PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN N

"Toán học không phải là một quyển sách chỉ gói gọn giữa các tờ bìa mà người ta chỉ cần kiên nhẫn đọc hết nội dung, toán học cũng không phải là một vùng mỏ quý mà ngời ta chỉ cần có thời gian để khai thác; toán học cũng không phải là một cánh đồng sẽ bị bạc màu vì những vụ thu hoạch; toán học cũng không phải là lục địa hay đại dương mà ta có thể vẽ chúng lại được. Toán học không có những giới hạn như không gian mà trong đó nó cảm thấy quá chật chội cho những khát vọng của nó; khả năng của toán học là vô hạn như bầu trời đầy các vì sao; ta không thể giới hạn toán học trong những quy tắc hay định nghĩa vì nó cũng giống như cuộc sống luôn luôn tiến hóa".

Sylvester

I. Lí thuyết

1. Ánh xạ

A) Định nghĩa

Cho hai tập hợp khác rỗng X và Y. Nếu với một phần tử x bất kì thuộc X quy tắc f cho ta <u>xác định duy nhất</u> một phần tử y thuộc Y thì ta gọi f là một ánh xạ đi từ X vào Y. Kí hiệu f : $X \rightarrow Y$. X là tập xác định ; Y là tập giá trị.

B) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

a) Đơn ánh

Ánh xạ f : $X \rightarrow Y$ được gọi là đơn ánh nếu như với mọi x_1, $x_2 \in$ X và $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Chú ý : muốn CM f là đơn ánh thì ta giả sử f(a) = f(b) từ đó ta suy ra a = b.

Việc CM là f là đơn ánh là một công cụ rất tốt trong việc giải phương trình hàm.

b) Toàn ánh

Ánh xạ f : $X \rightarrow Y$ được gọi là toàn ánh nếu như với mọi phần tử y $\in$ Y đều tồn tại phần tử x $\in$ X thỏa mãn f(x) = y.

c) Song ánh

Ánh xạ f : $X \rightarrow Y$ được gọi là song ánh nếu như nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

2. Hàm số

A) Định nghĩa

Cho X, Y $\in$ R. Một ánh xạ f : $X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số từ tập X đến tập Y kí hiệu là f : $X \rightarrow Y$ hay y = f(x).

3. Cấp số cộng, cấp số nhân

Trong một số trường hợp hàm số có thể coi là một dãy số khi giải phương trình hàm trên N thì việc áp dụng trực tiếp cấp cộng và cấp số nhân khiến lời giải trở lên ngắn gọn.

A) Cấp số cộng

Cho dãy a_n : $a_n = a_{n-1} + d$ (d là hằng số) n ≥ 2 gọi là một cấp số cộng công sai d.

Tính chất: $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ với mọi k $\in$ [2; n – 1].

Công thức tính số hạng tổng quát của cấp số cộng $a_n = a_1 + (n-1)d$.

B)Cấp só nhân

Cho dãy a_n : $a_n = a_{n-1}q$ (q # 0, n ≥ 2) gọi là cấp số cộng công bội là q.

Công thức tính số hạng tổng quát $a_n = a_1 q^{n-1}$.

II. Các phương pháp giải

Một số lưu ý khi giải phương trình hàm

- ***Sử dụng các phép thế có thể để đơn giản phương trình hàm.***
- ***Nên sử dụng tích chất đơn ánh nếu có của hàm số.***
- ***Thay có giá trị đặc biệt các điểm cực biên (nguyên lý cực hạn) tìm ra các điểm bất động.***
- ***Nguyên lý quy nạp là một công cụ hiệu quả trong quá trình giải phương trình hàm tuy nhiên chúng ta phải lựa chọn đúng "điểm rơi".***

Trước khi trình bày phương pháp giải phương trình hàm ta xét một bài toán cổ sau Vespasien là Hoàng đế La Mã thế kỉ thứ nhất từ năm 69 đến năm 79 theo dương lịch. Thờiấy có Josephus là nhà viết sử bị Vespasien truy nã vì can tội chống lại triều đình. Tục truyền rằng Vespasein tìm được ham ẩn náu của 100 người chống đối và kê gọi họ ra hàng, nếu không sẽ tàn sát tất cả. Đa số muốn tự sát, quyết không đầu hàng, chỉ có một người nói nhỏ với Josephus là vì hoàn cảng riêng muốn đầu hàng để sống. Josephus rất thông cảm với người này và đặt ra quy tắc sau, được tất cả mọi người nhất chí thi hành : 100 người đứng thành vòng tròn đánh số từ 1 đến 100 theo chiều kim đồng hồ. Người thứ nhất cầm dao đếm 1 rồi đưa cho người thứ 2, người thứ 2 đếm 2 rồi tự sát. Người thứ 3 cầm dao và lại đếm 1, rồi đưa dao cho người thứ 4, người thứ 4 đếm 2 rồi tự sát ... Cứ như thế mà tiếp tục vòng này qua vòng khác. Cuối cùng còn một người sống. Hỏi Josephus phải sắp xếp người muốn sống ở vị trí nào ?

Bài toán Josephus

Giả sử Josephus có n – 1 bạn ; n người này đúng thành vòng tròn đánh số từ 1 đến n theo chiêu kim đồng hồ và tự sát theo quy tắc như trên. Gọi f(n) là vị trí của người sống sót duy nhất. Tìm f(n).

Albert Einstein *đã nói "**Phương trình quan trọng hơn chính trị, vì chính trị cho hiện đại còn phương trình cho vĩnh cửu**" Trên con đường phát triển của phương trình thì phương trình hàm ra đời và từ khi phát triển đến giờ phương trình hàm luôn là một lĩnh vược khó và thường xuyên xuất hiện trong các cuộc thi học sinh giỏi tỉnh, quốc gia và quốc tế trong các bài toán phương trình hàm thì ẩn không phải là một đại lượng xác định mà là một hàm số. Giống như bài toán của Josephus nó là một bài phương trình hàm theo tôi là cổ nhất nó là một bài toán rất hay bạn hay thử giải nó xem như bài mở đầu "**Vạn sự khởi đầu nan**".*

1. Bất đẳng thức và thứ tự trên N trong phương trình hàm

A) Lí thuyết

Thứ tự sắp xếp trên N có tính chất rất đơn giản nhưng mang đặc trưng của số tự nhiên cũng như số nguyên là $k < f(x) < k + 2$ ta luôn có $f(x) = k + 1$ (k là một số nguyên). Với việc kết hợp tính chất trên với sử dụng các phép biến đổi bất đẳng thức chúng ta có thể kẹp hàm f trong một khoảng giá trị rồi xét loại đi những trường hợp mâu thuẫn với giả thiết cuối cùng đưa ta đến hàm cần tìm.

B) Ví dụ

Ví dụ 1) Tìm tất cả các hàm f: $N^* \to N^*$ thỏa mãn

i) $f(n + 19) \le f(n) + 19$

ii) $f(n + 94) \ge f(n) + 94$

Giải

Ta thấy hai BĐT trên là hai bất đẳng thức không chặt chúng lại ngược nhau lên ta sẽ tìm cách CM chúng quy về 2 BĐT có 2 vế giống nhau nhưng dấu của BĐT thức khác nhau.

Ta có : $f(n + 19k) \le f(n) + 19k$ ($k \in N^*$)

$f(n + 19k) = f((n + 19k - 94) + 94) \ge f(n + 19k - 94) + 94$

Ta chọn k sao cho $19k - 94$ đạt min trên N* dễ thấy $k = 5$ thì $19k - 94 =1$

Tức là $f(n) + 95 \ge f(n + 1) + 94$

Áp dụng liên tiếp có $f(n + 94) \le 1 + f(n + 93) \le .... \le 93 + f(n +1) \le 94 + f(n)$

Suy ra $f(n) + 94 = 93 + f(n + 1)$ hay $f(n + 1) = f(n) + 1$

Vậy $f(n) = a + n - 1$ với $f(1) = a$.

Nhận xét : Với bài toán trên từ các giải ta hoàn toàn có thể tổng quát được việc này tôi dành cho các bạn lưu ý càng tổng quát càng tốt nhưng cũng phải giải được.

Ví dụ 2) Tìm tất cả các hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa mãn với mọi $a,b \in N^*$ thì a, f(b), $f(b + f(a) - 1)$ là ba cạnh của một tam giác.

IMO_2009

Thay a = 1 có 1, f(b), $f(b + f(1) - 1)$ là 3 cạnh của một tam giác có

$f(b) + 1 > f(b + f(1) - 1) > f(b) - 1$ suy ra $f(b) = f(b + f(1) - 1)$.

Ta sẽ CM $f(1) = 1$

Thay $a = a + k(f(1) - 1)$ ta được $a + k(f(1) - 1)$, f(b), $f(b + f(a + k(f(1) - 1) - 1)$ là ba cạnh của một tam giác. Mà ta có $f(b) = f(b + f(1) -1)$ nên

$f(b + f(a + k(f(1) - 1) - 1) = f(b + f(a + (k - 1)(f(1) - 1) - 1) = ... = f(b + f(a) - 1)$.

$\Rightarrow a + k(f(1) - 1), f(b), f(b + f(a) - 1) \Rightarrow f(b) + f(b + f(a) - 1) > a + k(f(1) - 1)$

Nếu a,b cho là một hằng số thì khi $k \to +\infty$ thì bất đẳng thức trên đúng khi $f(1) = 1$.

Thay b = 1 ta có a, f(1), f(f(a)) là 3 cạnh của một tam giác $\Rightarrow f(f(a)) = a$.

$\Rightarrow$ f là đơn ánh .

Đặt $f(2) = x$. Có $f(x) = 2$.

Thay a =2; b = x ta có 2, 2, $f(x + f(2) - 1)$ là 3 cạnh của một tam giác.

$\Rightarrow 4 > f(x + f(2) - 1) > 0$.

Nếu $f(x + f(2) - 1) = 1 = f(1) \Rightarrow x + f(2) - 1 = 1 \Rightarrow x < 2$ (mâu thuẫn)

Nếu $f(x + f(2) - 1) = 2 = f(x) \Rightarrow x + f(2) - 1 = x \Rightarrow f(2) = 1$ (mâu thuẫn)

Vậy $f(x + f(2) - 1) = 3$.

Ta CM $f(x + f(n) - 1) = n + 1$. (*)

Ta thấy (*) đúng với n = 1,2.

Giả sử (*) đúng với n < k. Ta đi CM (*) đúng với n = k.

Thật vậy: thay a = k; b = x ta có k, 2, $f(x + f(k) - 1)$ là 3 cạnh của một tam giác.

$\Rightarrow k + 2 > f(x + f(k) - 1) > k - 2$.

Nếu $f(x + f(k) - 1) = k - 1 = f(x + f(k - 2) - 1)$ (mâu thuẫn)

Nếu $f(x + f(k) - 1) = k = f(x + f(k - 1) - 1)$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ đpcm.

Ta có $f(x + f(n) - 1) = f(f(n + 1))$

$\Rightarrow x + f(n) - 1 = f(n + 1)$

$\Rightarrow$ f(n + 1) = n(x – 1) + 1 thay vào n + 1 = f(f(n + 1)).
$\Rightarrow$ f(n) = n.
Vậy f(n) = n.

Ví dụ 3) Tìm tất cả các hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) < f(n + 1) \text{ với mọi } n \in N^*$$

IMO 1997

Chú ý: Mọi tập hợp khác rỗng là tập con của N thì luôn tồn tại phần tử nhỏ nhất. Mọi tập hợp hữu hạn là tập con của N thì luôn tồn tại phần tử lớn nhất và nhỏ nhất.

Giải

Gọi m = min{f(n), n $\in$ N*}
Vậy luôn tồn tại x$\in$ N* sao cho f(x) = m.
Nếu x > 1 thì m = f(x) > f(f(x – 1)) $\geq$ m mâu thuẫn.
$\Rightarrow$ x = 1 $\Rightarrow$ f(2) > f(1).
Tương tự chọn m_1 = min{f(n), n $\in$ N* và n >1}
$\Rightarrow$ m_1 = 2 $\Rightarrow$ f(3) > f(2)
Vậy ta có f(1) < f(2) < ……...< f(n)<…
Vì f(1) $\geq$ 1 nên f(n) $\geq$ n.
Giả sử tồn tại một số k thỏa mãn f(k) > k + 1.
Có f(f(k)) > f(k + 1) > f(f(n)) mâu thuẫn.
Vây f(n) = n.
Nhận xét: Bài toán trên ta đã xét phần tử nhỏ nhất của tập giá trị theo toán rời rạc thì đây được gọi là nguyên lý cực hạn. Trong nhiều bài toán ta áp dụng nguyên lý cực hạn sẽ rất có lợi và nhiều khi nó có thể giúp ta giải hoàn toàn bài toán đó giống như ví dụ 3.

Ví dụ 4) Tìm tất cả hàm f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn với mọi n $\in$ N* có

$$f(n) + f(n + 1) = f(n + 2).f(n + 3) – 1996. \quad (1)$$

VMO_1996A

Giải

Thay n bằng n + 1 có
f(n + 1) + f(n + 2) = f(n +3).f(n + 4) – 1996. (2)
Trừ từng vế của (1) cho (2) ta được

$$f(n)-f(n+2)=f(n+3)\left[f(n+2)-f(n+4)\right] \quad (*)$$

Ta CM f(n) $\leq$ f(n + 2) nhưng trước hết ta CM f(1) $\leq$ f(3). Thật vậy nếu f(1) > f(3).
Từ (*) quy nạp có f(2m + 1) > f(2m + 3) với mọi m $\in$ N.
$\Rightarrow f(1)>f(3)>f(5)>....$ đây là dãy vô tận các số tự nhiên giảm dần từ f(1) vô lí.
Tương tự có f(2) $\leq$ f(4). Vậy quy nạp ta có f(n) $\leq$ f(n + 2).
(1) $\Leftrightarrow 1996+f(n)+f(n+1)-f(n+2)f(n+3)=0$.
$\Leftrightarrow 1996+f(n+2)+f(n+3)-f(n+2)f(n+3)\geq 0$
$\Leftrightarrow 1997-(f(n+2)-1)(f(n+3)-1)\geq 0$ (**)
Ta thấy nếu f(n) < f(n+2) thì khi n$\to +\infty$ thì $(f(n+2)-1)(f(n+3)-1)\to +\infty$ mâu thuẫn với (**).

Vậy chỉ có 3 TH sau xảy ra

TH1 Nếu $\begin{cases} f(2n)=a \\ f(2n+1)=b \end{cases}$

Khi đó (a – 1)(b – 1) = 1997 mà 1997 là số nguyên tố có

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1998 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1998 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ f(2n) = 2, f(2n + 1) = 1998 hoặc ngược lại.

Thử lại ta thấy thỏa mãn.

TH 2 Nếu f(2n) là hằng số f(2n + 1) không phải là hằng số.

Nếu f(2n) – 1 > 0 thì có $n \to +\infty \Rightarrow (f(2n)-1)(f(2n+1)-1) \to +\infty$ mâu thuẫn với (**) $\Rightarrow$ f(2n) = 1.

Từ một ta có $f(2n)+f(2n+1)=f(2n+2)f(2n+3)-1996$.

$\Leftrightarrow f(2n+3)=f(2n+1)+1997$.

Vậy có f(2n) = 1; f(2n + 1) = 1997n + f(1) với f(1) tùy ý.

TH3 f(2n) không phải là hằng số f(2n + 1) là hằng số. Tương tự TH2.

Nhận xét: Bài toán trên ta đã sử dụng tính chất đã nêu ở trong phần chú ý trên. Tính chất này được áp dụng rất nhiều tronh giải phương trình hàm.

Ví dụ 5) Cho hàm f : $N \to N$ thỏa mãn với mọi m, n $\in$ N thì
f(2) = 0, f(3) > 0 và f(9999) = 3333; f(m + n) – f(m) – f(n) = 0 hoặc 1.(*)
Tính f(1982).

IMO_1982

$(*) \Leftrightarrow f(m+n)=f(m)+f(n)+\left[\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$.

Ta dễ CM được f(1) = 0, f(3) = 1. Bằng quy nạp ta CM f(3n) $\geq$ n.

Ta thấy nếu f(3n) > n thì với mọi m > n thì f(3m) > m. Thật vậy có
$f(3(n+1)) \geq f(3n)+f(3)+\left[\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right. > n+1$. Mà ta có f(9999) = 3333$\Rightarrow$ với mọi n $\leq$ 3333 thì f(3n) = n.

Ta có $f(3n+1)=\left[\begin{array}{l}n\\n+1\end{array}\right.$; $3n+1=f(9n+3)\geq f(6n+3)+f(3n+1)\geq 3f(3n+1)$.

$\Rightarrow$ f(3n + 1) = n. Tương tự f(3n +2) = n.

Vậy có $f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]$ với mọi n $\leq$ 3333 $\Rightarrow$ f(1982) = 660.

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán nằm ở *f(3n)* $\geq$ *n* tuy nhiêu nếu thiếu đi điều kiện f(2) = 0 và f(3) > 0 thì bài toán trên giải ra sao đây? Ta xét bài toán tổng quát sau đây.

Ví dụ 6) Cho D = {1, 2, …, 2010}. Hàm số f : $D \to N$ thỏa mãn với mọi m,n $\in$ D mà m + n $\leq$ 2010 thì

f(m) + f(n) $\leq$ f(m + n) $\leq$ f(m) + f(n) + 1.

Chứng minh rằng tồn tại số thực x sao cho với mỗi n $\in$ D, thì f(n) = [nx].
(Với [a] là số nguyên lớn nhất không vượt quá a)
Giải

Ta thấy $f(n)=[nx] \Leftrightarrow \dfrac{f(n)}{n} \le x < \dfrac{f(n)+1}{n}$.

Đặt $a=\max\left\{\dfrac{f(n)}{n}; n\in D\right\}$; $b=\min\left\{\dfrac{f(n)+1}{n}; n\in D\right\}$.

Ta cm a < b thì tồn tại vô số thực x thỏa mãn.
Gọi h,k lần lượt là các số nhỏ nhất thuộc D thỏa mãn

$c=\dfrac{f(h)}{h}; b=\dfrac{f(k)+1}{k} \Rightarrow ch=f(h); bk=f(k)+1.$

$\Rightarrow \forall m\in[1;h-1]; f(m)<mc$ và $\forall n\in[1;k-1]; f(n)+1>nb$.

TH1 k = h thì f(h) = f(k) < f(k) + 1 $\Rightarrow$ hc < kb $\Rightarrow$ c < b.
TH2 k > h đặt k = h + p với p$\in$ [1; k – 1].
Có kb = f(k) + 1 = f(h + p) + 1 $\ge$ f(h) + f(p) + 1 > hc + pb
$\Rightarrow$ hb > hc $\Rightarrow$ b > c.
TH3 k < h đặt h = k +p với p$\in$ [1; h – 1].
Có hc = f(h) = f(k + p) $\le$ f(k) + f(p) + 1 < kb + pc.
$\Rightarrow$ kc < kb $\Rightarrow$ c < b.$\Rightarrow$ đpcm.
Ta thấy trong cách CM trên thì con số 2010 không hề có tính chất gì trong bài toán chỉ là nó là một số > 1. Quay lại ví dụ 5 từ (*) ta có

$$f(m) + f(n) \le f(m + n) \le f(m) + f(n) + 1.$$

Khi đó $f(9999)=[9999x]=3333 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{3334}{9999} \Rightarrow \dfrac{1982}{3} \le 1982x < \dfrac{1982.3334}{9999}$

$\Rightarrow$ f(1982) = [1982x] = 660.
Nhận xét: Hai điều kiện giả thiết cho là thừa và có thể CM được giả thiết đó tương tự như trên. Chúng ta hoàn toàn có thể tổng quát thêm bằng cách thay số 2010 thành n tùy ý > 1 bài toán vẫn được giải quyết. Ở kì thi USAMO_1997 thì con số 2010 được thay bởi 1997.

C) Bài tập

Bài 1. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn
   i. f(1) = 1.
   ii. $f(f(n))f(n+2)+1=f(n+1)f(f(n+1))$.

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn
   i. f(x + 22) = f(x).
   ii. f(x^2y) = f(x)^{2}f(y).

Austrian_2002

Bài 3. Cho f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn
   i. f là hàm tăng.
   ii. f(mn) = f(m).f(n).
   iii. Với m $\ne$ n và $m^n = n^m$ thì f(m) = n hoặc f(n) = m.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

i. f tăng thực sự trên N*.
ii. f(mn) = f(m)f(n) với (m,n) = 1.
iii. f(2) = 2.

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

$$f_{1002}(n) + 2003f(n) = 2004n + 2005 \text{ với } f_m(n) = \underbrace{f(f(....(f(n))....)}_{m\,lan\,f}.$$

Bài 6. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn
i. f tăng thực sự trên N*.
ii. $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$.

Cono Sur Olympiad_1995

Bài 7. Dãy số nguyên dương (s_n) thỏa mãn $0 \le s_{m+n} - s_m - s_n \le K$; m,n = 1, 2, 3… với K là một số nguyên dương. Với N là số nguyên dương tùy ý, tồn tại hay không các số thực $a_1, a_2, \dots a_K$ sao cho

$$s_n = \sum_{k=1}^{K} [a_k n], n \in [1, N].$$

(Tổng quát của ví dụ 6)

Bài 8. **Không có gì hủy hoại những khả năng toán học bằng thói quen tiếp nhận những phương pháp giải có sẵn mà không hề tự hỏi vì sao cần giải đúng như thế và làm thế nào để có thể tự nghĩ ra điều đó.**

W.W. Sawyer

Hãy cho biết tại sao các ví dụ lại được giải như thế có cách giải nào khác không?

Đừng quá lo lắng về những khó khăn bạn gặp phải trong Toán học. Tôi dám chắc tôi còn gặp nhiều khó khăn hơn bạn.

ALBERT EINSTEIN

2. *Phương trình hàm sử dụng tính chất số học*
Các tính chất số học như sự chia hết, đồng dư, số nguyên tố, khai triển chính tắc…. có thể áp dụng trong việc giải phương trình hàm. Phương pháp này được chia thành 2 phần nhỏ có ứng dụng tương đương nhau trong việc giải phương trình hàm (theo ý kiến của tôi).

Phần 1. Các tính chất số học trong phương trình hàm
Về lí thuyết của phần này thì bạn chỉ cần nhớ các tính chất số học về đồng dư, sự chia hết khai triển chính tắc, định lý phần dư Trung Hoa, ...

A) Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

$$f(x)^2 + y \vdots f(y) + x^2 \text{ với mọi x, y} \in N^* \ (*)$$

Giải

Thay x = y =1 vào (*) ta được $f(1)^2 + 1 \vdots f(1) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$.

Thay y = 1 vào (*) ta có $f(x)^2 + 1 \vdots f(1) + x^2 \Rightarrow f(x) \geq x$.

Thay x = 1 vào (*) ta có $f(1) + y \vdots f(y) + 1 \Rightarrow y \geq f(y)$.

Vậy f(x) = x.

Ví dụ 2.Giả sử hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

$$(m+n)^{2009} \vdots \left(f(m) + f(n) \right) \text{ với mọi m, n} \in N^*.$$

CMR f(1), f(2), f(3), … là cấp số cộng với công sai dương.

OLP30/4_2009

Giải

Trước tiên ta đi CM f là đơn ánh.

Giả sử f không phải là đơn ánh $\Rightarrow \exists$ a, b $\in N^*$ thỏa mãn a < b và f(a) = f(b).

Có $(a + n)^{2009} \vdots (f(a) + f(n))$ và $(b + n)^{2009} \vdots (f(b) + f(n)) = f(a) + f(n)$

$\Rightarrow \left((a+n)^{2009}, (b+n)^{2009} \right) = f(a) + f(n) \geq 2$

$\Rightarrow \left(a+n, b+n \right) \neq 1 \Rightarrow (a+n, b-a) \neq 1$ (thuật toán ơclít)

Thay n = p – a với p là số nguyên tố > b . có $(p, b-a) \neq 1$ mâu thuẫn.

Vậy f là đơn ánh.

Với t tùy ý thuộc N* ta có $(n+t)^{2009} \vdots (f(n) + f(t))$ và $(n+t+1)^{2009} \vdots (f(n) + f(t+1))$.

Mà $\left(n+t, n+t+1 \right) = 1 \Rightarrow \left((n+t)^{2009}, (n+t+1)^{2009} \right) = 1$

$\Rightarrow \left(f(n) + f(t), f(n) + f(t+1) \right) = 1 \Rightarrow \left(f(n) + f(t), f(t+1) - f(t) \right) = 1.$

Ta CM f(t + 1) – f(t) = ± 1 (*)

Giả sử f(t + 1) – f(t) $\neq$ ± 1 mà f là đơn ánh nên f(t + 1) – f(t) $\neq$ 0.

Gọi p là ước nguyên tố của f(t + 1) – f(t).

Có $(n+t)^{2009} \vdots (f(n) + f(t))$ thay n = p^k – t (k $\in N^*$ thỏa mãn $p^k > t$).

$\Rightarrow p^{2009k} \vdots (f(p^k - t) + f(t)) \Rightarrow f(p^k - t) + f(t) \vdots p$.

$\Rightarrow \left(f(p^k - t) + f(t), f(t+1) - f(t) \right) = p$ mâu thuẫn.

Vậy f(t + 1) – f(t) = ± 1.

Nếu f(t + 1) = f(t) – 1 thì f là hàm giảm nghiêm ngặt mâu thuẫn với tập giá trị của f là tập số nguyên dương luôn có phần tử nhỏ nhất.

$\Rightarrow$ f(t + 1) = f(t) + 1 $\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Nếu tinh ý thì từ giả thiết ta thấy f(n) = n thỏa mãn đề bài từ đó khiến ta nghĩa đến việc CM đẳng thức (*) mấu chốt của bài toán. Trong bài toán trên ta sử dụng thuật toán Ơclit trong tìm ước chung lớn nhất.

Ví dụ 3. Tồn tại hay không một song ánh f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

$$f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(n) \vdots n$$

Giải

Ta thấy bài toán trên cho f là một song ánh là bài toán trở nên khó khăn tuy nhiên để chỉ hỏi có tồn tại hay không ta chỉ cần chỉ ra một song ánh thỏa mãn là được.

Ta dựng hàm f như sau f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2 giả sử ta xác định được f(1), f(2) … f(k). Gọi n là số nguyên nhỏ nhất không thuộc các số trong dãy. Theo định lý thặng dư Trung Hoa luôn tồn tại m thỏa mãn.

$$m \equiv -(f(1)+f(2)+f(3)+...+f(k))(\mathrm{mod}(k+1))$$

$$m \equiv -(f(1)+f(2)+f(3)+...+f(k)+n)(\mathrm{mod}(k+2))$$

Khi đó f(k + 1) = m, f(k + 2) = n.

Tiếp theo ta xét đến khai triển chính tắc.

Chú ý :

Định lí cơ bản của số học: Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó n luôn có thể biểu diễn được một cách duy nhất (hiểu theo nghĩa không tính đến việc sắp xếp thứ tự các nhân tử) dưới dạng sau

$$n = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \ldots\ldots p_k^{q_k}$$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N$ thỏa mãn

i. f(mn) = f(m) + f(n).
ii. f(30) = 0.
iii. f(n) = 0 nếu n ≡ 7 (mod 10).

Giải

Có f(30) = f(2) + f(5) + f(3) = 0.

$\Rightarrow$ f(2) = f(3) = f(5) = 0.

Với x là một số nguyên dương tùy ý có $x = 2^{p_1}5^{p_2}k$ với k không chia hết cho 2 và 5 $\Rightarrow$ f(x) = f(k) và k có tận cùng là 1, 3, 7, 9.

Nếu k ≡ 7 (mod 10) $\Rightarrow$ f(k) = 0.

Nếu k ≡ 1 (mod 10). Thay m = 7, n = k vào (i) có f(7k) = f(7) + f(k) = f(k).

Mà 7k ≡ 7 (mod 10) $\Rightarrow$ f(k) = 0.

Nếu k ≡ 3 (mod 10). Thay m = 7, n = k vào (i) có f(7k) = f(7) + f(k) = f(k).

Mà 7k ≡ 1 (mod 10) $\Rightarrow$ f(k) = 0.

Nếu k ≡ 9 (mod 10). Thay m = 3, n = k vào (i) có f(3k) = f(3) + f(k) = f(k).

Mà 3k ≡ 7 (mod 10) $\Rightarrow$ f(k) = 0.

Vậy f(n) = 0 với mọi n$\in$ N*.

Ví dụ 5. Cho số k lẻ > 1. Với mỗi số nguyên dương n ta xác định f(n) là số nguyên không âm lớn nhất sao cho $k^n - 1 \vdots 2^{f(n)}$. Xác định công thức tính f(n) theo k và n.

VMO_1991A

Giải

Ta thấy f(n) là số mũ của 2 trong khai triển chính tắc của $k^n - 1$.

Có $k^{4n} = (k^{2n}+1)(k^{2n}-1)$ mà k^{2n} là số chính phương lẻ $\Rightarrow$ $k^{2n}+1$ không chia hết cho 4 chỉ chia hết cho 2. $\Rightarrow f(4n) = f(2n) + 1$.

Mặt khác để ý $k^n - 1 = (k-1)(k^{n-1} + k^{n-2} + ... + k + 1)$.

Nếu n lẻ thì $k^{n-1} + k^{n-2} + ... + k + 1$ không chia hết cho 2.

$\Rightarrow$f(n) = f(1) nếu n lẻ. (1)

Xét hàm g(n) là số nguyên dương lớn nhất sao cho $k^n + 1 \vdots 2^{g(n)}$.

Ta có $k^n + 1 = 1 - (-k)^n = (1+k)(1 + (-k) + (-k)^2 + ... + (-k)^{n-1})$.

Tương tự có nếu n lẻ thì g(n) = g(1)

Có $k^{4n+2} - 1 = (k^{2n+1} - 1)(k^{2n+1} + 1)$ $\Rightarrow$ $f(4n+2) = f(2n+1) + g(2n+1)$. (2)

Vậy ta có với $n = 2^m p$ (p lẻ) thì có

$$f(n) = \begin{cases} f(1); m = 0 \\ (m-1) + f(1) + g(1); m \geq 1 \end{cases}.$$

Trong đó f(1) là số mũ của 2 trong khai triển chính tắc của k - 1.

g(1) là số mũ của 2 trong khai triển chính tắc của k + 1.

Nhận xét: Ta xét hàm g(n) vì nhận thấy được f(n) và g(n) cùng có chung tính chất (1) và việc phát hiện ra tính chất (2) vừa cho ta ý tưởng xét hàm g(n) vừa là mấu chốt của bài toán.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các hàm số f : $N \to N$ thỏa mãn

f(f(n)) = 2n với mọi n$\in$ N. (*)

Giải

Ta dễ dàng nhận thấy f là đơn ánh.

Thay n bằng f(n) vào (*) được f(f(f(n))) = 2f(n) $\Rightarrow$ f(2n) = 2f(n).

Xét số tự nhiên m tùy ý đặt $m = 2^k p$ với p là số lẻ $\Rightarrow f(m) = 2^k f(p)$.

Đặt $f(m) = 2^h q$ với q là số lẻ có $2^h q = 2^k f(p) \Rightarrow h \geq k$.

Có $f(2^h q) = f(2^k f(p)) \Rightarrow 2^h f(q) = 2^k f(f(p)) = 2^{k+1} p \Rightarrow k \geq h - 1$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = h \Rightarrow f(p) = q \\ k = h - 1 \Rightarrow f(p) = 2q \end{array}\right.$$

Mặt khác $f(p) = q \Rightarrow f(f(p)) = f(q) \Rightarrow f(q) = 2p$.

Vậy f(p) = q hoặc f(p) = 2q.

Nếu f(p) = p $\Rightarrow$ $f(f(p)) = f(p) \Rightarrow 2p = p$ mâu thuẫn.

Vậy ta thiết lập hàm f như sau: Phân hoạch tập số tự nhiên lẻ thành hai tập hợp vô hạn.

$A=\{a_1,a_2,....,a_i,....\}; B=\{b_1,b_2,....,b_i....\}$.

$$f(m)=\begin{cases} f(0)=0; m=0 \\ f(a_i)=b_i; m=2^k a_i \\ f(b_i)=2a_i; m=2^k b_i \end{cases}.$$

B) Bài tập

Bài 1. Tìm tất cả các hàm số f : $N^*\to N^*$ thỏa mãn

$(m^2+n)^2 \vdots f(m)^2+f(n)$ với mọi m, n $\in$ N*.

IMO Shorlists 2004

Bài 2. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các hàm số f : $Z \to Z$ thỏa mãn

i) $f(m)=f(n)$ nếu m $\equiv$ n (mod p)

ii) $f(m.n)=f(m)f(n)$

USA TST

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số f : $N \to N$ thỏa mãn các điều kiện

i) $f(m^2+n^2)=f^2(m)+f^2(n)$ với mọi m, n thuộc N.

ii) $f(1)>0$.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số f : $Z \to Z$ thỏa mãn

$f(a^3+b^3+c^3)=f^3(a)+f^3(b)+f^3(c)$.

TST_2005

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số f : $N \to N$ thỏa mãn

$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$

IMO_1996

Bài 6. Tìm tất cả các hàm số f : $N^*\to N^*$ thỏa mãn

i) f là toàn ánh.

ii) $f(n) \vdots f(m) \Leftrightarrow n \vdots m$ với mọi n, m là số nguyên dương.

Bài 7. Tìm tất cả các hàm số f : $N\to N$ thỏa mãn

$f(f(n))=pn$ với p là số nguyên tố lẻ cho trước.

Bài 8. **Không có gì hủy hoại những khả năng toán học bằng thói quen tiếp nhận những phương pháp giải có sẵn mà không hề tự hỏi vì sao cần giải đúng như thế và làm thế nào để có thể tự nghĩ ra điều đó.**

W.W. Sawyer

Hãy cho biết tại sao các ví dụ lại được giải như thế có cách giải nào khác không?

Đừng quá lo lắng về những khó khăn bạn gặp phải trong Toán học. Tôi dám chắc tôi còn gặp nhiều khó khăn hơn bạn.

ALBERT EINSTEIN

Phần 2. Số nguyên tố và hàm nhân tính

Trước hết ta tìm hiểu về hàm nhân tính.Hàm số f:N*→N* được gọi là có tính chất nhân khi với mọi m,n thuộc N* có:f(mn)=f(m)f(n)
Các hàm số nhân có t/c nhân đặc biệt nên thuận lợi khi tính giá trị của nó tại điểm tuỳ ý.Như vậy để xác định giá trị của hàm số chỉ càn xác định tại các điểm nguyên tố

VD1(Úc 2002): Tìm tất cả f:N*→N* t/m:
+f(x+22t)=f(x) (x>1)
+$f(x^2y)=f(x)^2f(y)$ (x>1)
Giải:
Cho x=y=1,ta có:$f(1)=f(1)^3$ =>f(1)=1.Với 1<x<23,tồn tại k để:22|x(kx-1).Khi đó $x+22t=kx^2$.
=>$f(x)=f(x+22t)=f(x^2k)=f(x)^2.f(k)$=>f(x)f(k)=1 mà f(x);f(k) thuộc N* =>f(x)=f(k)=1
Vậy f(x)=1 với mọi x thuộc N*

VD2:Cho hàm f:N*→N* thoã mãn:f(mf(n))=nf(m) (1) với mọi m,n thuộc N*(f là 1 đơn ánh).CMR:nếu p là số nguyên tố thì f(p) cũng là số nguyên tố.Chỉ ra 1 hàm số t/m đề bài
Giải:
Đặt f(1)=a.Với m=1 ta có:f(f(n))=nf(1)=an.
Cho n=1 thay vào (1) ta có:f(am)=f(m)hayf(an)=f(n)
Do đó f(f(an))=f(f(n)) nên a.an=an nên a=1.Vây f(1)=1
Ta có f(f(n))=n với mọi n
Sau đó ta cm f là hàm nhân tính:
f(f(m).f(n))=nf(f(m))=mn=f(f(mn)), mà f là đơn ánh nên f(mn)=f(m).f(n)
Đã cm được f là hàm nhân tính ta nghĩ ngay đến việc xét giá trị hàm số tại các điểm nguyên tố.
Gọi p là một số nguyên tố t/m:f(p)=mn,ta có:

f(f(p))=f(m).f(n)) hay p=f(m)f(n)

Suy ra khi f(m)=p và f(n)=1 hay ngược lại,mà f là đơn ánh nên m=1 hay n=1, nghĩa là m hay n là số nguyên tố
Suy ra p nguyên tố thì f(p) cũng nguyên tố
Gọi f(p)= q là số nguyên tố,thì f(f(p))=f(q) thì f(q)=p
Từ đó ta thấy với p là số nguyên tố thì f(p)=q cũng là một số nguyên tố và f(q)=p.Từ đó ta có cách xây dưng hàm số như sau:
Gọi p_i là số nguyên tố thứ i,nghĩa là $p_1=2,p_2=3,\ldots$

Chia cặp số nguyên tố thành các cặp (p_{2k-1}, p_{2k}) với k=1;2;3;….
f(1)=1
$f(p_{2k-1})=p_{2k}$;$f(p_{2k})=p_{2k-1}$;k=1;2;3;….

Hàm f xác định như trên t/m đầu bài
VD3:Cho hàm số f:N*→N* t/m:$f(mf(n))=n^2f(m)$ với mọi m,n thuộc N*.CMR:f(2003) là số nguyên tố hoặc là bình phương số nguyên tố(f là một đơn ánh)
Giải:
Từ VD2,hơn nữa đề lại cho 2003 là số nguyên tố nên ta dễ dành đoán được ta phải cm nếu p là một số nguyên tố thì f(p) là 1 số nguyên tố hoặc là bình phương 1 số nguyên tố.
Với m=n=1 ta có:f(f(1))=f(1), vì f là đơn ánh nên f(1)=1→$f(f(n))=n^2$ với mọi n thuộc N*
Sau đó ta cm f là hàm nhân tính:
Xét $f(f(m).f(n))=n^2f(f(m))=n^2m^2=f(f(mn))$

Vì f là đơn ánh nên f(mn)=f(m)f(n)
Rồi ta xét giá trị của hàm số tại các điểm nguyên tố.
Gọi p là một số nguyên tố.Nếu f(p) là hợp số thì f(p)=a.b với $a \geq b > 1$
Mà p^2=f(f(p))=f(ab)=f(a).f(b).Do đó chỉ có thể có các trường hợp sao:
+f(a)=p^2 => f(b)=1 =>b=1(vô lý)
+f(b)=p^2 => f(a)=1 =>a=1(vô lý)
+f(a)=f(b)=p.Mà f là đơn ánh nên a=b =>f(p)=a^2.
Ta cần cm a là số nguyên tố
Giả sử a=mn thì p=f(a)=f(mn)=f(m).f(n)
Mà p là số nguyên tố nên:
Hoặc là f(m)=1 => m=1 hay là f(n)=1 => n=1.Vậy a là số nguyên tố
Vậy thì nếu p là số nguyên tố thi f(p) là số nguyên tố hoặc là bình phương 1 số nguyên tố.
Mà 2003 là số nguyên tố =>đpcm
VD4:Tìm một hàm f:N*→N* t/m: f(mf(n))=n^3f(m) với mọi m,n thuộc N*(f là một đơn ánh)
Giải:Từ VD3 và 2 ta có thể dự đoán rằng nếu p là một số nguyên tố thì f(p)là số nguyên tố hay là lập phương của một số nguyên tố.Nếu cm được điều này thì ta dễ dàng giải quyết được bài toán.
Cho m=1 và đặt f(1)=a,ta có: f(f(n))=n^3f(1)=an^3
Cho n=1 có f(am)=f(m)=> am=m=> a=1
Từ đó ta có f(1)=1 nên f(f(n))=n^3 với mọi n thuộc N*
Sau đó ta cm f là hàm nhân tính
Xét: f(f(m).f(n))=n^3f(f(m))=m^3n^3 =f(f(mn))
Mà f là đơn ánh nên f(mn)=f(m).f(n)
Sau đó ta xét giá trị của hàm f tại các điểm nguyên tố.
Gọi p là 1 số nguyên tố và giả sử f(p)=ab với $a \geq b \geq 1$.
Khi đó p^3=f(f(p))=f(ab)=f(a).f(b).Do đó có các khả năng:
+f(a)=p^3 và f(b)=1 =>b=1, khi đó a là số nguyên tố và f(p)=a =>f(p) là số nguyên tố
+f(b)= p^3 và f(a)=1 =>a=1, khi đó b là số nguyên tố và f(p)=b =>f(p) là số nguyên tố
+f(a)=p, f(b)=p^2 .Từ đó f(p)=f(f(a))=a^3 và $(f(p))^2$=f(p^2)=f(f(b))=b^3
=>ab=a^3và a^2b^2=b^3 =>b=a^2 =>f(p)=a^3
Ta cần cm a là số nguyên tố = phản chứng như ở VD2
Giả sử a=mn ($m \geq n > 1$) thì ta có:
p=f(a)=f(mn)=f(m).f(n) mà p là nguyên tố nên:
+f(n)=1=> n=1(vô lý)
+f(m)=1=>m=1(vô lý)
Ta đã cm được nếu p là một số nguyên tố thì f(p)là số nguyên tố hay là lập phương của một số nguyên tố.Từ đó ta có hàm f:
Ta chia tập hợp các số nguyên tố thành các cặp (p;q) và đặt f(q)=p,f(p)=q^3.Hiển nhiên lúc đó hàm t/m đề bài
VD5:Tìm tất cả các hàm f:N*→N* t/m:
+f(2)=2
+f(mn)=f(m).f(n) với mọi m,n thuộc N*
+f(m)<f(n) với m<n
Từ đề bài ta thấy hàm f đã được sắp thứ tự,hơn nữa đã có giá trị f(2) và f(1) dễ dàng tính được.Nhờ tính chất nhân ta có thể tính được 1 vài giá trị đầu của f và nhận thấy f(n)=n.Từ đó ta thấy có thể dung p/p quy nạp.

Giải:
Ta sẽ cm $f(n)=n$ bằng quy nạp:
$f(1)=f(1).f(1)\Rightarrow$ 2 khả năng:
$+f(1)=0\Rightarrow f(2)=f(2).f(1)=2.0=0$(loại)
$\Rightarrow f(1)=1$
$f(4)=f(2).f(2)=2.2=4$
$f(2)=2<f(3)<f(4)=4\Rightarrow f(3)=3$
Giả sử $f(k)=k$ với mọi $k\le n$.Ta sẽ cm $f(n+1)=n+1$.
Nếu n chẵn $\Rightarrow n=2m\Rightarrow n+2$ chẵn$\Rightarrow f(n+2)=f(2).f(m+1)=2(m+1)=n+2$
$f(n)=n<f(n+1)<f(n+2)=n+2\Rightarrow f(n+1)=n+1$
Nếu n lẻ$\Rightarrow n+1$ chẵn$\Rightarrow n+1=2p$ với $1\le p<n\Rightarrow f(n+1)=f(2).f(p)=2p=n+1$
$\Rightarrow$dpcm$\Rightarrow$hàm f cần tìm :$f(n)=n$
VD6: Tìm tất cả các hàm $f:N^*\to N^*$ t/m:
$+f(2)=2$
$+f(mn)=f(m).f(n)$ với mọi m,n thuộc $N^*,(m,n)=1$
$+f(m)<f(n)$ với $m<n$

Khác với VD5 đk 2 cần có $(m,n)=1$,do đó ta sẽ ko có được $f(4)=4$ 1 cách dễ dang như ở VD5.Điểm mấu chốt là cm $f(3)=3$,ta có:
$f(3)f(5)=f(15)<f(18)=f(2)f(9)<f(2).f(10)=f(4).f(5)=f(2).f(2).f(5)=4f(5)\Rightarrow f(3)<4\Rightarrow f(3)=3$
Từ đó ta cũng cm = quy nạp như VD4 nhưng xét với các trường hợp n+1 là nguyên tố hay hợp số
VD7: CMR ko có hàm $f:N^*\to N^*$ t/m:
$+f(2)=3$
$+f(mn)=f(m).f(n)$ với mọi m,n thuộc $N^*,(m,n)=1$
$+f(m)<f(n)$ với $m<n$
Giải:Ta sẽ cm = phản chứng:
Đặt $f(3)=a$
Ta có $2^3<3^2 \Rightarrow 27=f(2)^3=f(8)<f(9)=f(3)^2=a^2\Rightarrow a>5$
Mà $27<32\Rightarrow a^3<f(2)^5=243<343\Rightarrow a<7$
$\Rightarrow a=6$

Mà $3^8<2^{13} \Rightarrow f(3^8)<f(2^{13})\Rightarrow a^8<3^{13}\Rightarrow 6^8<3^{13}$(vô lý)
VD8:Cho hàm $f:N^*\to N^*$ t/m:
$+f(m+n+mn)=f(m)+f(n)+f(m)f(n)$ (1)
$+f(f(n))=n$ với mọi thuộc N^* (2)
Tìm Min $f(2003)$

Giải:
Trước hết ta tìm cách biến đổi đk (1) để biến đổi thành hàm nhân tính.
Từ (1),ta có:
$f(m+n+mn)+1=(f(m)+1)(f(n)+1)$ (*)
Từ đó ta nghĩ đến việc đặt $g(n+1)=f(n)+1$
$\Rightarrow$(*) $\Leftrightarrow g(m+n+mn+1)=g(m+1)g(n+1)$
Từ (2),ta có $g(g(n+1))=g(f(n)+1)=f(f(n))+1=n+1$ với mọi n
Mà $m+1\ge 1;n+1\ge 1$ nên ta có hàm $g:N^*\to N^*$ t/m:
$g(mn)=g(m).g(n);g(g(n))=n$ với mọi m;n thuộc N^*
Ta có:

$f(2003)=g(2004)-1$
Từ VD1 thì p nguyên tố=>g(p) là số nguyên tố.
Mà $2004=2^2.3.167$
$\Rightarrow g(2004)=g(2)^2g(3)g(167)$
$f(2003)\min \Leftrightarrow g(2004)\min$
=>Ta có thể xét g(p) với p nguyên tố như sau:
$g(p)=p$ với $p\neq 167;p\neq 5$ và $g(167)=5;g(5)=167$
Khi đó ; $g(2004)=4.3.5=60$
=>min $f(2003)=59$.
Tương tự VD8 ta có VD sau đây:
VD9: Cho hàm $f:N^*\rightarrow N^*$ t/m:
$f(mn)=f(m)f(n)-f(m)-f(n)+2$ với mọi m;n thuộc N^* (1)
$f(2004)=2004$ (2)
Tìm Max f(3)
Giải:
Trước hết ta xét m=n=1.Từ (1),ta có:
$f(1)=f(1)^2-2f(1)+2$
$\Rightarrow f(1)^2-3f(1)+2=0 \Rightarrow f(1)=1$ hoặc $=2$
Nếu $f(1)=1$=>Từ (1)=>$f(n)=f(n)-1-f(n)+2 \Rightarrow f(n)=n$ với mọi n trái với điều kiện (2)
Nếu $f(1)=2$
Tương tự như trên ta xét hàm $g(n)=f(n)-1 \Rightarrow f(n)=g(n)+1$ và $g(2004)=2003$
Từ (1),ta có: $g(mn)+1=(g(m)+1)(g(n)+1)-g(m)-1-g(n)-1+2$
$\Rightarrow g(mn)=g(m).g(n)$
=>g là hàm nhân tính.Ta có:
$$2003=g(2004)=g(2)^2g(3)g(167)$$
Mà $g(2)=f(1)-1=2-2=1$,do 2003 là số nguyên tố nên $g(3)=1$ hoặc $g(3)=2003$.
$\Rightarrow g(2003)\leq 2003$
Bây giờ ta chỉ cần chỉ ra 1 hàm g t/m $g(mn)=g(m).g(n)$ và $g(3)=g(2004)=2003$ là tìm được max f(3)(tức là chỉ đ/k dấu =)
Xét hàm g(n) như sau:$g(1)=1;g(3)=2003;g(p)=1$ nếu p là số nguyên tố khác 3
Với n thuộc N^* và $n=p_1^{k1}p_2^{k2}\ldots p_m^{km}$ thì:$g(n)=g(p_1)^{k1}g(p_2)^{k2}\ldots g(p_m)^{km}$
Thì ham g t/m các đk trên
Vậy Max $f(3)=2004$

Bài tập áp dụng

1.Tìm $f:N^*\rightarrow N^*$ t/m:
$+f(xf(y))= yf(x)$ với mọi x;y
$+f(p)=p$ với p là số nguyên tố
(đáp số:$f(x)=x$ với x thuộc N^*)
2.Cho hàm $f:N^*\rightarrow N^*$ t/m:$f(m^2f(n))=nf(m)^2$
Tìm Min f(1998).
(đáp số:120
$f(1)=1$ và nếu p nguyên tố thì f(p) nguyên tố
$f(q)=p \Leftrightarrow f(p)=q$ (p;q nguyên tố)
3.Cho hàm $f:N^*\rightarrow N^*$ t/m: $f(mf(n))=n^5f(m)$.CMR:nếu p là số nguyên tố thì f(p) nguyên tố hoặc là luỹ thừa bậc 5 của 1 số nguyên tố(giải tương tự VD3)

4.Cho f:N*→N* t/m:f(m^2f(n))=mnf(m) với mọi m;n thuộc N*.CMR nếu f(2003)=a^2 thì a là số nguyên tố.
(Hướng dẫn:CM f là đơn ánh và f(1)=1;f(f(n))=n với mọi n(tương tự VD1)
Thay n bởi f(n), ta có:f(m^2f(f(n)))=mf(n)f(m) =>f(m^2n)=mf(m)f(n)
=>f(m^2)=mf(m) và f(m^2n^2)=f(m^2)f(n^2)
Giả sử f(2003)=a^2 với a là hợp số =>a=mn với m≥n>1
Khi đó f(f(2003))=f(a^2)=f(m^2n^2) =>2003=f(m^2)f(n^2)
Mà 2003 là hợp số nên điều này ko thể xảy ra
Vậy a là số nguyên tố.)
5.
Cho hàm f:N*→N* t/m:
+f(xy)=f(x)f(y)
+f(x)≤x
+f(f(1995))=95.
Tìm Minf(133).
(Hướng dẫn:
Ta có:95=f(f(1995))=f(f(3)f(5)f(7)f(19))=f(f(3)).f(f(5)).f(f(7)).f(f(19))
f(f(k))≤f(k)(vì f(k)≤k) mà f(k)≤k và f(f(k))|95 nên ta có f(133)≥19

=> min f(133)=19)

3. Cấp số cộng, cấp số nhân trong phương trình hàm

A) Lí thuyết

Ở phần lí thuyết tôi đã giới thiệu về hai dãy số đặc biệt là cấp số cộng và cấp số nhân bây giờ tôi xin giới thiệu thêm một dãy đặc biệt nữa được ứng dụng nhiều trong phương trình hàm và nhất là trong phần này là dãy số aphin.

Định Nghĩa: Dãy số aphin là dãy số có dạng $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta$ với α, β là các hằng số cho trước. Trong phần này ta chỉ xét với α, β là các số nguyên.

Nếu α = 1 thì có $a_{n+1} = a_n + \beta$ là cấp số cộng.

Nếu α ≠ 1. Đặt $b_n = a_n + \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$ Từ đó ta CM được $b_n = \alpha b_{n-1} \Rightarrow$ CT tính của a_n.

B) Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

f(f(n) + m) = n + f(m + b) với mọi m, n ∈ N*; b là hằng số nguyên dương

Giải

Cách 1. Ta dễ dàng CM được f là đơn ánh.

Có $f(f(n) + f(1)) = n + f(f(1) + b) = n + 1 + f(b + b) = f(f(n+1) + b)$

$\Rightarrow f(n) + f(1) = f(n+1) + b \Rightarrow f(n+1) = f(n) + f(1) - b$.

Đặt $a = f(1) - b \Rightarrow f(n+1) = f(n) + a \Rightarrow f(n) = f(1) + (n-1)a$.

Thay $f(n) = f(1) + (n-1)a$ và giả thiết có

$f(f(1) + (n-1)a + m) = n + f(1) + (m + b - 1)a$.

$\Rightarrow f(1) + (f(1) + na - a + m - 1)a = n + f(1) + ma + ab - a$.

$\Rightarrow n(a^2 - 1) + f(1)a - a^2 - ab = 0$ Đồng nhất hệ số ta có

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ f(1)a - a^2 - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$$

Nếu a = 1 thì $\begin{cases} f(n) = f(1) + n - 1 \\ f(1) = b + 1 \end{cases} \Rightarrow f(n) = n + b$

Nếu a = -1 thì $\begin{cases} f(n) = f(1) - n + 1 \\ f(1) = b - 1 \end{cases} \Rightarrow f(n) = -n + b$ mâu thuẫn nếu n > b thì f(n) < 0.

Vậy f(n) = n + b.

Cách 2. Với ý tưởng như cách 1 ta cũng đi chứng minh f là một cấp số cộng.

Dễ dàng chứng minh được f là đơn ánh.

Có $f(f(m) + f(n)) = n + f(f(m) + b) = n + m + f(2b)$.

⇒ Nếu có p + q = m + n thì $f(n) + f(m) = f(p) + f(q)$.

$\Rightarrow f(n) - f(p) = f(q) - f(m)$.

$\Rightarrow f(n) - f(n-1) = f(n-1) - f(n-2) = ... = f(3) - f(2) = f(2) - f(1) = d$.

Vậy $f(n) = f(n-1) + d \Rightarrow f(n) = f(1) + (n-1)d$ phần còn lại mời bạn đọc giải tiếp .

Nhận xét: Tuy có nhiều cách là nhưng ở bài toán trên ta đề quy về chứng minh f là một cấp số cộng với sự hỗ trợ đắc lực của ánh xạ. Tuy nhiên với 2 cách là trên theo tôi thì cách 1 hay hơn nhưng bạn hãy xem xét hai bài toán sau cách 1 không còn hiệu quả mà còn rất phức tạp nếu ta là theo cách 2 thì lại rất đơn giản không phải tính toán cồng kềnh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng không tồn tại hàm f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

$$f(mf(n)) = n + f(2004m)$$

Giải

Dễ dàng chứng minh được f là đơn ánh.

Có $f(f(m)f(n)) = n + f(2004f(m)) = n + m + f(2004^2)$..

Vậy nếu n + m = p + q thì có f(n)f(m) = f(p)f(q).

$\Rightarrow \dfrac{f(n)}{f(p)} = \dfrac{f(q)}{f(m)} \Rightarrow \dfrac{f(n)}{f(n-1)} = \dfrac{f(n-1)}{f(n-2)} = ... = \dfrac{f(3)}{f(2)} = \dfrac{f(2)}{f(1)} = k$

$\Rightarrow f(n) = kf(n-1) \Rightarrow f(n) = k^{n-1}f(1) \Rightarrow$ là số nguyên dương. Thay $f(n) = k^{n-1}f(1)$ vào giả thiết có

$$f(mk^{n-1}f(1)) = n + k^{2004m-1} \Rightarrow k^{mk^{n-1}f(1)-1}f(1) = n + k^{2004m-1}$$

Thay n = 1 có $k^{mf(1)-1}f(1) = 1 + k^{2004m-1} \Rightarrow k = 1$ Thay f(n) = f(1) dẫn tới mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm f thỏa mãn.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số f : $Z \to Z$ sao cho

f(m + f(n)) = f(m) - n với mọi m, n $\in$ Z.

10th Nordic Mathemtical Contest

Giải

Dễ dàng chứng minh được f là đơn ánh.

Thay n = 0 ta có $f(m + f(0) = f(m) \Rightarrow m + f(0) = m \Rightarrow f(0) = 0$

Thay m = 0 có $f(f(n)) = -n$

Có $f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) - n = -m - n$

Vậy với m + n = p + q ta có

$$f(m) + f(n) = f(p) + f(q)$$

$\Rightarrow f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1) = ... = f(3) - f(2) = f(2) - f(1) = f(1) - f(0) = f(1) = d$

Ta có $f(n) = nd$ thay vào giả thiết có

$f(m + nd) = md - n \Rightarrow md + nd^2 = md - n \Rightarrow nd^2 = -n$ mâu thuẫn.

Nhận xét: ba bài toán trên ta đã sử dụng tính chất đơn ánh sau đó suy ra f là một cấp số cộng hoặc cấp số nhân từ đó tìm ra công thức tìm hàm f. Ta xét tiếp ví dụ sau sử dụng tới dãy số aphin tuy nhiên khi sử dụng dãy aphin thì bạn hãy dựa vào cách CM đã nêu trên để tìm ra hàm không nên sử dụng trực tiếp.

Ví dụ 4. Cho hàm f(x,y) : $N^2 \to N$ thỏa mãn

i) $f(0, y) = y + 1$.

ii) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$.

iii) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y)$.

Tìm f(4,x) ?

Giải

Có $f(1,x) = f(0+1, x-1+1) = f(0, f(1, x-1)) = f(1, x-1)+1$.

$\Rightarrow f(1,x) = f(1, x-1)+1 \Rightarrow f(1,x) = f(1,0)+x$.

Mà $f(1,0) = f(0+1,0) = f(0,1) = 2 \Rightarrow f(1,x) = x+2$.

Làm tương tự

$f(2,x) = f(1, f(2, x-1) = f(2, x-1)+2 \Rightarrow f(2,x) = f(2,0)+2x$

Mà $f(2,0) = f(1+1,0) = f(1,1) = 3 \Rightarrow f(2,x) = 2x+3$

$f(3,x) = f(2, f(3, x-1)) = 2f(3, x-1)+3$

Đặt g(x) = f(3,x) + 3 có $g(x) = 2g(x-1) \Rightarrow g(x) = 2^x g(0)$.

Có g(0) = f(3,0) + 3 = f(2,1) + 3 = 8 $\Rightarrow g(x) = 2^{x+3} \Rightarrow f(3,x) = 2^{x+3}-3$.

$f(4,x) = f(3, f(4, x-1)) = 2^{f(4,x-1)+3}-3$. Đến đây thì không có cấp số nào giúp ta được ta đi xét một vài giá trị đầu của f(4,x).

Có $f(4,0) = f(3,1) = 2^4-3 = 2^{2^2}-3 \Rightarrow f(4,1) = 2^{2^{2^2}}-3$. Dự đoán

$$f(4,x) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3$$ với số mũ chứa n + 3 chữ số 2.

Còn phần quy nạp dành cho bạn đọc.

Nhận xét: Bài toán trên đã sử dụng tới cả 3 dãy số đặc biệt để tìm ra được f(4,x) bạn hãy tìm thử f(5,x) = ?.

Phần này trong phương trình hàm thường là phần hỗ trợ cho việc tìm hàm số nên phần này không có bài tập riêng.

4. Hệ đếm cơ số trong phương trình hàm

A) Lí thuyết

Phần này là phần khó nhất trong phương trình hàm, tuy nhiên phần này thì chỉ cần dùng đến Phương pháp quy nạp công phá là xong nhưng việc dự đoán hàm gặp vô cùng khó khăn đây cũng chính là mấu chốt của các bài toán dạng này.

B) Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm hàm f : $N \to N$ là hàm số thỏa mãn

i) f(1) = 1; f(3) = 3.

ii) f(2n) = 2f(n)

iii) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$.

iv) $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$.

Giải

Với số k tùy ý thuộc N bất kì chỉ có thể có một trong bốn dạng: k = 4n = 2.2n; k = 4n + 1; k = 4n + 2 = 2(2n+1); k = 4n +3 nên từ công thức đầu bài có thể thấy rằng hàm số đã cho được xác định một cách duy nhất.

Ta sẽ sử dụng cơ số 2 để tìm biểu diễn của f.

Ta có $f(1_2) = f(1) = 1 = 1_2$.

$f(10_2) = f(2) = f(1) = 1 = 01_2$

$f(11_2) = f(3) = 3 = 11_2$

$f(100_2) = f(4) = f(2.2) = f(2) = 1 = 001_2$

$f(101_2) = f(5) = f(4.1+1) = 2f(3) - f(1) = 2.3 - 1 = 5$

$f(110_2) = f(6) = f(2.3) = f(3) = 3 = 011_2$

$f(111_2) = f(7) = f(4.1+3) = 3f(3) - 2f(1) = 3.3 - 2 = 7 = 111_2$

$f(1000_2) = f(8) = f(4) = f(2) = 1 = 0001_2$

$f(1001_2) = f(9) = f(4.2+1) = 2f(5) - f(2) = 2.5 - 1 = 1001_2$

$f(1010_2) = f(10) = f(5) = 0101_2$

Qui luật: Biểu diễn của f(n) trong cơ số 2 chính là biểu diễn của n bằng viết ngược lại, tức là $f(a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_2 a_1|_2) = a_1 a_2 .... a_k|_2$.

Chứng minh: Giả sử tính chất đúng cho mọi số có số các chữ số trong hệ cơ số 2 <k. Ta chứng minh nó đúng với số có k chữ số trong hệ đếm cơ số 2.

Lấy một số n có số các chữ số trong hệ cơ số 2 là k.

TH1. n là số chẵn. Đặt n = 2m = $1a_1 .... a_{k-2}0|_2 \Rightarrow m = 1a_1a_2...a_{k-2}|_2$.

Có $f(n) = f(2m) = f(m) = a_{k-2}a_{k-3}...a_2a_1 1|_2 = 0a_{k-2}a_{k-3}...a_2a_1 1|_2$.

TH2. n là số lẻ.

Nếu n = 4m + 1 = $1a_1a_2...a_{k-3}10|_2 \Rightarrow m = 1a_1a_2...a_{k-3}|_2 \Rightarrow 2m+1 = 1a_1a_2...a_{k-3}1|_2$.

Có $f(n) = f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m) = f(2m+1) + (f(2m+1) - f(m))$

$f(n) = 1a_{k-3}...a_2a_1 1|_2 + (1a_{k-3}...a_2a_1 1|_2 - a_{k-3}...a_2a_1 1|_2) = 01a_{k-3}...a_2a_1|_2$.

Nếu n = 4m +3 = $1a_1a_2...a_{k-3}11|_2 \Rightarrow m = 1a_1a_2...a_{k-3}|_2 \Rightarrow 2m+1 = 1a_1a_2...a_{k-3}1|_2$.

Có $f(n) = f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m) = f(2m+1) + 2(f(2m+1) - f(m))$

$\Rightarrow f(n) = 1a_{k-3}...a_2a_1 1\big|_2 + 2(1a_{k-3}...a_2a_1 1\big|_2 - 1a_{k-3}...a_2a_1\big|_2) = 11a_{k-3}...a_2a_1 1\big|_2$.

Vậy nếu $n = a_1a_2a_3....a_k\big|_2 \Rightarrow f(n) = a_ka_{k-1}...a_2a_1\big|_2$.

Nhận xét: bài toán trên sẽ rất khó nếu chúng không nhận ra được Quy luật của nó nhưng khi nhận ra quy luật rồi thì bài toán trở nên đơn giản. Bây giờ ta trở lạ bài toán của Josephus đã nêu ở đầu.

Ví dụ 2. Vespasien là Hoàng đế La Mã thế kỉ thứ nhất từ năm 69 đến năm 79 theo dương lịch. Thờiấy có Josephus là nhà viết sử bị Vespasien truy nã vì can tội chống lại triều đình. Tục truyền rằng Vespasein tìm được ham ẩn náu của 100 người chống đối và kê gọi họ ra hàng, nếu không sẽ tàn sát tất cả. Đa số muốn tự sát, quyết không đầu hàng, chỉ có một người nói nhỏ với Josephus là vì hoàn cảng riêng muốn đầu hàng để sống. Josephus rất thông cảm với người này và đặt ra quy tắc sau, được tất cả mọi người nhất chí thi hành : 100 người đứng thành vòng tròn đánh số từ 1 đến 100 theo chiều kim đồng hồ. Người thứ nhất cầm dao đếm 1 rồi đưa cho người thứ 2, người thứ 2 đếm 2 rồi tự sát. Người thứ 3 cầm dao và lại đếm 1, rồi đưa dao cho người thứ 4, người thứ 4 đếm 2 rồi tự sát … Cứ như thế mà tiếp tục vòng này qua vòng khác. Cuối cùng còn một người sống. Hỏi Josephus phải sắp xếp người muốn sống ở vị trí nào ?

Bài toán Josephus

Giả sử Josephus có n – 1 bạn ; n người này đúng thành vòng tròn đánh số từ 1 đến n theo chiêu kim đồng hồ và tự sát theo quy tắc như trên. Gọi f(n) là vị trí của người sống sót duy nhất. Tìm f(n).

Giải

Nếu n = 2k. Sau vòng thứ nhất còn lại các số 1, 3, 5, 7, ..., 2k - 1 sống sót và người này được đánh số mới là 1, 2, ... k làm liên tiếp có $f(2k) = 2f(k) - 1$.

Nếu n = 2k + 1. Sau vòng đầu tiên thì người mang số 3, 5, ... 2k + 1 và k người này thì mang số từ 1 tới k làm liên tiếp có $f(2k+1) = 2f(k) + 1$.

Ta thấy nếu có một người thì tội gì mà tự sát ⇒ f(1) = 1. Còn có 2 người thì đợi người kia chết thì chuồn luôn ⇒ f(2) = 1.

Bài toán này nếu bạn tính một số giá trị đầu thì sẽ tìm ra được quy luật sau

$n = 1a_{k-1}a_{k-2}...a_1\big|_2 \Rightarrow f(n) = a_{k-1}a_{k-2}...a_1 1\big|_2$ Việc còn lại chỉ là quy nạp tôi dành cho bạn đọc. Tôi giải bài toán này theo cách khác .

Đặt $g(n) = f(n) - 2n - 1$ có

$g(2k) = f(2k) - 4k - 2 = 2(f(k) - 2k - 1) = 2g(k)$.

$g(2k+1) = f(2k+1) - 4k - 2 - 1 = 2f(k) - 4k - 2 = 2g(k)$.

$\Rightarrow g(2k) = g(2k+1) = 2g(k)$. Ta thấy nếu $n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + ... + 2^{i_k}$.

Nếu $i_1 > 0$ thì có $g(n) = 2^{i_1} g(m)$ với $m = 1 + 2^{i_2 - i_1} + 2^{i_3 - i_2} + ... + 2^{i_k - i_{k-1}}$.

Nếu $i_1 = 0$ thì có $g(n) = g(m)$ với $m = 2^{i_2 - 1} + 2^{i_3 - 1} + ... + 2^{i_k - 1}$.

Làm liên tiếp có $g(n) = -2^{i_k + 1}$. Từ đó ta cũng có được hàm f như trên.

Nhận xét: Cách trên dựa vào một ý tương sử dụng một chút cấp số nhân mặc dù hàm g không giống cấp số nhân lắm. Ta cũng có thể CM hàm g bằng quy nạp. Nếu học về log thì ta có công thức tìm hàm f như sau $f(n) = 1 + 2(n - 2^{[\log_2 n]})$.
Người sống sót sau vụ thảm sát đó là người thứ 73 ông này thật may mắn.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn các điều kiện

i) f(1) = 1.
ii) f(2n) = f(n).
iii) f(2n +1) = f(2n) + 1.

Giải
Bảng tính vài giá trị đầu của hàm f

n	1	2	3	4	5	6	7	....
f(n)	1	1	2	1	2	2	3	....

Ta thấy f(n) là tổng của các chữ số của n trong hệ đếm nhị phân. Việc còn lại chỉ là quy nạp chú ý ta xét tính chẵn lẻ của n.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

i) f(1) = 1.
ii) f(2n +1)=f(2n) + 1.
iii) f(2n) = 3f(n).

Giải
Ta cũng tính vài giá trị của hàm f ta thấy nếu $n = a_1a_2...a_k\big|_2 \Rightarrow f(n) = a_1a_2...a_k\big|_3$
Giả sử đpcm đúng với mọi k < 2n.
Đặt $2n+1 = a_ka_{k-1}...a_2a_11\big|_2 \Rightarrow 2n = a_ka_{k-1}...a_2a_10\big|_2 ; n = a_ka_{k-1}...a_2a_1\big|_2$.

$$f(2n) = 3f(n) = 3.\sum_{i=1}^{k} 3^i a_i = \sum_{i=1}^{k} 3^{i+1} a_i = a_ka_{k-1}...a_2a_10\big|_3$$

$$f(2n+1) = f(2n) + 1 = a_ka_{k-1}...a_2a_11\big|_3$$

Từ giả thiết ta thấy f tồn tại là duy nhất.
Nhận xét: Các bài toán trên quá đơn giản nếu ta đã xác định được chính xác hàm f còn không thì ??????

C) Bài tập
Bài 1. Hàm số f : $N \to N$ được xác định như sau

i) f(0) = 0; f(1) = 1.
ii) Với n ≥ 2 thì f(n) là số nhỏ nhất trong các số tự nhiên không tạo thành với bất kì hai số f(i) , f(j) (i < j < n) nào một cấp số cộng.

CMR f(n) có thể xác định như sau: Giả sử trong hệ cơ số 2, thì $n = a_ka_{k-1}...a_1a_0\big|_2$

$$f(n) = a_ka_{k-1}...a_2a_1a_0\big|_3.$$

Bài 2. Cho hàm số f : $N^* \to N^*$ thỏa mãn

i) f(4n) = f(2n) + f(n)
ii) f(4n + 2) = f(4n) + 1

iii) $f(2n + 1) = f(2n) + 1$.

CMR với mỗi số nguyên dương m, số các số nguyên dương n sao cho $0 \le n < 2^m$ và $f(4n) = f(3n) = f(2^{m+1})$.

IMO shortlist_2000

Bài 3. Hàm số f : $N^* \to N$ thỏa mãn

i) $f(1) = 2$; $f(2) = 1$.

ii) $f(3n) = 3f(n)$

iii) $f(3n + 1) = f(3n) + 2$

iv) $f(3n + 2) = f(3n) + 1$

Tìm các số $n \le 2006$ thỏa mãn $f(n) = 2n$.

ĐNH