C_x^i 9^{x-i}+6^x=12+\sum_{i=0}^{x-1}C_x^i 9^{x-i}+6^x.$$

Dễ thấy rằng $\sum_{i=0}^{x-1} C_x^i 9^{x-i} + 6^x$ chia hết cho 9 và vế phải cũng chia hết cho 9 nhưng 12 không chia hết cho 9 nên trong trường hợp này, phương trình không có nghiệm nguyên nào thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm là $x=1, y=3$.

b) Điều kiện xác định

$$xy>0, 4z-y^2\ge 0, x^3y^3+xyz\ne 0 \Leftrightarrow xy>0, x^2y^2+z\ne 0, 4z\ge y^2,$$

nhưng do $|y|\ge 1$ nên suy ra $z\ge \frac{1}{4}$. Ta có

$$\log_a^2(xy)+\log_a(x^3y^3+xyz)^2+\frac{8+\sqrt{4z-y^2}}{2}\ge$$

$$\ge \log_a^2(xy)+2\log_a(x^3y^3+\frac{xy}{4})+4=\log_a^2(xy)+2\log_a(xy)+2\log_a(x^2y^2+\frac{1}{4})+4$$

$$\ge \log_a^2(xy)+2\log_a(xy)+2\log_a(xy)+4=(\log_a(xy)+2)^2\ge 0$$

(do $a>1$ nên $\log_a(x^2y^2+\frac{1}{4})\ge \log_a(2\sqrt{x^2y^2.\frac{1}{4}})=\log_a(xy)$).

Đẳng thức phải xảy ra nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} 4z-y^2=0 \\ z=\frac{1}{4} \\ xy=\frac{1}{2} \\ \log_a(xy)+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z=y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \\ xy=\frac{1}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{4} \\ y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2}=\frac{1}{a^2} \end{cases}$$

Vậy với $a=\sqrt{2}$ thì có hai bộ thỏa mãn là $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{4}\right),\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{4}\right)$, với $a\ne\sqrt{2}$ thì không có bộ nào thỏa mãn đề bài. □

H10 *a) Chứng minh rằng nếu A, B, C là các góc của một tam giác thì phương trình sau luôn có 4 nghiệm phân biệt*

$$3^{|x^2-2x|}=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.$$

b) Bằng phương pháp đánh giá, hãy giải phương trình sau với $a,b>1$:

$$(2^x+x)(a^x+b^x)=2(a+b)^x+x(a+b).$$

c) Hỏi có bao nhiêu số thực x thỏa mãn phương trình $\frac{1}{5}\log_2 x=\sin(5\pi x)$?

Ta thấy rằng các phương trình mũ và lôgarit giải bằng phương pháp hàm số này thì các nghiệm sẽ được nhẩm và ta cần chứng minh ngoài các nghiệm đó ra, không còn nghiệm nào khác nữa. Chẳng hạn ta xét phương trình đơn giản sau $2^x + 3^x = 13$. Rõ ràng vế trái của phương trình là một hàm đồng biến và chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng $x = 2$ nghiệm đúng phương trình nên nó chỉ có nghiệm là $x = 2$. Nghiệm này không được tìm thông qua một phép biến đổi cụ thể nào mà phải thông qua một cách có vẻ hơi mơ hồ.

Tuy nhiên, với đặc trưng của loại phương trình này, chúng ta phải chấp nhận điều đó và công nhận rằng không có một phương pháp chung nào để giải các phương trình mũ và lôgarit. Thế còn phương trình $2^x + 3^x = 14$ thì sao? Ta cũng biết rằng phương trình này có đúng một nghiệm nhưng không nhẩm được nghiệm đó là gì. Sự thật là phương trình mũ, lôgarit trong trường hợp giải bằng dùng đạo hàm đánh giá, chỉ thành công khi chúng ta nhẩm được nghiệm của nó. Với quan niệm là giải phương trình thì phải tìm tất cả các nghiệm của nó. Chẳng hạn như với phương trình $2^x = x^2$, chúng ta có thể chứng minh được dễ dàng rằng nó có hai nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$ và một nghiệm dương nữa thuộc $(0;1)$ nhưng không thể chỉ ra chính xác giá trị của nó.

Do đó, trong chương trình THPT, các bài toán về giải phương trình dạng này thường đòi hỏi phải có nghiệm với yêu cầu là có thể nhẩm ra được! Trong trường hợp còn lại, ta chỉ có thể tìm các tính chất hoặc số nghiệm của phương trình mà thôi.