Phương trình hàm trong lớp hàm liên tục một biến tự do

Kiều Đình Minh
Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ

Tương ứng với các bộ môn toán thì phương trình hàm (PTH) được chia thành các loại sau

** PTH đại số (VMO 2013, 2005, 2002, 2000, 1992, 1991; TST 2004, 1994; IMO 2010, 2011, 2002, 1999, 1992, ...)*

** PTH số học (VMO 1999, 1997, 1996, 1993; TST 2005; IMO 1988, 2000, 1998, 1990, 1987, ...)*

** PTH giải tích (VMO 2012, 2006, 2003, 2001, 1999, 2007; TST 2007, 1990; IMO 1994, 1983 ...)*

** PTH lượng giác (Ít gặp).*

1 Một số kiến thức chuẩn bị

1. Hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall (x_n): x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$

2. Nếu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ đơn ánh và liên tục thì f là đơn điệu.

3. Nếu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ đơn điệu tăng và liên tục thì f là song ánh liên tục.

4. Nếu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ toàn ánh và tăng thì f liên tục.

5. Nếu f liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)\neq f(b)$ thì với mọi m nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=m$.

6. Nếu f liên tục trên $[a;b]$ (tập compact) thì f đạt GTLN và GTNN trên $[a;b]$

7. Nếu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và đơn điệu thì $f(f(x))$ là đơn điệu tăng.

2 Phân loại các dạng toán thường gặp

Loại I. Phương trình dạng $af(\alpha x)+bf(\beta x)=cx$

Ví dụ 1. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$9f(8x)-9f(4x)+2f(2x)=100x \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}\,(1) \qquad (1)$$

Giải Ta sẽ đưa phương trình đã cho về dạng thuần nhất bằng cách viết lại phương trình dưới dạng

$$((1)) \Leftrightarrow 9\left[f(8x) - \lambda 8x\right] - 9\left[f(4x) - \lambda 4x\right] + 2\left[f(2x) - \lambda 2x\right] = 0,$$

suy ra $\lambda = \frac{5}{2}$. Đặt $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}x$, phương trình đã cho trở thành

$$9g(8x) - 9g(4x) + 2g(2x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R},\ g(0) = 0$$

thay x bởi $\frac{x}{8}$ ta có

$$9g(x) - 9g\left(\frac{x}{2}\right) + 2g\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 9\left[g(x) - mg\left(\frac{x}{2}\right)\right] - n\left[g\left(\frac{x}{2}\right) - mg\left(\frac{x}{4}\right)\right] = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}; n = 6$$

Đặt $h(x) = g(x) - \frac{1}{3}g\left(\frac{x}{2}\right)$ thì $h(0) = 0$ và

$$9h(x) = 6h\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow h(x) = \frac{2}{3}h\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 h\left(\frac{x}{2^2}\right) = \cdots = \left(\frac{2}{3}\right)^n h\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên g và h cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Chuyển qua giới hạn trên khi $n \to +\infty$ ta được $h(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra

$$g(x) = \frac{1}{3}g\left(\frac{x}{2}\right) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Tương tự như trên thì $g(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = \frac{5}{2}x\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm này thoả mãn phương trình ban đầu. Kết luận $f(x) = \frac{5}{2}x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập tương tự:

Bài 1. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

1. $f(x) + f\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{3x}{5}$
2. $f(3x) = \frac{1}{3}f(x) + x$
3. $f(30x) + f(4x) = 2012x$
4. $f(4x) + f(9x) = 2f(6x)$
5. $35f(27x) - 26f(9x) + 3f(3x) - 1440x = 0$

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ sao cho

$$2012f(2012x) - 2011f(2011x) = (2012)^2 x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm tại $x = 0$ và thoả mãn

$$f(2x) = 2f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2. (Bài kiểm tra đội tuyển) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

(a) f liên tục tại điểm 0 ;

(b) $f(0) = 0$;

(c) $\sum\limits_{k=0}^{25} (-1)^{25-k} C_{25}^k f(2^k x) = 2009x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn bài toán. Với mỗi $n = 1, 2, \ldots, 25$, xét hàm số

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(2^k x)$$

Ta có

$$h_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k f(2^k x) = f(2^{n+1}x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k f(2^k x) + (-1)^{n+1} f(x)$$

$$= f(2^{n+1}x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) f(2^k x) + (-1)^{n+1} f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(2^{k+1}x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(2^k x) = h_n(2x) - h_n(x)$$

Do đó ta có $h_{n+1}(x) = h_n(2x) - h_n(x)$, $\forall n = 1, 2, \ldots, 24$. Theo các giả thiết $(a), (b)$ suy ra các hàm $h_n(x)$ liên tục tại $x = 0$ và $h_n(x) = 0$ với mỗi $n = 1, 2, \ldots, 24, 25$. Theo (c) thì ta có $h_{25}(x) = 2009x$, vì vậy

$$h_{24}(2x) - h_{24}(x) = 2009x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Do vậy với mỗi $x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta luôn có

$$h_{24}(x) = \left[h_{24}(x) - h_{24}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \left[h_{24}\left(\frac{x}{2}\right) - h_{24}\left(\frac{x}{2^2}\right)\right] + \ldots$$

$$+ \left[h_{24}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - h_{24}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right] + h_{24}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$= 2009\frac{x}{2} + 2009\frac{x}{2^2} + \cdots + 2009\frac{x}{2^n} + h_{24}\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2009\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + h_{24}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Suy ra

$$h_{24}(x) = \lim_{n \to +\infty} \left[2009x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + h_{24}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right] = 2009x$$

Lập luận tương tự, suy ra

$$h_{24}(x) = h_{22}(x) = \cdots = h_1(x) = 2009x$$

Mà

$$h_1(x) = f(2x) - f(x)$$

nên tương tự ta có $f(x) = 2009x$. Thử lại phương trình đã cho có một hàm thoả mãn bài toán đó là $f(x) = 2009x \ x \in \mathbb{R}$.

3 Phương trình dạng $af(x) + bf(x^\alpha) = c$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

$$f(x) + f\left(x^4\right) = 2012 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải. Cho $x = 0, x = 1$ được $f(0) = f(1) = 1006$. Từ phương trình suy ra

$$f\left(x^4\right) + f\left(x^{16}\right) = 2012 \Rightarrow f(x) = f\left(x^{16}\right) \Rightarrow f(x) = f(-x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

do đó chỉ cần xét với $x \geq 0$.

+) Với $0 < x < 1$, ta có $f(x) = f\left(x^{16}\right) = \cdots = f\left(x^{16^n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x^{16^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x^{16^n}\right) = f(0) = 1006$$

+) Với $x > 1$, ta có $f(x) = f\left(x^{\frac{1}{16}}\right) = \cdots = f\left(x^{\frac{1}{16^n}}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x^{\frac{1}{16^n}}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{16^n}}\right) = f(1) = 1006$$

Tóm lại $f(x) = 1006, \forall x \geq 0$, suy ra $f(x) = 1006, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm này thoả mãn.

Bài tập tương tự.

Bài 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

1. $f\left(x^2\right) + f(x) = x^2 + x$
2. $f\left(x^2\right) - f(x) = x(x-1)$
3. $$\begin{cases} f\left(\sqrt{2}x\right) = 2f(x) \\ f(x+1) = f(x) + 2x + 1 \end{cases}$$

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

$$f\left(x^{24}\right) + f\left(x^{10}\right) = 2007\left(x^{24} + x^{10}\right)$$

4 Phương trình dạng $f(x) = f(\varphi(x))$

$x = \varphi(x)$ có nghiệm.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ liên tục và thoả mãn

$$f(x) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

Giải. Lấy $a > 0$ tuỳ ý. Ta xây dựng dãy (x_n) : $x_0 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+1}$, $n \geq 0$. Khi đó

$$f(x_{n+1}) = f\left(\frac{x_n+1}{x_n+2}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(x_0) = f(a)$$

+) Nếu $a > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\frac{a+1}{a+2} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, suy ra dãy (x_n) bị chặn dưới bởi $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Mặt khác ta có $x_{n+1} - x_n = \frac{-x_n^2 - x_n + 1}{x_n+2} < 0$, do $x_n > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Vậy dãy (x_n) hội tụ.

+) Nếu $0 < a < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\frac{a+1}{a+2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ và $x_{n+1} - x_n > 0$. Vậy dãy (x_n) hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$, thế thì

$$\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (do } \alpha > 0).$$

Tóm lại $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right) = f(\alpha) = c$. Thử lại thoả mãn.

Bài tập tương tự.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn 1. $f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$

2. $f(x) = f\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)$
3. $f(x) = f\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)$
4. $f(x) = f(x^2 + k)$, $\left(0 < k < \frac{1}{4}\right)$
5. $f(x) = f(1 - cosx)$

$x = \varphi(x)$ vô nghiệm.

Ví dụ 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

$$f(x) = f(x^2 + 1)$$

Giải. Tự giải Ta xây dựng f như sau: Lấy f là hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thoả mãn $f(0) = f(1)$ và thác triển f lên $\mathbb{R}$ bằng cách đặt $f(g_k(x)) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$, ở đây thì $g(x) = 1 + x^2$; $g_k(x) = g(g_{k-1}(x))$, $\forall k \geq 1$

5 Phương trình hàm dạng $f(f(x)) = g(x)$

Ví dụ 6. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(f(x)) = -x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

. **Giải.** Ta xét các TH sau

+) Xét $x \leq 0$. Khi đó tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x = -y^2$. Ta có

$$f(x) = f\left(-y^2\right) = f(f(f(y))) = -[f(y)]^2 \leq 0$$

+) Xét $x > 0$. Dễ chỉ ra rằng f là đơn ánh và do f liên tục nên f đơn điệu. Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) > 0$. Khi đó đặt $a > 0$ là giá trị sao cho $f(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng $(a-\varepsilon; a)$. Thế thì $f(f(x))$ đơn điệu tăng trên $(a-\varepsilon; a)$. Điều này không xảy ra vì $g(x) = -x^2$ đơn điệu giảm trên $(a-\varepsilon; a)$. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng không tồn tại $x_0 > 0$ để $f(x_0) > 0$.

Vậy $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(f(x)) = f(x) + 2x$.
Giải. Dễ thấy f đơn ánh. Do giả thiết f liên tục nên f đơn điệu. Cho $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

+) f đơn điệu tăng: Do $f(0) = 0$ nên $f(x) > 0, \forall x > 0;\ f(x) < 0, \forall x < 0$. Do f đơn điệu tăng và liên tục nên suy ra f là song ánh liên tục và có hàm ngược là g . Dễ thấy g thoả mãn $x = g(x) + 2g(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Với $x > 0$ thì $g(x) > 0$ và $x < 0$ thì $g(x) < 0$. Với mỗi $x > 0$ đặt $u_0 = x; u_n = g_n(x), \forall n \geq 0$ (trường hợp $x < 0$ làm tương tự), khi đó ta có $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \geq 0$. Giải phương trình này ta được

$$u_n = \frac{2x + 2g(x)}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{x - 2g(x)}{3}(-1)^n, \forall n \geq 0$$

Nếu $g(x) > \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2g(x) < 0$ thì với n chẵn có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, mâu thuẫn vì

$$u_n = g_n(x) > 0, \forall x > 0$$

Nếu $g(x) < \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2g(x) > 0$ thì với n lẻ có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, mâu thuẫn vì

$$u_n = g_n(x) > 0, \forall x > 0$$

Suy ra với mỗi $x > 0$ thì $g(x) = \dfrac{x}{2} \Rightarrow f(x) = 2x, \forall x > 0$.

+ f đơn điệu giảm: Từ $f(0) = 0$ suy ra $f(x) < 0, \forall x > 0;\ f(x) > 0, \forall x < 0$. Với mỗi x , đặt $u_0 = x; u_n = f_n(x), \forall n \geq 0$. Khi đó $u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0, \forall n \geq 0$. Giải phương trình này ta được

$$u_n = \frac{2x - f(x)}{3}(-1)^n + \frac{x + f(x)}{3}2^n, \forall n \geq 0$$

, suy ra $u_{2n} = \dfrac{2x - f(x)}{3} + \dfrac{x + f(x)}{3}2^{2n}, \forall n \geq 0$

Nếu $x > 0$ thì $f(x) < 0, f(f(x)) > 0$, suy ra $0 < f(f(x)) < 2x \Rightarrow |f(f(x))| < |2x|$.

Nếu $x < 0$ thì $f(x) > 0, f(f(x)) < 0$, suy ra $0 < -f(f(x)) < -2x \Rightarrow |f(f(x))| < |2x|$.

Do đó $|u_2| \leq 2|x|$. Bằng quy nạp ta được $|u_{2n}| \leq 2^n |x|, \forall n \geq 0$. Suy ra

$$|x + f(x)| = \left|\frac{u_{2n}}{2^{2n}} + \frac{2x - f(x)}{3.2^{2n}}\right| \leq \left|\frac{u_{2n}}{2^{2n}}\right| + \left|\frac{2x - f(x)}{3.2^{2n}}\right| \leq \frac{2^n |x|}{2^{2n}} + \left|\frac{2x - f(x)}{3.2^{2n}}\right|$$

Cho $n \to +\infty$ ta được $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Kết luận $f(x) = 2x;\ f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập tương tự

Bài 1. Tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

1. cho $f(f(x)) = -x$
2. $$\begin{cases} f(1995) < f(1996) \\ f(f(x)) = 1995^{-x} \end{cases}$$

Bài 2. Tồn tại hay không hàm số liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$\begin{cases} f(2002) < f(2003) \\ f(f(x)) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Bài 3. Tìm k sao cho tồn tại hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(f(x)) = kx^9$$

6 Hàm số liên tục trên một đoạn

Ví dụ 8. Tìm hàm $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

$$f(xf(x)) = f(x), \forall x \in [0;1]$$

Giải. Giả sử $a \in [0;1]$ và $b = f(a)$. Khi đó $f(x)$ xác định tại a và do đó xác định tại $x = ab, x = ab^2, \ldots, x = ab^n$. Bằng quy nạp ta có $f(ab^n) = f(ab^{n-1}f(a)) = f(ab^{n-1}) = f(a), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó $f(ab^n) = f(a) = b$. Rõ ràng $b \in [0;1]$, vì nếu $b < 0$ thì $ab < 0$, nếu $b > 1$ thì với $n \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn ta có $ab^n > 1$. Do f liên tục nên với $0 < b < 1$ thì $f(a) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(ab^n) = f(0) = b$. Như vậy ta có $b \in \{0; 1; f(0)\}$, tức là hàm f nhận không quá ba giá trị. Vì f liên tục nên $f(x) = .c$ Thử lại thoả mãn. Vậy $f(x) = c, \forall x \in [0;1]$ và $c \in [0;1]$.

Ví dụ 9. Tìm hàm $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right)\right], \forall x \in [0;1]$$

Giải. Do f liên tục trên $[0;1]$ nên nó đạt GTLN

$$M$$

và GTNN m . Giả sử $f(a) = M,\ a \in [0;1]$

Khi đó

$$M = f(a) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a}{2}\right) + f\left(\frac{1+a}{2}\right)\right] \le \frac{1}{2}[M+M] \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{1+a}{2}\right) = M$$

. Từ đó $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = M, \forall n$. Tương tự nếu $f(b) = m$ thì $f\left(\frac{b}{2^n}\right) = m, \forall n$. Vì f là hàm liên tục nên ta có

$$M = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{2^n}\right) = f(0)$$

và

$$m = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{b}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{b}{2^n}\right) = f(0)$$

Suy ra $M = m$ hay f là hàm hằng trên $[0;1]$. Thử lại $f(x) = c$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập tương tự

Bài 1. Cho $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục thoả mãn $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm $x \in [0;1]$

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2000}\right)$$

Bài 2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục thoả mãn $f(0) = 0, f(1) = 1, f^{(n)}(x) = x\ \forall x \in [0;1]$. Chứng minh rằng $f(x) = x\ \ \forall x \in [0;1]$.

Bài tập tổng hợp

Bài 1. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thoả mãn $f(4x) - 2f(2x) + f(x) = 2012x$.

Bài 2. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(\sqrt{3}x) + f((6+4\sqrt{3})x) = 2f((3+\sqrt{3})x)$; $f(0) = 2012$.

Bài 3. Cho $t \in (0;1)$. Xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thoả mãn các điều kiện $f(0) = 0;\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4. Cho $m \neq \pm 1$. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thoả mãn $f(mx) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 5. Cho $\alpha \neq \pm 1$. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ liên tục và thoả mãn $f(x^\alpha) = f(x), \forall x > 0$.

Bài 6. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(x) = f\left(\frac{x^2+1}{2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 7. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(x) = f(x^2 - x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 8. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(x - f(x)) = \frac{x}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 9. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(x^2)f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 10. Tìm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(1) = 5;\ f(x^2) - x^2 f(x) = \frac{4}{x^2} - 4x,\ \forall x > 0$.

Bài 11. Cho hai hàm số liên tục $f, g : [0;1] \to [0;1]$ thoả mãn $f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in [0;1]$. Biết f là hàm tăng. Chứng minh rằng tồn tại $a \in [0;1]$ sao cho $f(a) = g(a) = a$.
Bài 12. Chứng minh rằng không tồn tại hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x+2002)\left[f(x)+\sqrt{2003}\right] = -2004, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 13. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(2010) = 2009$ và $f(x) f^{(4)}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Hãy tìm $f(2008)$.
Bài 14. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho

$$f(f(f(x))) - 3f(f(x)) + 6f(x) = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 15. Tìm $f : (-1;1) \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

$$\left(1-x^2\right) f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \left(1+x^2\right)^2 f(x)$$

Bài 16. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f\left(x+\sqrt{2}\right) \le f(x) \le f(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng f là hàm hằng.
Bài 17. Tìm $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(x) \ge 2xf\left(x^2\right), \forall x \in [0;1]$.
Bài 18. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn $f(f(x)) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Bài 19. Cho $\alpha \ne 0$. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho

$$f\left(2x - \frac{f(x)}{\alpha}\right) = \alpha x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 20. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:
(i) : f đơn ánh;
(ii) : $f(2x - f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$;
(iii) Tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = x_0$.

Kinh nghiệm bản thân cho thấy: Loại toán I là đơn giản nhất và thường được thi ở các kỳ thi khu vực. Loại toán II ở mức độ trung bình, đôi khi cũng có bài phải rất tinh tế mới làm được , chẳng hạn như bài 1 phần 3. Loại toán III khó hơn và hay gặp ở các kỳ thi Quốc gia hoặc TST trước đây. Ngày nay loại toán này đã trở nên quen thuộc với nhiều bạn. Loại toán IV cũng là loại toán hay và đôi khi gặp ở các kỳ thi nói chung. Cuối cùng loại toán V mang nhiều tính chất của Giải tích và chính vì thế nó cũng thường dùng cho Olympic sinh viên. Tóm lại, sự phân loại cũng chỉ là tương đối

Tài liệu

[1] PL. Kannappan (2008), *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer.

[2] Nguyễn Văn Mậu,, *Phương trình hàm*, NXB GD (1997).