Mục lục

Lời nói đầu

Phương trình hàm là một chuyên đề quan trọng trong chương trình chuyên toán THPT. Các đề thi học sinh giỏi cấp Quốc gia, thi Olympic khu vực, Olympic Quốc tế thường xuất hiện bài toán về phương trình hàm, đó là những bài toán khó và mới mẻ đối với học sinh THPT. Những cuốn sách tham khảo về phương trình hàm dành cho học sinh là không nhiều. Vì vậy, trong luận văn này chúng tôi xin đề cập đến các phương trình hàm dạng sai phân với các dịch chuyển tịnh tiến và dịch chuyển đồng dạng. Hi vọng luận này sẽ là một tài liệu góp phần nhỏ bé vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán ở trường THPT.

Luận văn được chia làm ba chương:

Chương 1. Đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp với dịch chuyển tịnh tiến và đồng dạng.

Trong chương này tác giả trình bày khái quát về hàm số với các dịch chuyển tịnh tiến và đồng dạng như :

Định nghĩa các hàm tuần hoàn cộng tính, hàm phản tuần hoàn cộng tính, hàm tuần hoàn nhân tính, hàm phản tuần hoàn nhân tính.

Mô tả hàm phản tuần hoàn cộng tính, hàm tuần hoàn nhân tính, hàm phản tuần hoàn nhân tính thông qua hàm tuần hoàn cộng tính.

Đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp với các dịch chuyển tịnh tiến và đồng dạng.

Chương 2. Phương trình hàm dạng sai phân với dịch chuyển tịnh tiến.

Trong chương này tác giả trình bày phương trình hàm dạng sai phân với dịch chuyển tịnh tiến (bao gồm phương trình hàm thuần nhất và không thuần nhất; phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai). Trong đó tác giả đã trình bày phương pháp giải và công thức nghiệm của phương trình không thuần nhất đồng thời đề xuất quy tắc để đưa phương trình không thuần nhất về phương trình thuần nhất.
Phần cuối chương tác giả đề xuất một số ví dụ áp dụng.

Chương 3. Phương trình hàm dạng sai phân với dịch chuyển đồng dạng.
Chương này có cấu trúc tương tự như chương 2. Trong chương này tác giả trình bày phương trình hàm dạng sai phân với dịch chuyển đồng dạng (bao gồm phương trình hàm thuần nhất và không thuần nhất; phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai). Trong đó tác giả đã trình bày phương pháp giải và công thức nghiệm của phương trình không thuần nhất đồng thời đề xuất quy tắc để đưa phương trình không thuần nhất về phương trình thuần nhất và quy tắc tìm nghiệm riêng. Các kết quả của các bài toán trong chương này đều được mô tả theo hàm tuần hoàn cộng tính.
Phần cuối chương tác giả đề xuất một số ví dụ áp dụng.

Cuối cùng là phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Lời cám ơn

Với tình cảm chân thành, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới sự hướng dẫn khoa học nhiệt tình chu đáo, đầy tinh thần trách nhiệm của Thầy giáo PGS.TS Nguyễn Minh Tuấn.

Tôi xin chân thành cảm ơn tới tập thể các Giáo sư, Tiến sĩ Khoa Toán- Cơ- Tin học Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. Các đồng chí lãnh đạo, các đồng nghiệp trường Cao đẳng Sư phạm Lào Cai và GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong suốt quá trình tôi làm luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới những người thân trong gia đình và các đồng nghiệp, các bạn đồng khóa Cao học 2004 - 2006 đã có những ý kiến đóng góp quý báu cho đề tài, giúp đỡ tôi hoàn thành khóa học và luận văn tốt nghiệp này.

Hà Nội, tháng 12 năm 2006

Học viên

Hoàng Mạnh Thắng

Chương 1

Đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp với các dịch chuyển hình học

Trong chương này ta định nghĩa các hàm tuần hoàn, phản tuần hoàn cộng tính và nhân tính; mô tả các hàm phản tuần hoàn cộng tính, hàm tuần hoàn nhân tính, hàm phản tuần hoàn nhân tính thông qua hàm tuần hoàn cộng tính; đưa ra các đặc trưng của một số hàm số sơ cấp với dịch chuyển tịnh tiến và đồng dạng.

1.1. Một số kiến thức cơ bản của hàm số

1.1.1. Định nghĩa hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ và tập M $(M \subset D(f))$. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn trên M nếu tồn tại số dương a sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in M \text{ ta đều có } x \pm a \in M, \\ f(x+a) = f(x), \forall x \in M; \end{cases}$$

a được gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) trong các chu kỳ của $f(x)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Ví dụ. Xét hàm $f(x) = \cos x$. Khi đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ và

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x).$$

Định nghĩa 2. Cho hàm số $f(x)$ và tập M $(M \subset D(f))$ Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn trên M nếu tồn tại số dương a sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in M \text{ ta đều có } x \pm a \in M, \\ f(x+a) = -f(x), \forall x \in M; \end{cases}$$

a được gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) trong các chu kỳ của $f(x)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Ví dụ. Xét hàm $f(x) = \sin x$, khi đó $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn chu kỳ π.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $x + \pi \in \mathbb{R}$ và

$$f(x + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = -f(x).$$

1.1.2. Định nghĩa hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 3. $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a $(a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M, \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

Ví dụ. Xét hàm $f(x) = \sin(2\pi \log_2 x)$ khi đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2 trên $\mathbb{R}^+$. Thật vậy, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ta có

$$f(2x) = \sin(2\pi \log_2(2x)) = \sin(2\pi(1 + \log_2 x)) = \sin(2\pi \log_2 x) = f(x)$$

Định nghĩa 4. $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a $(a \notin \{0, 1, -1\})$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M, \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M. \end{cases}$$

Ví dụ. Xét hàm $f(x) = \cos(\pi \log_3 x)$ khi đó $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ 3 trên $\mathbb{R}^+$. Thật vậy, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ta có

$$f(3x) = \cos(\pi \log_3(3x)) = \cos(\pi(1 + \log_3 x)) = -\cos(\pi \log_3 x) = -f(x)$$

1.1.3. Mô tả các hàm phản tuần hoàn cộng tính, hàm tuần hoàn nhân tính, phản tuần hoàn nhân tính thông qua hàm tuần hoàn cộng tính

a) Hàm phản tuần hoàn cộng tính

Cho $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ b. Hãy mô tả (biểu diễn) $f(x)$ thông qua hàm tuần hoàn cộng tính.

Thật vậy ta có

$$f(x + b) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(x + b)] \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(x + b)],$$

trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2b$.

b) Hàm tuần hoàn nhân tính

Cho $f(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ c. Hãy mô tả (biểu diễn) $f(x)$ thông qua hàm tuần hoàn cộng tính.

Thật vậy, ta có

$$f(cx) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\} \tag{1.1.1}$$

Xét các trường hợp sau:

b1) Với $c > 0$

Với $x < 0$, đặt $-x = c^t$ và $f(-c^t) = h_1(t)$. Khi đó $t = \log_c |x|$ và (1.1.1) trở thành $h_1(t + 1) = h_1(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Với $x > 0$, đặt $x = c^t$ và $f(c^t) = h_2(t)$. Khi đó $t = \log_c x$ và (1.1.1) trở thành $h_2(t+1) = h_2(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
Vậy

$$f(x) = \begin{cases} h_1(\log_c |x|) & \text{nếu } x < 0, \\ m \text{ tuỳ ý} & \text{nếu } x = 0, \\ h_2(\log_c x) & \text{nếu } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
b2) Với $c < 0$
Khi đó $f(c^2x) = f(x)$ và mọi nghiệm của (1.1.1) được cho bởi công thức

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(cx)], \tag{1.1.2}$$

trong đó $g(c^2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Thật vậy, nếu $f(x)$ có dạng (1.1.2) thì $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(cx) = \frac{1}{2}[g(cx) + g(c^2x)] = \frac{1}{2}[g(cx) + g(x)] = f(x)$$

Ngược lại, nếu $f(x)$ thoả mãn (1.1.1) thì chọn $g(x) = f(x)$.
Khi đó $g(c^2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và

$$\frac{1}{2}[g(x) + g(cx)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(cx)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tương tự cách giải phương trình (1.1.1) ta có

$$g(x) = \begin{cases} h_3(\frac{1}{2}\log_c |x|) & \text{nếu } x < 0, \\ n \text{ tuỳ ý} & \text{nếu } x = 0, \\ h_4(\frac{1}{2}\log_c x) & \text{nếu } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $h_3(t), h_4(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
c) Hàm phản tuần hoàn nhân tính
Cho $f(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ d. Hãy mô tả (biểu diễn) $f(x)$ thông qua hàm tuần hoàn cộng tính.

$$f(dx) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\} \tag{1.1.3}$$

với $d \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$.

Khi đó $f(d^2x) = f(x)$ và mọi nghiệm của (1.1.3) được cho bởi công thức

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(dx)], \tag{1.1.4}$$

trong đó $g(d^2x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, nếu $f(x)$ có dạng (1.1.3) thì ta có

$$f(dx) = \frac{1}{2}[g(dx) - g(d^2x)] = \frac{1}{2}[g(dx) - g(x)] = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ngược lại, với mỗi $f(x)$ thoả mãn (1.1.3) thì chọn $g(x) = f(x)$.

Khi đó $g(d^2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và

$$\frac{1}{2}[g(x) - g(dx)] = \frac{1}{2}[f(x) - f(dx)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tương tự cách giải (1.1.1) ta được $f(x) = \dfrac{1}{2}[g(x) - g(dx)]$ trong đó

$$g(x) = \begin{cases} h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) & \text{nếu } x < 0, \\ d \text{ tuỳ ý} & \text{nếu } x = 0, \\ h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) & \text{nếu } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.

1.2. Dạng đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp với các dịch chuyển hình học (tịnh tiến và đồng dạng)

1.2.4. Dịch chuyển tịnh tiến

a) Các hàm $f(x) = \cos(ax), f(x) = \sin(ax), (a \neq 0)$có đăc trưng là

$$f(x + \frac{2\pi}{a}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Hàm $f(x) = \text{tg}(ax), (a \neq 0)$ có đăc trưng là

$$f(x + \frac{\pi}{a}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a} | k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Hàm $f(x) = \text{cotg}(ax), (a \neq 0)$ có đăc trưng là

$$f(x + \frac{\pi}{a}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{k\frac{\pi}{a} | k \in \mathbb{Z}\}.$$

d) Các hàm $f(x) = \cos(ax), f(x) = \sin(ax), (a \neq 0)$ có đặc trưng là

$$f(x + \frac{\pi}{a}) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét 1.1. *Cho $a \neq 0$, khi đó các hàm $f(x) = tg(ax); g(x) = cotg(ax)$ không là hàm phản tuần hoàn cộng tính.*

Chứng minh. *Hàm $f(x) = \text{tg}(ax)$ không là hàm phản tuần hoàn cộng tính. Thật vậy, nếu $f(x) = \text{tg}\, x$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ T ta có*

$$\forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D \tag{1.2.5}$$

và

$$f(x + T) = -f(x), \forall x \in D \tag{1.2.6}$$

trong đó

$$D = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2a} + \frac{k\pi}{a} | k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.2.7}$$

Từ (1.2.5) và (1.2.7) suy ra $T = \dfrac{\pi}{a}$

Khi $T = \dfrac{\pi}{a}$ không thỏa mãn (1.2.6).

Vậy không tồn tại T thỏa mãn (1.2.5) và (1.2.6)(Điều phải chứng minh). Tương tự, ta chứng minh được hàm $g(x) = cotg(ax)$ không là hàm phản tuần hoàn cộng tính.

1.2.5. Dịch chuyển đồng dạng

a)Với $a \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1, -1\}$ các hàm $f(x) = \sin(2\pi \log_{|a|} |x|), f(x) = \cos(2\pi \log_{|a|} |x|)$ có đặc trưng là

$$f(ax) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

b) Với $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$ hàm $f(x) = \text{tg}(\pi \log_{|a|} |x|)$ có đặc trưng là

$$f(ax) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*\backslash\{\pm|a|^{\frac{1+2k}{2}}, |k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Với $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$ hàm $f(x) = \text{cotg}(\pi \log_{|a|} |x|)$ có đặc trưng là

$$f(ax) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*\backslash\{\pm|a|^k|k \in \mathbb{Z}\}.$$

d) Với $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$ hàm $f(x) = \sin(\pi \log_{|a|} |x|), f(x) = \cos(\pi \log_{|a|} |x|)$ có đặc trưng là

$$f(ax) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Nhận xét 1.2. *Với $a \in R\backslash \{0, 1, -1\}, b \neq 0$ thì các hàm*

$$f(x) = tg\left(b\pi \log_{|a|} |x|\right),$$
$$g(x) = \cot g\left(b\pi \log_{|a|} |x|\right)$$

không là hàm phản tuần hoàn nhân tính.

Chứng minh.

Khi x chạy khắp $\mathbb{R}^*$ thì $log_{|a|} |x|$ chạy khắp $\mathbb{R}$, do đó $b\pi \log_{|a|} |x|$ chạy khắp $\mathbb{R}$ (vì $b \neq 0$). Vì vậy tập xác định của hàm $f(x)$ là

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}^* \middle| b\pi \log_{|a|} |x| \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Giả sử hàm $f(x)$ phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ α, ta có

$$\begin{aligned}
&f(\alpha x) = -f(x), \forall x \in D_f \\
&\Leftrightarrow tg\left(b\pi \log_{|a|} |\alpha x|\right) = -tg\left(b\pi \log_{|a|} |x|\right), \forall x \in D_f \\
&\Leftrightarrow tg\left(b\pi \log_{|a|} |x| + b\pi \log_{|a|} \alpha\right) = -tg\left(b\pi \log_{|a|} |x|\right), \forall x \in D_f.
\end{aligned}$$

Đặt $X = b\pi \log_{|a|} |x|, T = b\pi \log_{|a|} \alpha$, ta có

$$tg\,(X + T) = -tg(X), \forall X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

suy ra tgx là hàm phản tuần hoàn cộng tính (mâu thuẫn với nhận xét 1.1.). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đối với hàm $g(x) = \cot g\left(b\pi \log_{|a|} |x|\right)$ ta chứng minh hoàn toàn tương tự.

Chương 2

Phương trình hàm dạng sai phân với dịch chuyển tịnh tiến

Trong chương này ta giải các bài toán về phương trình hàm dạng sai phân bậc nhất và bậc hai (thuần nhất và không thuần nhất) với dịch chuyển tịnh tiến. Trong đó việc giải phương trình hàm dạng sai phân bậc hai được đưa về phương trình hàm dạng sai phân bậc nhất.

2.1. Phương trình hàm dạng sai phân bậc nhất với dịch chuyển tịnh tiến

Bài toán 2.1. *Cho các số thực a, β khác 0, và tập D thỏa mãn điều kiện: $D \subseteq \mathbb{R}$; $\forall x \in D \Rightarrow x \pm a \in D$. Tìm các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x + a) + \beta f(x) = 0, \forall x \in D.$$

Lời giải

Đặt $f(x) = |b|^{\frac{x}{a}} g(x)$, ta có:

+ Với $\beta < 0$ phương trình đã cho trở thành $g(x + a) = g(x), \forall x \in D$.

+ Với $\beta > 0$ phương trình đã cho trở thành

$$g(x+a) = -g(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(x+a)], \forall x \in D$$

trong đó $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.

Vậy

+ Với $\beta < 0$ ta được $f(x) = \beta^{\frac{x}{a}} g(x)$ trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

+ Với $\beta > 0$ ta được $f(x) = \dfrac{1}{2}|\beta|^{\frac{x}{a}}[h(x) - h(x+a)]$,
trong đó $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.

Bài toán 2.2. *Cho a, β khác 0 và $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên $D \subseteq R$. Tìm các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x+a) + \beta f(x) = h(x), \forall x \in D. \tag{2.1.1}$$

Lời giải:

(i) Với $\beta \neq -1$: Vì $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ nên

$$h(x) = \frac{h(x+a)}{\beta+1} + \beta\frac{h(x)}{\beta+1}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{\beta+1}$, phương trình (2.1.1) trở thành

$$g(x+a) + \beta g(x) = 0$$

Theo bài toán 2.1 ta có

+ Nếu $\beta < 0$ thì $g(x) = |\beta|^{\frac{x}{a}} k(x)$, trong đó $k(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$.

+ Nếu $\beta > 0$ thì $g(x) = \beta^{\frac{x}{a}}[p(x) - p(x+a)]$, trong đó $p(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$.

(ii) Với $\beta = -1$: Phương trình (2.1.1) trở thành

$$f(x+a) - f(x) = h(x), \forall x \in D. \tag{2.1.2}$$

Vì $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ nên

$$h(x) = \frac{(x+a)h(x+a)}{a} - \frac{xh(x)}{a}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{xh(x)}{a}$, phương trình (2.1.2) trở thành

$$g(x+a) = g(x), \forall x \in D.$$

Vậy $f(x) = g(x) + \dfrac{xh(x)}{a}$, trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tinhs chu kỳ $|a|$ trên D.

Bài toán 2.3. *Cho a, β khác 0 và $h(x)$ là một hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên $D \subseteq \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+a) + \beta f(x) = h(x),\ \forall x \in D. \tag{2.1.3}$$

Lời giải:

i) Với $\beta = -1$: phương trình (2.1.3) trở thành

$$f(x+a) - f(x) = h(x), \forall x \in D \tag{2.1.4}$$

Vì $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ nên

$$h(x) = \frac{h(x)}{2} - \frac{h(x+a)}{2}.$$

Đặt $g(x) = f(x) + \dfrac{h(x)}{2}$, phương trình (2.1.4) trở thành

$$g(x+a) = g(x), \forall x \in D$$

. Vậy $f(x) = g(x) - \dfrac{h(x)}{2}$, trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

ii) Với $\beta = 1$: phương trình (2.1.3) trở thành

$$f(x+a) + f(x) = h(x), \forall x \in D. \tag{2.1.5}$$

Vì $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ nên

$$h(x) = \frac{-xh(x+a)}{a} - \frac{(x-a)h(x)}{a}.$$

Đặt $g(x) = f(x) + \dfrac{(x-a)h(x)}{a}$, phương trình (2.1.5) trở thành

$$g(x+a) = -g(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left[g_1(x) - g_1(x+a)\right],$$

trong đó $g_1(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 2a| trên D..
Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[g_1(x) - g_1(x+a)\right] - \dfrac{(x-a)h(x)}{a}$.
iii) Với $\beta \neq \pm 1$ thì nghiệm của phương trình (2.1.3) được xác định như sau:
Vì $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ nên

$$h(x) = \frac{h(x+a)}{\beta - 1} + \beta\frac{h(x)}{\beta - 1}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{\beta - 1}$, phương trình (2.1.4) trở thành

$$g(x+a) + \beta g(x) = 0, \forall x \in D.$$

Theo bài toán 2.1 ta có
+ Nếu $\beta < 0$ thì $g(x) = |\beta|^{\frac{x}{a}} k(x)$, trong đó $k(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính trên D chu kỳ $|a|$.
+Nếu $\beta > 0$ thì $g(x) = \dfrac{1}{2}\beta^{\frac{x}{a}}\left[p(x) - p(x+a)\right]$, trong đó $p(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.
Vậy
+ Nếu $\beta < 0$ thì $f(x) = |\beta|^{\frac{x}{a}} k(x) + \dfrac{h(x)}{\beta - 1}$
+ Nếu $\beta > 0$ thì $f(x) = \frac{1}{2}\beta^{\frac{x}{a}}\left[p(x) - p(x+a)\right] k(x) + \dfrac{h(x)}{\beta - 1}$.

2.2. Phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất với dịch chuyển tịnh tiến

Bài toán 2.4. *Cho $a \in \mathbb{R}^*$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, tập D thỏa mãn điều kiện: $D \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in D \Rightarrow x \pm a \in D$. Tìm tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x+2a) + \alpha f(x+a) + \beta f(x) = 0, \forall x \in D. \tag{2.2.6}$$

(Phương trình có dạng (2.2.6) được gọi là phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất với dịch chuyển tịnh tiến.)

Lời giải. Xét phương trình

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \tag{2.2.7}$$

(phương trình (2.2.7) được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (2.2.6)), có $\triangle = \alpha^2 - 4\beta$.

a) Trường hợp $\triangle > 0$

Khi đó phương trình (2.2.7) có hai nghiệm thực $\lambda_1 \neq \lambda_2$, không mất tính tổng quát ta giả sử $\lambda_1 > \lambda_2$.

Áp dụng định lý Viete ta có

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha \\ \lambda_1\lambda_2 = \beta \end{cases}$$

thay vào (2.2.6) ta được

$$\begin{aligned} & f(x+2a) - (\lambda_1 + \lambda_2) f(x+a) + \lambda_1\lambda_2 f(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \ f(x+2a) - \lambda_1 f(x+a) = \lambda_2[f(x+a) - \lambda_1 f(x)]. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Đặt $g_1(x) = f(x+a) - \lambda_1 f(x)$, phương trình (2.2.8) trở thành

$$g_1(x+a) = \lambda_2 g_1(x). \tag{2.2.9}$$

Tương tự cách giải bài toán 2.1 ta có

+ Với $\lambda_2 > 0$ ta được

$$g_1(x) = \lambda_2^{\frac{x}{a}} h_1(x) \Leftrightarrow f(x+a) - \lambda_1 f(x) = \lambda_2^{\frac{x}{a}} h_1(x), \tag{2.2.10}$$

trong đó $h_1(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

+ Với $\lambda_2 < 0$ ta được

$$g_1(x) = \frac{1}{2}|\lambda_2|^{\frac{x}{a}}[k_1(x) - k_1(x+a)]$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \lambda_1 f(x) = \frac{1}{2}|\lambda|^{\frac{x}{a}}[k_1(x) - k_1(x+a)], \tag{2.2.11}$$

trong đó $k_1(x)$là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.

Đổi vai trò của λ_1, λ_2 và biến đổi tương tự ta được

+ Với $\lambda_1 > 0$ ta có

$$f(x+a) - \lambda_2 f(x) = \lambda_1^{\frac{x}{a}} h_2(x), \tag{2.2.12}$$

trong đó $h_2(x)$là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

+ Với $\lambda_1 < 0$ ta có

$$f(x+a) - \lambda_2 f(x) = \frac{1}{2}|\lambda_1|^{\frac{x}{a}}[k_2(x) - k_2(x+a)], \tag{2.2.13}$$

trong đó $k_2(x)$là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.

+Nếu $\lambda_1 > 0$ và $\lambda_2 > 0$ thì trừ (2.2.10) cho (2.2.12) ta được

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}[\lambda_2^{\frac{x}{a}} h_1(x) - \lambda_1^{\frac{x}{a}} h_2(x)].$$

+Nếu $\lambda_1 < 0$ và $\lambda_2 < 0$ thì trừ (2.2.11) cho (2.2.13) ta được

$$f(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big[|\lambda_2|^{\frac{x}{a}}[k_1(x) - k_1(x+a)] - |\lambda_1|^{\frac{x}{a}}[k_2(x) - k_2(x+a)]\Big].$$

+Nếu $\lambda_1 > 0$ và $\lambda_2 < 0$thì trừ (2.2.11) cho (2.2.12) ta được

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[\frac{1}{2}|\lambda_2|^{\frac{x}{a}}[k_1(x) - k_1(x+a)] - \lambda_1^{\frac{x}{a}} h_2(x)\Big].$$

b) Trường hợp $\triangle = 0$

Tức là

$$\alpha^2 - 4\beta = 0 \text{ hay } \beta = \frac{\alpha^2}{4}$$

Khi đó phương trình (2.2.7) có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{\alpha}{2}$. Do đó ta có

$$f(x+2a) + \alpha f(x+a) + \frac{\alpha^2}{4} f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ f(x+2a) + \left(\frac{\alpha}{2}\right) f(x+a) = -\frac{\alpha}{2}\Big[f(x+a) + \frac{\alpha}{2} f(x)\Big]. \qquad (2.2.14)$$

Đặt $f(x+a) + \frac{\alpha}{2} f(x) = g(x)$, khi đó (2.2.14) trở thành

$$g(x+a) = -\frac{\alpha}{2} g(x), \qquad (2.2.15)$$

Ta xét các trường hợp sau:

b1) Trường hợp $\alpha = -2$

(2.2.15) trở thành $g(x+a) = g(x)$.

Như vậy $f(x+a) - f(x) = g(x)$

Tương tự cách giải bài toán 2.2 (i) ta được

$$f(x) = h(x) + \frac{xg(x)}{a}$$

trong đó $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

b2) Trường hợp $\alpha = 2$

(2.2.15) trở thành $g(x+a) = g(x)$.

Như vậy $f(x+a) + f(x) = g(x)$,

tương tự cách giải bài toán 2.3 (ii) ta được

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[g_1(x) - g_1(x+a)\right] - \frac{(x-a)\left[h_1(x) - h_1(x+a)\right]}{2a},$$

trong đó $g_1(x), h_1(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.

b3) Trường hợp $-2 \neq \alpha < 0$

Bài toán quy về việc giải phương trình dạng

$$f(x+a)+\frac{\alpha}{2}f(x)=g(x) \tag{2.2.16}$$

với

$$g(x+a)+\frac{\alpha}{2}g(x)=0. \tag{2.2.17}$$

Tương tự cách giải bài toán 2.1 ta được nghiệm của (2.2.17) là

$$g(x)=\big(-\frac{\alpha}{2}\big)^{\frac{x}{a}}h(x),$$

trong đó $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

thay vào phương trình (2.2.16) ta có

$$\begin{aligned}
&f(x+a)-(-\frac{\alpha}{2})f(x)=(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}h(x),\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(x+a)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}}-\big(-\frac{\alpha}{2}\big)\frac{f(x)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}}=h(x)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(x+a)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x+a}{a}}}-\frac{f(x)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}}=\frac{h(x)}{-\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Đặt

$$\frac{f(x)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}}=I_1(x);\quad \frac{h(x)}{-\frac{\alpha}{2}}=h_1(x),$$

phương trình (2.2.18) trở thành

$$\Leftrightarrow\ I_1(x+a)-I_1(x)=h_1(x),$$

trong đó $h_1(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D. tương tự cách giải bài toán 2.2 (i) ta được

$$I_1(x)=k_1(x)+\frac{xh_1(x)}{a}=k_1(x)-\frac{2xh(x)}{\alpha a}.$$

Vậy $f(x) = \big(-\dfrac{\alpha}{2}\big)^{\frac{x}{a}}\Big[k_1(x) - \dfrac{2xh(x)}{\alpha a}\Big]$,
trong đó $k_1(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

b4) Trường hợp $2 \neq \alpha > 0$

Bài toán quy về việc giải phương trình

$$f(x+a) + \frac{\alpha}{2}f(x) = g(x) \tag{2.2.19}$$

với

$$g(x+a) + \frac{\alpha}{2}g(x) = 0, \tag{2.2.20}$$

tương tự việc giải bài toán 2.1 ta có nghiệm phương trình (2.2.20) là

$$g(x) = \big(\frac{\alpha}{2}\big)^{\frac{x}{a}}h(x).$$

thay vào (2.2.19) ta được

$$\begin{aligned} & f(x+a) + \frac{\alpha}{2}f(x) = \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}h(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{f(x+a)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} + \frac{\alpha}{2}\frac{f(x)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} = h(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{f(x+a)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x+a}{a}}} + \frac{f(x)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} = \frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Đặt

$$\frac{f(x)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} = I_2(x);\ \frac{2h(x)}{\alpha} = h_2(x)$$

với $h_2(x+a) = -h_2(x)$, khi đó ta có

$$I_2(x+a) + I_2(x) = h_2(x).$$

Tương tự cách giải bài toán 2.5 (i)ta có

$$\begin{aligned} I_2(x) &= k(x) - \frac{(x-a)h_2(x)}{a} = k(x) - \frac{2(x-a)h(x)}{\alpha a} \\ &= \frac{1}{2}\Big[k_2(x) - k_2(x+a)\Big] - \frac{(x-a)[h_3(x) - h_3(x+a)]}{\alpha a}, \end{aligned}$$

trong đó $k_2(x), h_3(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.
Vậy

$$f(x) = \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}} \left\{ \frac{1}{2}\Big[k_2(x) - k_2(x+a)\Big] - \frac{(x-a)[h_3(x) - h_3(x+a)]}{\alpha a} \right\}.$$

c) Trường hợp $\triangle < 0$

Phương trình (2.2.7) có hai nghiệm phức liên hợp $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C};\ \overline{\lambda}_1 = \lambda_2$, do đó đặt $\lambda_1 = p - iq,\ \lambda_2 = p + iq$ suy ra $|\lambda_0| = |\lambda_1| = |\lambda_2| \sqrt{p^2+q^2}, arg\lambda_2 = \varphi = \overline{arg\lambda_1}, tg\varphi = \dfrac{q}{p}$. Biến đổi tương tự như trường hợp $\triangle > 0$ ta được

$$g_1(x+a) = \lambda_2 g_1(x)$$

với $g_1(x) = f(x+a) - \lambda_1 f(x)$, suy ra $g_1 :\ D \to \mathbb{C}$,
ta có

$$g_1(x+a) = e^{\ln\lambda_2} g_1(x) \ \Leftrightarrow\ \frac{g_1(x+a)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} = e^{\ln\lambda_2}.\frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{g_1(x+a)}{e^{\frac{x+a}{a}\ln\lambda_2}} = \frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} \Leftrightarrow\ \frac{g_1(x+a)}{e^{\frac{x+a}{a}\ln\lambda_2}} = \frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}}.$$

Đặt

$$\frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} = h_1(x), \tag{2.2.21}$$

ta có $h_1(x+a) = h_1(x)$.
Đổi vai trò của λ_1, λ_2 và biến đổi tương tự như trên ta được

$$h_2(x+a) = h_2(x),$$

với

$$\frac{g_2(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}} = h_2(x). \tag{2.2.22}$$

Từ (2.2.21) và (2.2.22) ta có

$$\begin{cases} g_1(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2} h_1(x), \\ g_2(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1} h_2(x). \end{cases}$$

Ta chứng minh $\quad \overline{h_1(x)} = h_2(x).$

Thật vậy, trước hết ta chứng minh $\quad \overline{g_1(x)} = g_2(x).$

Ta có $\quad \overline{g_1(x)} = \overline{f(x+a) - \lambda_1 f(x)}$, lấy x_0 bất kỳ,$x_0 \in D$,

$$\begin{aligned}\overline{g_1(x_0)} &= \overline{f(x_0+a) - \lambda_1 f(x_0)}\\ &= f(x_0+a) - \overline{\lambda_1} f(x_0) = f(x_0+a) - \lambda_2 f(x_0) = g_2(x_0),\end{aligned}$$

vì x_0 bất kỳ nên $\forall x \in \mathbb{R}$ ta được

$$\overline{g_1(x)} = g_2(x). \tag{2.2.23}$$

Tiếp theo ta chứng minh $\overline{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}$.

Thật vậy

$$\begin{aligned}
\overline{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} &= \overline{e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2| + iarg\lambda_2 + 2k\pi i)}}\\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}.\overline{e^{iarrg\lambda_2\frac{x}{a}}e^{i2k\pi\frac{x}{a}}}\\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\overline{\Big(\frac{\cos\varphi x}{a} + i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big)\Big(\cos\frac{2k\pi x}{a} + i\sin\frac{2k\pi x}{a}\Big)}\\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\overline{\Big(\cos\frac{\varphi x}{a} + i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big)}\,\overline{\Big(\cos\frac{2k\pi x}{a} + i\sin\frac{2k\pi x}{a}\Big)} \qquad = e\\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\Big(\cos\Big(-\frac{\varphi x}{a}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\varphi x}{a}\Big)\Big)\Big(\cos\Big(-\frac{2k\pi x}{a}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2k\pi x}{a}\Big)\Big)\\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}e^{i(-\frac{\varphi x}{a})}e^{i(-\frac{2k\pi x}{x})}\\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_1|}e^{i\frac{arg\lambda_1 x}{a}}e^{i\frac{2k'\pi x}{a}}\\
&= e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_1| + iarg\lambda_1 + 2k'\pi i)} = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1},
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

ở đây $arg\lambda_1 = -\varphi;\ arg\lambda_2 = \varphi;\ -k = k'$.

Từ (2.2.23) và (2.2.24) ta được

$$\overline{\Bigg[\frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}}\Bigg]} = \frac{g_2(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}} \Leftrightarrow \overline{h_1(x)} = h_2(x).$$

Vì $h_1 :\ D \to \mathbb{C}; \qquad h_2 :\ D \to \mathbb{C}$ và $\overline{h_1(x)} = h_2(x)$

nên ta đặt $h_1(x) = m(x) + in(x)$ khi đó $h_2(x) = m(x) - in(x)$,

trong đó

$$m :\ D \to \mathbb{R}; \qquad n :\ D \to \mathbb{R}.$$

Quay trở lại bài toán ban đầu ta có

$$\begin{cases} f(x+a) - \lambda_1 f(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2} h_1(x), \\ f(x+a) - \lambda_2 f(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1} h_2(x); \end{cases}$$

trừ tương ứng của hệ trên cho nhau ta được

$$\begin{aligned} f(x) = &\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2} h_1(x) - e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1} h_2(x)\Big] \\ = &\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2} h_1(x) - \overline{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} h_2(x)\Big] \\ = &\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2|+iarg\lambda_2+2k\pi i)} h_1(x) - \overline{e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2|+iarg\lambda_2+2k\pi i)}} h_2(x)\Big]. \end{aligned}$$

Vì hàm $e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}$ là hàm đa trị, ta sẽ chọn một nhánh liên tục bằng cách chọn $k=0$, nên ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2|+iarg\lambda_2)} h_1(x) - \overline{e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2|+iarg\lambda_2)}} h_2(x)\Big] \\ &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\Big(\cos\frac{\varphi x}{a} + i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big) h_1(x) \\ &\quad - e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\Big(\cos\frac{\varphi x}{a} - i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big) h_2(x)\Big] \\ &= \frac{e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_0|}}{2iq}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a}\big(h_1(x)-h_2(x)\big) + i\sin\frac{\varphi x}{a}\big(h_1(x)+h_2(x)\big)\Big] \\ &= \frac{e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_0|}}{2iq}\Big[2i\cos\frac{\varphi x}{a} n(x) + 2i\sin\frac{\varphi x}{a} m(x)\Big] \\ &= \frac{e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_0|}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a} n(x) + \sin\frac{\varphi x}{a} m(x)\Big] \\ &= \frac{|\lambda_0|^{\frac{x}{a}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a} n(x) + \sin\frac{\varphi x}{a} m(x)\Big], \end{aligned}$$

trong đó các hàm $n(x)$ và $m(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.

Kết luận

a) $\triangle > 0$

+ Nếu $\lambda_1 > 0$ và $\lambda_2 > 0$ thì

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}[\lambda^{\frac{x}{a}} h_1(x) - \lambda_1^{\frac{x}{a}} h_2(x)];$$

trong đó $h_1(x), h_2(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.
+ Nếu $\lambda_1 < 0$ và $\lambda_2 < 0$ thì

$$f(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big[|\lambda_2|^{\frac{x}{a}}[k_1(x) - k_1(x+a)] - \frac{1}{2}|\lambda_1|^{\frac{x}{a}}[k_2(x) - k_2(x+a)]\Big];$$

trong đó $k_1(x), k_2(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.
+ Nếu $\lambda_1 > 0$ và $\lambda_2 < 0$ thì

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[\frac{1}{2}|\lambda_2|^{\frac{x}{a}}[k_1(x) - k_1(x+a)] - \lambda_1^{\frac{x}{a}}h_2(x)\Big],$$

trong đó $k_1(x), h_2(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.
b) $\triangle = 0$.
+Trường hợp $\alpha = -2$

$$f(x) = h(x) + \frac{xg(x)}{a},$$

trong đó $h(x), g(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.
+Trường hợp $\alpha = 2$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[g_1(x) - g_1(x+a)\right] - \frac{(x-a)\left[h_1(x) - h_1(x+a)\right]}{2a},$$

trong đó $g_1(x), h_1(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.
+ Trường hợp $-2 \neq \alpha < 0$

$$f(x) = \Big(-\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}\Big[k_1(x) - \frac{2xh(x)}{\alpha a}\Big],$$

trong đó $k_1(x), h(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.
+ Trường hợp $2 \neq \alpha > 0$

$$f(x) = (\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}\left\{\frac{1}{2}\Big[k_2(x) - k_2(x+a)\Big] - \frac{(x-a)[h_3(x) - h_3(x+a)]}{\alpha a}\right\},$$

trong đó $k_2(x), h_3(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.
c) $\triangle < 0$

$$f(x) = \frac{|\lambda_0|^{\frac{x}{a}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a}\,n(x) + \sin\frac{\varphi x}{a}.m(x)\Big],$$

trong đó $m(x), n(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên D.
và $\lambda_1 = p - iq;\ \ \lambda_2 = p + iq$ là nghiệm của phương trình đặc trưng,
suy ra $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_0| = \sqrt{q^2 + q^2};\ arg\lambda_2 = \overline{arg\lambda_1} = \varphi$.

2.3. Phương trình hàm dạng sai phân bậc hai không thuần nhất với dịch chuyển tịnh tiến

2.3.1. Bài toán.

Cho $a \in \mathbb{R}^*; \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \beta \neq 0$, tập D thỏa mãn điều kiện:
$D \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in D \Rightarrow x \pm a \in D$ và hàm $g(x)$ xác định trên D.
Tìm tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + 2a) + \alpha f(x + a) + \beta f(x) = g(x), \tag{2.3.25}$$

(Nếu hàm $g(x)$ không đồng nhất 0 thì phương trình (2.3.25) được gọi là phương trình hàm dạng sai phân bậc hai không thuần nhất với dịch chuyển tịnh tiến.)

2.3.2. Nhận xét

a) Nghiệm của phương trình (2.3.25) là $f(x) = \widetilde{f}(x) + f^*(x)$*, trong đó* $\widetilde{f}(x)$ *là nghiệm của phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất,*$f^*(x)$ *là một nghiệm nào đó (còn gọi là nghiệm riêng) của phương trình (2.3.25).*
b) Nếu với mỗi $i = \overline{1, n}$ $f_i^*(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$f(x + 2a) + \alpha f(x + a) + \beta f(x) = g_i(x)$$

thì $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^*(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$f(x + 2a) + \alpha f(x + a) + \beta f(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \tag{2.3.26}$$

Từ nhận xét trên ta rút ra phương pháp giải phương trình (2.3.25) như sau:
+ Bước 1: Tìm $\widetilde{f}(x)$.
+ Bước 2: Tìm $f^*(x)$.
+ Bước 3: Nghiệm của phương trình (2.3.25) là $f(x) = \widetilde{f}(x) + f^*(x)$.

2.3.3. Một số bài toán và phương pháp tìm nghiệm riêng

Bài toán 2.5. *Tìm nghiệm riêng của phương trình*

$$f(x+2a)+\alpha f(x+a)+\beta f(x)=b, \tag{2.3.27}$$

trong đó $a,\beta\in\mathbb{R}^*, b,\alpha\in\mathbb{R}, b\neq 0$, *tập* D *thỏa mãn:*

$$D\subseteq\mathbb{R}, \forall x\in D\Rightarrow x\pm a\in D, f: D\to\mathbb{R}.$$

Lời giải

a) Với $\alpha+\beta+1\neq 0$.

Ta tìm 1 nghiệm riêng của (2.3.27) có dạng $f^*(x)=c$. Thay $f^*(x)=c$ vào (2.3.27) ta được

$$c+\alpha c+\beta c=b\Leftrightarrow c=\frac{b}{1+\alpha+\beta}.$$

Vậy $f^*(x)=\dfrac{b}{1+\alpha+\beta}$.

b) Với $\alpha+\beta+1=0$ và $\alpha\neq -2$.

Ta tìm một nghiệm riêng của (2.3.27) có dạng $f^*(x)=cx$. Thay vào (2.3.27) ta được

$$c(x+2a)+\alpha c(x+a)+\beta c(x)=b\Leftrightarrow c=\frac{b}{a(\alpha+2)}.$$

Vậy $f^*(x)=\dfrac{bx}{a(\alpha+2)}$.

c) Với $\alpha+\beta+1=0$ và $\alpha=-2$. Phương trình (2.3.27) trở thành $f(x+2a)-2f(x+a)+f(x)=b$.

Ta tìm một nghiệm riêng của (2.3.27) có dạng $f^*(x)=cx^2$. Thay vào (2.3.27) ta được

$$c(x+2a)^2-2c(x+a)^2-cx=b\Leftrightarrow c=\frac{b}{2a^2}.$$

Vậy $f^*(x)=\dfrac{bx^2}{2a^2}$.

Kết luận

+ Nếu $\alpha+\beta+1\neq 0$ thì $f^*(x)=\dfrac{b}{\alpha+\beta+1}$.
+ Nếu $\alpha+\beta+1=0$ và $\alpha\neq -2$ thì $f^*(x)=\dfrac{bx}{a(\alpha+2)}$
+ Nếu $\alpha+\beta+1=0$ và $\alpha=-2$ thì $f^*(x)=\dfrac{bx^2}{2a^2}$.

Bài toán 2.6. *Tìm nghiệm riêng của phương trình*

$$f(x+2a)+\alpha f(x+a)+\beta f(x)=h(x), \tag{2.3.28}$$

trong đó $a,\beta\in\mathbb{R}^*,\alpha\in\mathbb{R}$ và $h(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$ trên $D\subseteq\mathbb{R}$ cho trước, $f:D\to\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Trường hợp $1+\alpha+\beta\neq 0$

Ta tìm nghiệm riêng của (2.3.28) có dạng $f^*(x)=ch(x)$, thay vào (2.3.28)ta được

$$ch(x)+\alpha ch(x)+\beta ch(x)\equiv h(x)\Leftrightarrow ch(x)(1+\alpha+\beta)\equiv h(x) \tag{2.3.29}$$

Chọn $c=\dfrac{1}{1+\alpha+\beta}$ thì (2.3.29)thỏa mãn.

Vậy $f^*(x)=\dfrac{h(x)}{1+\alpha+\beta}$.

b) Trường hợp $1+\alpha+\beta=0$ và $\beta\neq 1$

Ta tìm nghiệm riêng của (2.3.28) có dạng $f^*(x)=cxh(x)$ thay vào(2.3.28) ta được

$$c(x+2a)h(x)-(1+\beta)c(x+a)h(x)+\beta cxh(x)\equiv h(x),$$

muốn vậy, ta cần có

$c(x+2a)-(1+\beta)c(x+a)+\beta cx=1\Leftrightarrow ac-ca\beta=1\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{a(1-\beta)}$.

Vậy $f^*(x)=\dfrac{xh(x)}{a(1-\beta)}$.

c) Trường hợp $1+\alpha+\beta=0$ và $\beta=1$

Phương trình (2.3.28) trở thành

$$f(x+2a)-2f(x+a)+f(x)=h(x). \tag{2.3.30}$$

Ta tìm nghiệm riêng của (2.3.30) có dạng $f^*(x) = cx^2h(x)$ thay vào (2.3.30) ta được

$$c(x+2a)^2h(x) - 2(x+a)^2h(x) + cx^2h(x) \equiv h(x),$$

muốn vậy, ta cần có
$c(x+2a)^2 - 2(x+a)^2 + cx^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2c = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2a^2}$.
Vậy $f^*(x) = \dfrac{x^2h(x)}{2a^2}$.
Kết luận
+ Nếu $1+\alpha+\beta \neq 0$ thì $f^*(x) = \dfrac{h(x)}{1+\alpha+\beta}$.
+ Nếu $1+\alpha+\beta = 0$ và $\beta \neq 1$ thì $f^*(x) = \dfrac{xh(x)}{a(1-\beta)}$.
+ Nếu $1+\alpha+\beta = 0$ và $\beta = 1$ thì $f^*(x) = \dfrac{x^2h(x)}{2a^2}$.

Bài toán 2.7. *Tìm nghiệm riêng của phương trình*

$$f(x+2a) + \alpha f(x+a) + \beta f(x) = h(x), \tag{2.3.31}$$

trong đó $a, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha \in \mathbb{R}$ và $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $|a|$) trên $D \subseteq \mathbb{R}$ cho trước, $f : D \to \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Trường hợp $1-\alpha+\beta \neq 0$
Tương tự cách giải bài toán 2.8(a) ta được

$$f^*(x) = \frac{h(x)}{1-\alpha+\beta},$$

trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.
b) Trường hợp $1-\alpha+\beta = 0$ và $\beta \neq 1$
Tương tự cách giải bài toán 2.8(b) ta được

$$f^*(x) = \frac{xh(x)}{a(1-\beta)},$$

trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.
c) Trường hợp $1-\alpha+\beta=0$ và $\beta=1$
Tương tự cách giải bài toán 2.8(c) ta được

$$f^*(x)=\frac{x^2h(x)}{2a^2},$$

trong đó $g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2|a|$ trên D.
Kết luận
+ Nếu $1-\alpha+\beta\neq 0$ thì $f^*(x)=\dfrac{h(x)}{1-\alpha+\beta}$.
+ Nếu $1-\alpha+\beta=0$ và $\beta\neq 1$ thì $f^*(x)=\dfrac{xh(x)}{a\,(1-\beta)}$.
+ Nếu $1-\alpha+\beta=0$ và $\beta=1$ thì $f^*(x)=\frac{x^2h(x)}{2a^2}$.

2.4. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 2.1. *Tìm tất cả các hàm $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned}
&a)\quad f(x+2)-8f(x+1)+15f(x)=16,\forall x\in\mathbb{R}\\
&b)\quad f(x-4)+3f(x-2)-4f(x)\ =9,\forall x\in\mathbb{R}\\
&c)\quad f(x+10)-2f(x+5)+f(x)\ =8,\forall x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Lời giải
a) + Bước 1: Ta tìm nghiệm $\widetilde{f}(x)$ của phương trình

$$f(x+2)-8f(x+1)+15f(x)=0.$$

Phương trình $\lambda^2-8\lambda+15=0$ có $\Delta=1>0$, hai nghiệm là $\lambda_1=5,\lambda_2=3$. Áp dụng công thức nghiệm trường hợp $\Delta>0$ của phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất ta được $\widetilde{f}(x)=\dfrac{1}{2}\left[5^xh_2(x)-3^xh_1(x)\right]$, trong đó $h_1(x),h_2(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
+ Bước 2: Vì $1+\alpha+\beta=8\neq 0$ nên ta có $f^*(x)=2$.
+ Bước 3: Vậy $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[5^xh_1(x)-3^xh_2(x)\right]+2$.
b)+ Bước 1: Ta tìm nghiệm $\widetilde{f}(x)$ của $f(x-4)+3f(x-2)-4f(x)=0$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ có $\Delta > 0$, hai nghiệm là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$. Áp dụng công thức nghiệm trường hợp $\Delta > 0$, $\lambda_1 > 0$ và $\lambda_2 < 0$ của bài toán 2.4 ta được

$$\widetilde{f}(x) = -\frac{1}{5}\left\{\left(4^{\frac{x}{a}}\left[k_1(x) - k_1(x-2)\right]\right) - h_2(x)\right\},$$

trong đó $k_1(x)$,$h_2(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ lần lượt là $4; 2$ trên $\mathbb{R}$.

+ Bước 2: Vì $1 + \alpha + \beta = 0$ và $\alpha = 3 \neq -2$ nên $f^*(x) = -\dfrac{9x}{10}$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

+ Bước 3: Vậy

$$f(x) = -\frac{1}{5}\left\{\left(4^{\frac{x}{a}}\left[k_1(x) - k_1(x-2)\right]\right) - h_2(x)\right\} - \frac{9x}{10}.$$

c) Bước 1: Ta tìm nghiệm $\widetilde{f}(x)$ của $f(x+10) - 2f(x+5) + f(x) = 0$.
Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có $\Delta = 0$ và $\alpha = -2$. Áp dụng công thức nghiệm trường hợp $\Delta = 0$ và $\alpha = -2$ của bài toán 2.4 ta được

$$\widetilde{f}(x) = h(x) + \frac{xg(x)}{5},$$

trong đó $h(x), g(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 5 trên $\mathbb{R}$.

+ Bước 2: Vì $1 + \alpha + \beta = 0$ và $\alpha = -2$ nên $\widetilde{f}(x) = \dfrac{4x^2}{25}$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

+ Bước 3: Vậy $f(x) = h(x) + \dfrac{xg(x)}{5} + \dfrac{4x^2}{25}$.

Ví dụ 2.2. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+2) - 6f(x+1) + 9f(x) = \sin(\pi x) + \cos(2\pi x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

+ Bước 1: Ta tìm nghiệm $\widetilde{f}(x)$ của

$$f(x+2) - 6f(x+1) + 9f(x) = 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ có $\Delta = 0$ nghiệm kép là $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ và $\alpha = -6$ nên áp dụng công thức nghiệm trường hợp $\Delta = 0$ và

$-2 \neq \alpha < 0$ của bài toán 2.4 ta được

$$\widetilde{f}(x) = 3^x \left[k_1(x) + \frac{xh(x)}{3}\right],$$

trong đó $k_1(x), h_1(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
+ Bước 2: Ta tìm nghiệm riêng $f_1^*(x)$ của phương trình

$$f(x+2) - 6f(x+1) + 9f(x) = \sin(\pi x).$$

Ta có $\sin\pi(x+1) = \sin(\pi x + \pi) = -\sin(\pi x)$ suy ra $h(x) = \sin(\pi x)$ là hàm phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác do $1 - \alpha + \beta = 16 \neq 0$ nên $f_1^*(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{16}$.
Ta tìm nghiệm riêng $f_2^*(x)$ của phương trình

$$f(x+2) - 6f(x+1) + 9f(x) = \cos(2\pi x).$$

Ta có $\cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x + 2\pi) = \cos(2\pi x)$
suy ra $g(x) = \cos(2\pi x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác, do $1 + \alpha + \beta = 4 \neq 0$ nên $f_2^*(x) = \dfrac{\cos(2\pi x)}{4}$.
Theo nhận xét ta có

$$f^*(x) = f_1^*(x) + f_2^*(x) = \frac{\sin(\pi x)}{16} + \frac{\cos(2\pi x)}{4}.$$

+ Bước 3: Vậy

$$f(x) = 3^x \left[k_1(x) + \frac{xh(x)}{3}\right] + \frac{\sin(\pi x)}{16} + \frac{\cos(2\pi x)}{4}.$$

Ví dụ 2.3. *Cho* $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Tìm tất cả các hàm* $f : D \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x-2) + f(x-1) + f(x) = tg(\pi x) + \operatorname{cotg}(\pi x), \forall x \in D.$$

Lời giải

+ Bước 1:Ta tìm nghiệm $\widetilde{f}(x)$ của phương trình $f(x-2)+f(x-1)+f(x) = 0$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ có $\Delta < 0$, hai nghiệm phức là $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ suy ra

$$r = |\lambda_0| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, q = \frac{\sqrt{3}}{2}, \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Áp dụng công thức nghiệm trường hợp $\Delta < 0$ của bài toán 2.4 ta được

$$\widetilde{f}(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[n(x)\cos\left(-\frac{2\pi x}{3}\right) + m(x)\sin\left(-\frac{2\pi x}{3}\right)\right],$$

trong đó $m(x), n(x)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
+ Bước 2: Ta tìm nghiệm riêng $f_1^*(x)$ của phương trình

$$f(x-2) + f(x-1) + f(x) = tg(\pi x).$$

Ta có $tg(\pi(x-1)) = tg(\pi x - \pi) = tg(\pi x)$ suy ra $h(x) = tg(\pi x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D
Mặt khác $1 + \alpha + \beta = 3 \neq 0$ nên $f_1^*(x) = \frac{tg(\pi x)}{3}$.
Tương tự ta tìm được $f_2^*(x) = \frac{cotg(\pi x)}{3}$.
Theo nhận xét ta có $f^*(x) = f_1^*(x) + f_2^*(x) = \frac{tg(\pi x) + cotg(\pi x)}{3}$.
+ Bước 3: Vậy

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[n(x)\cos\left(-\frac{2\pi x}{3}\right) + m(x)\sin\left(-\frac{2\pi x}{3}\right)\right] + \frac{tg(\pi x) + cotg(\pi x)}{3}.$$

Chương 3

Phương trình hàm dạng sai phân với dịch chuyển đồng dạng

Trong chương này ta giải các bài toán về phương trình hàm dạng sai phân bậc nhất và dạng sai phân bậc hai (thuần nhất và không thuần nhất) với dịch chuyển đồng dạng. Trong đó việc giải phương trình hàm dạng sai phân bậc hai được đưa về giải phương trình hàm dạng sai phân bậc nhất.

3.1. Phương trình hàm dạng sai phân bậc nhất với dịch chuyển đồng dạng

Bài toán 3.1. *Cho các số $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}, \beta \in \mathbb{R}^*$ và tập D thỏa mãn điều kiện: $D \subseteq \mathbb{R}^*, \forall x \in D \Rightarrow a^{\pm 1}x \in D$. Tìm các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(ax) + \beta f(x) = 0, \forall x \in D. \tag{3.1.1}$$

Lời giải

Đặt $f(x) = |x|^{\log_{|a|}|\beta|}\, h(x)$,

phương trình (3.1.1) trở thành

$$|\beta| h(ax) + \beta h(x) = 0, \forall x \in D.$$

Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $\beta < 0$ và $a > 0$ ta có

$$h(ax) = h(x) \Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} h_1(\log_a |x|) \text{ khi } x < 0, \\ h_2(\log_a x) \text{ khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

+ với $\beta < 0, a < 0$ ta có

$$\begin{aligned} h(ax) &= h(x) \\ &\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}\big[g(x) + g(ax)\big], \end{aligned}$$

trong đó

$$g(x) = \begin{cases} h_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) & \text{khi } x < 0, \\ h_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $h_3(t), h_4(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

+ Với $\beta > 0, a \neq 0$ ta được

$$\begin{aligned} h(ax) &= -h(x). \\ &\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}\big[g(x) - g(ax)\big]. \end{aligned}$$

$$g(x) = \begin{cases} h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) & \text{khi } x < 0 \\ h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

trong đó $h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

Vậy:

+ Nếu $\beta < 0$ và $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\log_a |\beta|} h_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ x^{\log_a |\beta|} h_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Nếu $\beta < 0$ và $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[h_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + h_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}ax)\Big] & \text{khi } x < 0,\\ \dfrac{1}{2}x^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[h_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}x) + h_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Nếu $\beta > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}\beta}\Big[h_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - h_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] & \text{khi } x < 0,\\ \dfrac{1}{2}x^{\log_{|a|}\beta}\Big[h_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}x) - h_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)] & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Trong đó $k_i(t), h_i(t), i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

Bài toán 3.2. *Cho $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,1\}, \beta \neq 0$ và $h(x)$ là một hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a trên $D \subseteq \mathbb{R}^*$. Xác định tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(ax) + \beta f(x) = h(x). \tag{3.1.2}$$

Lời giải

i) Với $\beta = -1$

Phương trình (3.1.2) trở thành

$$f(ax) - f(x) = h(x), \forall x \in D \tag{3.1.3}$$

Vì $h(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a nên

$$h(x) = \frac{\ln|ax|h(ax)}{\ln|a|} - \frac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|}$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|}$, phương trình (3.1.3) trở thành

$$g(ax) = g(x) \tag{3.1.4}$$

Ta có nghiệm của (3.1.4) là:

+Với $a > 0$ ta có

$$g(x) = \begin{cases} g_1(\log_a |x|) & \text{khi }]x < 0, \\ g_2(\log_a x) & \text{khi }]x > 0; \end{cases}$$

trong đó $g_1(t), g_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

+ Với $a < 0$ ta có

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} ax)\big] & \text{khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}\big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\big] & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $g_3(t), g_4(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

Vậy:

+ Nếu $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} g_1(\log_a |x|) + \dfrac{\ln x}{\ln a} h_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ g_2(\log_a x) + \dfrac{\ln x}{\ln a} h_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Nếu $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} A(x) & \text{khi } x < 0, \\ B(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$A(x) = \frac{1}{2}\Big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big] + \frac{\ln|x|}{\ln a} h(x).$$

$$B(x) = \frac{1}{2}\Big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] + \frac{\ln x}{\ln a} h(x).$$

Trong đó $g_i(t), h_i(t), i = \overline{1, 4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

ii) Với $\beta \neq -1$

Ta có nghiệm của (3.1.2) là:

Vì $h(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a nên

$$h(x) = \frac{h(ax)}{\beta + 1} + \beta \frac{h(x)}{\beta + 1}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{b+1}$ phương trình(3.1.2) trở thành

$$g(ax) = -bg(x), \tag{3.1.5}$$

Theo bài toán 3.1 ta có nghiệm của phương trình (3.1.5) là:

\+ Nếu $\beta < 0$ và $a > 0$ thì

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{\log_{|a|}|\beta|} g_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ x^{\log_{|a|}|\beta|} g_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $g_1(t), g_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

\+ Nếu $\beta < 0$ và $a < 0$ thì

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}|\beta|}\big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} ax)\big] & \text{khi } x < 0, \\ \frac{1}{2}x^{\log_{|a|}|\beta|}\big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\big] & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó $g_3(t), g_4(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

\+ Nếu $\beta > 0$ và $a \neq 0$ thì

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}\beta}\big[g_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - g_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\big] & \text{khi } x < 0, \\ \frac{1}{2}x^{\log_{|a|}\beta}\big[g_2(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) - g_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\big] & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

Vậy:

\+ Nếu $\beta < 0$ và $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{\beta + 1} + |x|^{\log_{|a|}|\beta|} g_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ \dfrac{h(x)}{\beta + 1} + x^{\log_a |\beta|} g_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

\+ Nếu $\beta < 0$ và $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} P(x) & \text{khi } x < 0, \\ Q(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$P(x) = \frac{h(x)}{(\beta+1)} + \frac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}ax)\Big];$$

$$Q(x) = \frac{h(x)}{\beta+1} + \frac{1}{2}x^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big].$$

+ Nếu $\beta > 0$ và $a \neq 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} K(x) & \text{khi } x < 0, \\ H(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$K(x) = \frac{h(x)}{(\beta+1)} + \frac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[g_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - g_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big];$$

$$H(x) = \frac{h(x)}{(\beta+1)} + \frac{1}{2}x^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[g_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - g_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big].$$

Trong đó $h_i(t), g_i(t), i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

Bài toán 3.3. *Cho $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,1\}, \beta \neq 0$ và $h(x)$ là một hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a trên $D \subseteq \mathbb{R}^*$. Xác định tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(ax) + \beta f(x) = h(x). \tag{3.1.6}$$

Lời giải

i) Với $\beta = -1$

Phương trình (3.1.6) trở thành

$$f(ax) - f(x) = h(x). \tag{3.1.7}$$

Vì $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a nên

$$h(x) = \frac{h(x)}{2} - \frac{h(ax)}{2}.$$

Đặt $g(x) = f(x) + \dfrac{h(x)}{2}$, phương trình (3.1.7) trở thành

$$g(ax) = g(x). \tag{3.1.8}$$

Ta có nghiệm của (3.1.8) là nghiệm của phương trình (3.1.4).

Vậy

+ Nếu $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} g_1(\log_a |x|) - \dfrac{h(x)}{2} \text{ khi } x < 0, \\ g_2(\log_a x) - \dfrac{h(x)}{2} \text{ khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Nếu $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} M(x) & \text{khi } x < 0, \\ N(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$M(x) = \frac{1}{2}\Big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big] - \frac{h(x)}{2};$$
$$N(x) = \frac{1}{2}\Big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - \frac{h(x)}{2}.$$

Trong đó $g_i(t), i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

ii) Với $\beta = 1$

Phương trình (3.1.6) trở thành

$$f(ax) + f(x) = h(x). \tag{3.1.9}$$

Vì $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a nên

$$h(x) = \frac{-\ln|x|h(ax)}{\ln|a|} - \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|};$$

Đặt $g(x) = f(x) + \dfrac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|}$, khi đó (3.1.9) trở thành

$$g(ax) = -g(x). \tag{3.1.10}$$

Ta có nghiệm của phương trình (3.1.10) là

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big[p_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - p_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] & \text{khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}\Big[p_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}x) - p_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

Vậy:

$$f(x) = \begin{cases} E(x) & \text{khi } x < 0. \\ F(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$E(x) = \frac{1}{2}\Big[p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{\ln|a|}h(x);$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\Big[p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{\ln|a|}h(x).$$

$p_1(t), p_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.

iii) Với $\beta \neq \pm 1$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.1.6).

Vì $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a nên

$$h(x) = \frac{h(ax)}{\beta - 1} + b\frac{h(x)}{\beta - 1}$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{\beta - 1}$, phương trình (3.1.6) trở thành

$$g(ax) = -\beta g(x), \tag{3.1.11}$$

Nghiệm của phương trình (3.1.11) là nghiệm của phương trình (3.1.5).

Vậy:

+ Nếu $\beta < 0$ và $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{(\beta - 1)} + |x|^{\log_{|a|}|\beta|} g_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ \dfrac{h(x)}{(\beta - 1)} + x^{\log_a |\beta|} g_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Nếu $\beta < 0$ và $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} C(x) & \text{khi } x < 0, \\ D(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$C(x) = \frac{h(x)}{\beta - 1} + \frac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big];$$

$$D(x) = \frac{h(x|)}{\beta - 1} + \frac{1}{2}x^{\log_{|a|}|\beta|}\Big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big].$$

+ Nếu $\beta > 0$ và $a \neq 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} R(x) & \text{khi } x < 0, \\ S(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$R(x) = \frac{h(x)}{\beta - 1} + \frac{1}{2}|x|^{\log_{|a|}b}\Big[g_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - g_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big];$$

$$S(x) = \frac{h(x)}{\beta - 1} + \frac{1}{2}x^{\log_{|a|}\beta}\Big[g_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - g_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big];$$

$h_i(t), g_i(t), i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

3.2. Phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất với dịch chuyển đồng dạng

Bài toán 3.4. *Cho $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, tập $D \subseteq \mathbb{R}^*$ sao cho $\forall x \in D \Rightarrow a^{\pm 1}x \in D$. Tìm tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = 0, \forall x \in D. \qquad (3.2.12)$$

(Phương trình (3.2.12) được gọi là phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất với dịch chuyển đồng dạng)

Lời giải

Xét phương trình

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0. \tag{3.2.13}$$

(phương trình (3.2.13) được gọi là phương trình đặc trưng của (3.2.12)), có $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$.

Ta xét các trường hợp sau:

a) Trường hợp $\triangle > 0$

Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực $\lambda_1 \neq \lambda_2$, không mất tính tổng quát giả sử $\lambda_1 > \lambda_2$,

áp dụng định lý Viete ta có $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \beta \end{cases}$,

thay vào (3.2.12) ta được

$$\begin{aligned} & f(a^2x) - (\lambda_1 + \lambda_2)f(ax) + \lambda_1\lambda_2 f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(a^2x) - \lambda_1 f(ax) - \lambda_2[f(ax) - \lambda_1 f(x)] = 0. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Đặt $g_1(x) = f(ax) - \lambda_1 f(x)$, phương trình (3.2.14) trở thành

$$g_1(ax) - \lambda_2 g_1(x) = 0.$$

Tương tự cách giải bài toán 3.1 ta được:

\+ Với $\lambda_2 > 0$ và $a > 0$ ta có

$$g_1(x) = \begin{cases} |x|^{log_{|a|}\lambda_2} h_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ x^{log_{|a|}\lambda_2} h_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(ax) - \lambda_1 f(x) = \begin{cases} |x|^{log_{|a|}\lambda_2} h_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ x^{log_a\lambda_2} h_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.15}$$

\+ Với $\lambda_2 > 0$ và $a < 0$ ta có

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{log_{|a|}\lambda_2}\left[h_3(\frac{1}{2}\log_a |x|) + h_3(\frac{1}{2}\log_a ax)\right] \text{ khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}x^{log_{|a|}\lambda_2}\left[h_4(\frac{1}{2}\log_a x) + h_4(\frac{1}{2}\log_a |ax|)\right] \text{ khi } x > 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(ax)-\lambda_1 f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{log_{|a|}\lambda_2}\left[h_3(\tfrac{1}{2}\log_a|x|) + h_3(\tfrac{1}{2}\log_a ax)\right] & \text{khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}x^{log_{|a|}\lambda_2}\left[h_4(\tfrac{1}{2}\log_a x) + h_4(\tfrac{1}{2}\log_a|ax|)\right] & \text{khi } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.16}$$

+Với $\lambda_2 < 0$ ta có

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{log_{|a|}|\lambda_2|}\left[h_1(\tfrac{1}{2}\log_a|x|) - h_1(\tfrac{1}{2}\log_a|ax|)\right] & \text{khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}x^{log_{|a|}|\lambda_2|}\left[h_2(\tfrac{1}{2}\log_a x) - h_2(\tfrac{1}{2}\log_a|ax|)\right] & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(ax)-\lambda_1 f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{log_{|a|}|\lambda_2|}\left[h_1(\tfrac{1}{2}\log_a|x|) - h_1(\tfrac{1}{2}\log_a|ax|)\right] \text{ khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}x^{log_{|a|}|\lambda_2|}\left[h_2(\tfrac{1}{2}\log_a x) - h_2(\tfrac{1}{2}\log_a|ax|)\right] \text{ khi } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.17}$$

Trong đó $h_1(t), h_2(t), h_3(t), h_4(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

Đổi vai trò λ_2 cho λ_1 và biến đổi tương tự ta được:

+ Với $\lambda_1 > 0$ và $a > 0$ ta có

$$f(ax) - \lambda_2 f(x) = \begin{cases} |x|^{log_a\lambda_1}k_1(\log_a|x|) \text{ khi } x < 0, \\ x^{log_a\lambda_1}k_2(\log_a x) \text{ khi } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

+ Với $\lambda_1 > 0$ và $a < 0$ ta có

$$f(ax)-\lambda_2 f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{log_{|a|}\lambda_1}\left[k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\right] \text{ khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}x^{log_{|a|}\lambda_1}\left[k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}x) + k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\right] \text{ khi } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.19}$$

+Với $\lambda_1 < 0$ ta có

$$f(ax)-\lambda_2 f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|^{log_{|a|}|\lambda_1|}\left[k_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - k_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\right] \text{ khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}x^{log_{|a|}|\lambda_1|}\left[k_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}x) - k_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\right] \text{ khi } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

Trong đó $k_i(t), i = \overline{1,4}$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 1 trên D.

+ Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ và $a > 0$ thì trừ (3.2.15) cho (3.2.18) ta được

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|x|^{\log_a \lambda_2} h_1(\log_a |x|) - |x|^{\log_a \lambda_1} k_1(\log_a |x|)\Big] \text{ khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|x|^{\log_a \lambda_2} h_2(\log_a x) - x^{\log_a \lambda_1} k_2(\log_a x)\Big] \text{ khi } x > 0. \end{cases}.$$

+ Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ và $a < 0$ thì trừ (3.2.16) cho (3.2.19) ta được

$$f(x) = \begin{cases} A_1(x) \text{ khi } x < 0, \\ A_2(x) \text{ khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$A_1(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big\{|x|^{\log_{|a|} \lambda_2}\Big[h_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |x|) + h_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big] - \\ - |x|^{\log_{|a|} \lambda_1}\Big[k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |x|) + k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big]\Big\};$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big\{x^{\log_{|a|} \lambda_2}\Big[h_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} x) + h_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big] - \\ - x^{\log_{|a|} \lambda_1}\Big[k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} x) + k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big]\Big\}.$$

+ Nếu $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ và $a \neq 0$ thì trừ (3.2.17) cho (3.2.20) ta được

$$f(x) = \begin{cases} B_1(x) \text{ khi } x < 0 \\ B_2(x) \text{ khi } x > 0 \end{cases}$$

trong đó

$$B_1(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big\{|x|^{\log_{|a|} |\lambda_2|}\Big[h_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |x|) - h_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big] - \\ - |x|^{\log_{|a|} |\lambda_1|}\Big[k_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |x|) - k_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big]\Big\}.$$

$$B_2(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big\{x^{\log_{|a|} |\lambda_2|}\Big[h_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} x) - h_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big] - \\ - x^{\log_{|a|} |\lambda_1|}\Big[k_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} x) - k_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big]\Big\}.$$

+ Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ và $a > 0$ thì trừ (3.2.17) cho (3.2.18) ta được

$$f(x) = \begin{cases} C_1(x) \text{ khi } x < 0 \\ C_2(x) \text{ khi } x > 0 \end{cases}$$

trong đó

$$C_1(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{\frac{1}{2}|x|^{\log_a |\lambda_2|}\left[h_1\left(\frac{1}{2}\log_a |x|\right) - h_1\left(\frac{1}{2}\log_a |ax|\right)\right] - \\ - |x|^{\log_a \lambda_1} k_1\left(log_a |x|\right)\right\}$$

$$C_2(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big\{\frac{1}{2}x^{\log_a|\lambda_2|}\Big[h_2(\tfrac{1}{2}\log_a x) - h_2(\tfrac{1}{2}\log_a ax)\Big] - x^{\log_a \lambda_1}k_2(\log_a x)\Big\}.$$

+ Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ và $a < 0$ thì trừ (3.2.17) cho (3.2.19) ta được

$$f(x) = \begin{cases} D_1(x) \text{ khi } x < 0, \\ D_2(x) \text{ khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$D_1(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big\{|x|^{\log_{|a|}|\lambda_2|}\Big[h_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - h_1(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big] - \\ - |x|^{\log_{|a|}\lambda_1}\Big[k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big]\Big\};$$

$$D_2(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\Big\{x^{\log_{|a|}|\lambda_2|}\Big[h_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} x) - h_2(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - \\ - x^{\log_{|a|}\lambda_1}\Big[k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|} x) + k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]\Big\}.$$

Trong đó $h_i(t), k_i(t) i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b) Trường hợp $\triangle = 0$

Phương trình đặc trưng có nghiệm kép

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha^2}{4},$$

khi đó phương trình (3.2.12) trở thành

$$\begin{aligned} & f(a^2x) + \alpha f(ax) + \frac{\alpha^2}{4}f(x) && = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(a^2x) + \frac{\alpha}{2}f(ax) && + \frac{\alpha}{2}\Big[f(ax) + \frac{\alpha}{2}f(x)\Big] = 0. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Đặt $g(x) = f(ax) + \dfrac{\alpha}{2}f(x)$, phương trình (3.2.21) trở thành

$$g(ax) + \frac{\alpha}{2}g(x) = 0. \quad (3.2.22)$$

Tương tự cách giải bài toán 3.1 ta có $g(x) = |x|^{\log_{|a|}\left|\frac{\alpha}{2}\right|}h(x)$,

trong đó

$$h(ax)=\begin{cases} h(x) \text{ nếu } \alpha<0,\\ -h(x) \text{ nếu } \alpha>0.\end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

b1) Trường hợp $\alpha=-2$

Bài toán quy về việc giải phương trình $f(ax)-f(x)=g(x)$,

trong đó $g(ax)=g(x), \forall x\in D$.

Tương tự cách giải bài toán 3.2 (i) ta được:

+ Nếu $a>0$ thì

$$f(x)=\begin{cases} g_1(\log_a|x|)+\dfrac{\ln x}{\ln a}h_1(\log_a|x|) \text{ khi } x<0,\\ g_2(\log_a x)+\dfrac{\ln x}{\ln a}h_2(\log_a x) \text{ khi } x>0.\end{cases}$$

+ Nếu $a<0$ thì

$$f(x)=\begin{cases} A(x) \quad \text{ khi } x<0,\\ B(x) \quad \text{ khi } x>0;\end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} A(x)=\frac{1}{2}\Big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|)+g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}ax)\Big]\\ +\frac{\ln|x|}{\ln a^2}\Big[h_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|)+h_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big];\\ B(x)=\frac{1}{2}\Big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}x+g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]\\ +\frac{\ln x}{\ln a^2}\Big[h_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}x)+h_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big].\end{aligned}$$

Trong đó $g_i(t), h_i(t), i=\overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b2) Trường hợp $\alpha=2$

Bài toán quy về việc giải phương trình

$$f(ax)+f(x)=g(x),$$

trong đó $g(ax) = -g(x), \forall x \in D$.

Tương tự cách giải bài toán 3.3 (ii) ta được

$$f(x) = \begin{cases} E(x) & \text{khi } x < 0. \\ F(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$E(x) = \frac{1}{2}\Big[p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{2\ln|a|}\Big[h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big];$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\Big[p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{2\ln|a|}\Big[h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big];$$

$p_1(t), p_2(t), h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b3) Trường hợp $-2 \neq \alpha < 0$

Bài toán quy về việc giải phương trình

$$f(ax) - \big(-\frac{\alpha}{2}\big)f(x) = |x|^{log_{|a|}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}h(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(ax)}{|x|^{log_{|a|}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}} - |a|^{log_{|a|}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}.\frac{f(x)}{|x|^{log_{|a|}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}} = h(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(ax)}{|ax|^{log_{|a|}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}} - \frac{f(x)}{|x|^{log_{|a|}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}} = \frac{h(x)}{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Đặt

$$I_1(x) = \frac{f(x)}{|x|^{log_{|a|}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}}; \quad \frac{h(x)}{-\frac{\alpha}{2}} = k(x),$$

khi đó ta có

$$I_1(ax) - I_1(x) = k(x), \tag{3.2.23}$$

trong đó $k(ax) = k(x), \forall x \in D$.

Tương tự cách giải bài toán 3.2 (i) ta được nghiệm của phương trình

(3.2.23) là:

+ Nếu $a > 0$ thì

$$I_1(x) = \begin{cases} g_1(\log_a |x|) + \dfrac{\ln |x|}{\ln a} k_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ g_2(\log_a x) + \dfrac{\ln |x|}{\ln a} k_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

do đó,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} \Big[g_1(\log_a |x|) - \dfrac{2\ln |x|}{\alpha \ln a} h_1(\log_a |x|) \Big] & \text{khi } x < 0, \\ |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} \Big[g_2(\log_a x) - \dfrac{2\ln x}{\alpha \ln a} h_2(\log_a x) \Big] & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Nếu $a < 0$ thì

$$I_1(x) = \begin{cases} A(x) & \text{khi } x < 0, \\ B(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} A(x) = \frac{1}{2} \Big[g_3(\frac{1}{2} \log_{|a|} |x|) + g_3(\frac{1}{2} \log_{|a|} ax) \Big] \\ + \frac{\ln |x|}{\ln a^2} \Big[k_3(\frac{1}{2} \log_{|a|} |x|) + h_k(\frac{1}{2} \log_{|a|} ax) \Big], \\ B(x) = \frac{1}{2} \Big[g_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} x + g_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] \\ + \frac{\ln x}{\ln a^2} \Big[k_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} x) + k_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big], \end{aligned}$$

do đó,

$$f(x) = \begin{cases} C(x) \text{ khi } x < 0, \\ D(x) \text{ khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} C(x) = \frac{1}{2} \Big[g_3(\frac{1}{2} \log_{|a|} |x|) + g_3(\frac{1}{2} \log_{|a|} ax) \Big] \\ + \frac{2\ln |x|}{\alpha \ln a^2} \Big[h_3(\frac{1}{2} \log_{|a|} |x|) + h_3(\frac{1}{2} \log_{|a|} ax) \Big], \\ D(x) = \frac{1}{2} \Big[g_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} x + g_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] \\ - \frac{2\ln x}{\alpha \ln a^2} \Big[h_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} x) + h_4(\frac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big]. \end{aligned}$$

Trong đó $g_i(t), h_i(t), i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b4) Trường hợp $2 \neq \alpha > 0$

Khi đó bài toán quy về việc giải phương trình

$$\begin{aligned}
&f(ax) + \frac{\alpha}{2} f(x) = |x|^{log_{|a|}\frac{\alpha}{2}} h(x)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(ax)}{|x|^{log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}} + |a|^{log_{|a|}\frac{\alpha}{2}} \frac{f(x)}{|x|^{log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}} = h(x)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(ax)}{|ax|^{log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}} + \frac{f(x)}{|x|^{log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}} = \frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Đặt

$$I_2(x) = \frac{f(x)}{|x|^{log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}};\ \frac{2h(x)}{\alpha} = k(x) \text{ suy ra } k(ax) = -k(x)$$

Ta có

$$I_2(x) + I_2(x) = k(x),$$

trong đó $k(ax) = -k(x), \forall x \in D$.

Tương tự cách giải bài toán 3.3 (ii) ta được

$$I_2(x) = \begin{cases} E(x) & \text{khi } x < 0,\\ F(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
E(x) = \frac{1}{2}\Big[p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]&\\
- \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{2\ln|a|}\Big[k_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - k_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]&,\\
F(x) = \frac{1}{2}\Big[p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]&\\
- \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{2\ln|a|}\Big[k_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - k_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]&;
\end{aligned}$$

do đó,

$$f(x) = \begin{cases} G(x) & \text{khi } x < 0,\\ H(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$G(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\Big\{\frac{1}{2}\Big[p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]$$
$$- \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{\alpha\ln|a|}\Big[h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]\Big\},$$
$$H(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\Big\{\frac{1}{2}\Big[p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]$$
$$- \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{\alpha\ln|a|}\Big[h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]\Big\};$$

$p_1(t), p_2(t), h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

c) Trường hợp $\triangle < 0$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp λ_1, λ_2, do đó ta đặt

$$\lambda_1 \ = \ p - iq; \ \lambda_2 \ = \ p + iq \ \Rightarrow \ |\lambda_0| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{p^2+q^2}$$
$$arg\lambda_2 = \varphi = \overline{arg\lambda_1};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}.$$

Biến đổi tương tự như trường hợp $\triangle > 0$ ta được

$$g_1(ax) = \lambda_2 g_1(x), \tag{3.2.24}$$

với $g_1(x) = f(ax) - \lambda_1 f(x)$ suy ra $g_1 :\ D \to \mathbb{C}$.

Ta có

$$g_1(ax) = \lambda_2 g_1(x) \Leftrightarrow \frac{g_1(ax)}{|x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e}} = |a|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e}\frac{g_1(x)}{|x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{g_1(ax)}{|ax|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e}} = \frac{g_1(x)}{|x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e}}. \tag{3.2.25}$$

Đặt

$$h_1(x) = \frac{g_1(x)}{|x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e}}, \tag{3.2.26}$$

khi đó phương trình (3.2.25) trở thành $h_1(ax) = h_1(x)$,

mặt khác tương tự ta có $g_2(ax) = \lambda_1 g_2(x)$,

trong đó $g_2(x) = f(ax) - \lambda_2 f(x)$ suy ra $g_2 :\ D \to \mathbb{C}$.

Biến đổi tương tự như g_1 ta có

$$h_2(x) = \frac{g_2(x)}{|x|^{\ln\lambda_1 log_{|a|}e}}, \tag{3.2.27}$$

với $h_2(ax) = h_2(x)$.

Từ (3.2.26) và (3.2.27) ta được

$$\begin{cases} g_1(x) = |x|^{\ln \lambda_2 log_{|a|} e} h_1(x), \\ g_2(x) = |x|^{\ln \lambda_1 log_{|a|} e} h_2(x). \end{cases}$$

Ta chứng minh $\overline{h_1(x)} = h_2(x)$.

Thật vậy, trước hết ta chứng minh $\overline{g_1(x)} = g_2(x)$.

Ta có $g_1(x) = f(ax) - \lambda_1 f(x)$.

Lấy x_0 bất kỳ $x_0 \in D$ ta được

$$\begin{aligned} \overline{g_1(x_0)} &= \overline{f(ax_0) - \lambda_1 f(x_0)} = f(ax_0) - \overline{\lambda_1} f(x_0) \\ &= f(ax_0) - \lambda_2 f(x_0) = g_2(x_0), \end{aligned}$$

Vì x_o bất kỳ, $x_o \in D$ nên $\forall x \in D$ ta có

$$\overline{g_1(x)} = g_2(x) \tag{3.2.28}$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\overline{|x|^{\ln \lambda_2 log_{|a|} e}} = |x|^{\ln \lambda_1 log_{|a|} e}$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} \overline{|x|^{\ln \lambda_2 log_{|a|} e}} &= \overline{e^{\ln |x|^{\ln \lambda_2 log_{|a|} e}}} = \overline{e^{\ln \lambda_2 \log_{|a|} e \ln |x|}} \\ &= \overline{e^{log_{|a|} e \ln |x| (\ln |\lambda_2| + iarg\lambda_2 + 2k\pi i)}} = |\lambda_2|^{\frac{\ln |x|}{\ln |a|}} \overline{e^{i\varphi \frac{\ln |x|}{\ln |a|}} e^{i2k\pi \frac{\ln |x|}{\ln |a|}}} \\ &= |\lambda_2|^{\frac{\ln |x|}{\ln |a|}} \overline{\Big(\cos \frac{\varphi \ln |x|}{\ln |a|} + i \sin \frac{\varphi \ln |x|}{\ln |a|}\Big)} \overline{\Big(\cos \frac{2k\pi \ln |x|}{\ln |a|} + i \sin \frac{2k\pi \ln |x|}{\ln |a|}\Big)} \\ &= |\lambda_2|^{\frac{\ln |x|}{\ln |a|}} \Big(\cos \frac{\varphi \ln |x|}{\ln |a|} - i \sin \frac{\varphi \ln |x|}{\ln |a|}\Big) \Big(\cos \frac{2k\pi \ln |x|}{\ln |a|} - i \sin \frac{2k\pi \ln |x|}{\ln |a|}\Big) \\ &= |\lambda_2|^{\frac{\ln |x|}{\ln |a|}} \Big(\cos \Big(\frac{-\varphi \ln |x|}{\ln |a|}\Big) + i \sin \Big(\frac{-\varphi \ln |x|}{\ln |a|}\Big)\Big) \Big(\cos \Big(\frac{-2k\pi \ln |x|}{\ln |a|}\Big) + \\ &\qquad + i \sin \Big(\frac{-2k\pi \ln |x|}{\ln |a|}\Big)\Big) \\ &= |\lambda_2|^{\frac{\ln |x|}{\ln |a|}} e^{-i\varphi \frac{\ln |x|}{\ln |a|}} e^{i2k' \frac{\ln |x|}{\ln |a|}} = |\lambda_1|^{\frac{\ln |x|}{\ln |a|}} e^{-i\varphi \frac{\ln |x|}{\ln |a|}} e^{i2k' \frac{\ln |x|}{\ln |a|}} \\ &= |x|^{\ln \lambda_1 log_{|a|} e}; \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

trong đó $arg\lambda_2 = \varphi$; $\arg\lambda_1 = -\varphi$; $-k = k'$.
Từ (3.2.28) và (3.2.29) ta suy ra $\overline{h_1(x)} = h_2(x)$.
Như vậy ta sẽ đặt $h_1(x) = m(x) + in(x)$ suy ra $h_2(x) = m(x) - in(x)$, trong đó $m(x), n(x)$ là các hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a trên D.
Trở lại bài toán ban đầu ta có

$$\begin{cases} f(ax) - \lambda_1 f(x) = |x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e} h_1(x), \\ f(ax) - \lambda_2 f(x) = |x|^{\ln\lambda_1 log_{|a|}e} h_2(x). \end{cases}$$

trừ tương ứng hai đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e} h_1(x) - |x|^{\ln\lambda_1 log_{|a|}e} h_2(x)\Big] \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e} h_1(x) - \overline{|x|^{\ln\lambda_2 log_{|a|}e}}.h_2(x)\Big]. \end{aligned}$$

Vì hàm $|x|^{\ln\lambda_1 log_{|a|}e}$ là hàm đa trị, nên ta sẽ chọn một nhánh liên tục bằng cách chọn $k = 0$, nên ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2iq}\Big[|\lambda_2|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}\Big(\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|} + i\sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}\Big)h_1(x) - \\ &\quad - |\lambda_2|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}\Big(\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|} - i\sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}\Big)h_2(x)\Big] \\ &= \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{2iq}\Big[\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}(h_1(x) - h_2(x)) + i\sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}(h_1(x) + h_2(x))\Big] \\ &= \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{2iq}\Big(2i\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}n(x) + 2i\sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}m(x)\Big) \\ &= \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}n(x) + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}m(x)\Big), \end{aligned}$$

trong đó $m(x), n(x)$ là các hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a trên D.
Vậy:
+ Nếu $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln|x|}{\ln a}}}{q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln a}n_1(\log_a|x|) + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln a}m_1(\log_a|x|)\Big) & \text{khi } x < 0, \\ \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln x}{\ln a}}}{q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln x}{\ln a}n_2(\log_a x) + \sin\frac{\varphi\ln x}{\ln a}m_2(\log_a x)\Big) & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+Nếu $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} A_1(x) & \text{khi } x < 0, \\ A_2(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$A_1 = \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{2q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}\big[n_3(\frac{1}{2}\log_|a||x|) + n_3(\frac{1}{2}\log_| a|ax)\big] + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}\big[m_3(\frac{1}{2}\log_| a||x|) + m_3(\frac{1}{2}\log_| a||ax|)\big];$$

$$A_2 = \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln x}{\ln|a|}}}{2q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln x}{\ln|a|}\big[n_4(\frac{1}{2}\log_| a|x) + n_4(\frac{1}{2}\log_| a||ax|)\big] + \sin\frac{\varphi\ln x}{\ln|a|}\big[m_4(\frac{1}{2}\log_| a|x) + m_4(\frac{1}{2}\log_| a||ax|)\big].$$

Trong đó $n_i(t), m_i(t)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

Kết luận

a) Trường hợp $\Delta > 0$

+ Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ và $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[|x|^{\log_a\lambda_2}h_1(\log_a|x|) - |x|^{\log_a\lambda_1}k_1(\log_a|x|)\Big] & \text{khi } x < 0, \\ \dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[|x|^{\log_a\lambda_2}h_2(\log_a x) - x^{\log_a\lambda_1}k_2(\log_a x)\Big] & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ và $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} A_1(x) & \text{khi } x < 0, \\ A_2(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$A_1(x) = \frac{1}{2(\lambda_2-\lambda_1)}\Big\{|x|^{\log_{|a|}\lambda_2}\Big[h_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + h_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - |x|^{\log_{|a|}\lambda_1}\Big[k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + k_3(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}ax)\Big]\Big\},$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2(\lambda_2-\lambda_1)}\Big\{x^{\log_{|a|}\lambda_2}\Big[h_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}x) + h_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] - x^{\log_{|a|}\lambda_1}\Big[k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}x) + k_4(\tfrac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]\Big\}$$

+ Nếu $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ và $a \neq 0$ thì. $f(x) = \begin{cases} B_1(x) & \text{khi } x < 0, \\ B_2(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$

trong đó

$$B_1(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \Big\{ |x|^{\log_{|a|} |\lambda_2|} \Big[h_1(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |x|) - h_1(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] - \\ - |x|^{\log_{|a|} |\lambda_1|} \Big[k_1(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |x|) - k_1(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] \Big\},$$

$$B_2(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \Big\{ x^{\log_{|a|} |\lambda_2|} \Big[h_2(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} x) - h_2(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] - \\ - x^{\log_{|a|} |\lambda_1|} \Big[k_2(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} x) - k_2(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] \Big\}.$$

- Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ và $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} C_1(x) & \text{khi } x < 0, \\ C_2(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$C_1(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \Big\{ \frac{1}{2} x|^{\log_a |\lambda_2|} \Big[h_1(\frac{1}{2} \log_a |x|) - h_1(\frac{1}{2} \log_a |ax|) \Big] \\ - |x|^{\log_a \lambda_1} k_1(\log_a |x|) \Big\},$$

$$C_2(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \Big\{ \frac{1}{2} x^{\log_a |\lambda_2|} \Big[h_2(\tfrac{1}{2} \log_a x) - h_2(\tfrac{1}{2} \log_a ax) \Big] - x^{\log_a \lambda_1} k_2(\log_a x) \Big\}.$$

+Nếu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ và $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} D_1(x) & \text{khi } x < 0 \\ D_2(x) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

trong đó

$$D_1(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \Big\{ |x|^{\log_{|a|} |\lambda_2|} \Big[h_1(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |x|) - h_1(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} ax) \Big] - \\ - |x|^{\log_{|a|} \lambda_1} \Big[k_3(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |x|) + k_3(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} ax) \Big] \Big\},$$

$$D_2(x) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \Big\{ x^{\log_{|a|} |\lambda_2|} \Big[h_2(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} x) - h_2(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] - \\ - x^{\log_{|a|} \lambda_1} \Big[k_4(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} x) + k_4(\tfrac{1}{2} \log_{|a|} |ax|) \Big] \Big\}.$$

Trong đó $h_i(t), k_i(t) i = \overline{1, 4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b) Trường hợp $\Delta = 0$

b1) Trường hợp $\alpha = -2$

+Nếu $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} g_1(\log_a |x|) + \dfrac{\ln |x|}{\ln a} h_1(\log_a |x|) & \text{khi } x < 0, \\ g_2(\log_a x) + \dfrac{\ln x}{\ln a} h_2(\log_a x) & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Nếu $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} A(x) & \text{khi } x < 0, \\ B(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}\Big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} |x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big] \\ &\quad + \frac{\ln |x|}{\ln a^2}\Big[h_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} |x|) + h_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big] \\ B(x) &= \frac{1}{2}\Big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big] \\ &\quad + \frac{\ln x}{\ln a^2}\Big[h_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) + h_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big]. \end{aligned}$$

Trong đó $g_i(t), h_i(t), i = \overline{1, 4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b2) Trường hợp $\alpha = 2$

$$f(x) = \begin{cases} E(x) & \text{khi } x < 0, \\ F(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2}\Big[p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|} |x|) - p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big] \\ &\quad - \frac{\ln |\frac{x}{a}|}{2\ln |a|}\Big[h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|} |x|) - h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big]; \\ F(x) &= \frac{1}{2}\Big[p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) - p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big] \\ &\quad - \frac{\ln |\frac{x}{a}|}{2\ln |a|}\Big[h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) - h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|} |ax|)\Big]; \end{aligned}$$

$p_1(t), p_2(t), h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b3) Trường hợp $-2 \neq \alpha < 0$

+Nếu $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}\Big[g_1(\log_a |x|) - \dfrac{2\ln|x|}{\alpha \ln a} h_1(\log_a |x|)\Big] & \text{khi } x < 0, \\ |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}\Big[g_2(\log_a x) - \dfrac{2\ln x}{\alpha \ln a} h_2(\log_a x)\Big] & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+Nếu $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} C(x) & \text{khi } x < 0, \\ D(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2}\Big[g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + g_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] \\ &\quad + \frac{2\ln|x|}{\alpha \ln a^2}\Big[h_3(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) + h_3(\frac{1}{2}\log_{|a|} ax)\Big], \\ D(x) &= \frac{1}{2}\Big[g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x + g_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] \\ &\quad - \frac{2\ln x}{\alpha \ln a^2}\Big[h_4(\frac{1}{2}\log_{|a|} x) + h_4(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]. \end{aligned}$$

Trong đó $g_i(t), h_i(t), i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

b4) Trường hợp $2 \neq \alpha > 0$

$$f(x) = \begin{cases} G(x) & \text{khi } x < 0, \\ H(x) & \text{khi } x > 0; \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} G(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}} \Bigg\{ &\frac{1}{2}\Big[p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - p_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big] \\ &- \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{\alpha \ln|a|}\Big[h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|x|) - h_1(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$H(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\Big\{\frac{1}{2}\Big[p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - p_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]$$
$$- \frac{\ln|\frac{x}{a}|}{\alpha\ln|a|}\Big[h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}x) - h_2(\frac{1}{2}\log_{|a|}|ax|)\Big]\Big\};$$

$p_1(t), p_2(t), h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

c)Trường hợp $\Delta < 0$

+ Nếu $a > 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln|x|}{\ln a}}}{q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln a}n_1(\log_a|x|) + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln a}m_1(\log_a|x|)\Big) & \text{khi } x < 0,\\ \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln x}{\ln a}}}{q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln x}{\ln a}n_2(\log_a x) + \sin\frac{\varphi\ln x}{\ln a}m_2(\log_a x)\Big) & \text{khi } x > 0.\end{cases}$$

+ Nếu $a < 0$ thì

$$f(x) = \begin{cases} A_1(x) & \text{khi } x < 0,\\ A_2(x) & \text{khi } x > 0;\end{cases}$$

trong đó

$$A_1 = \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{2q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}\big[n_3(\frac{1}{2}\log_| a||x|) + n_3(\frac{1}{2}\log_| a|ax)\big]$$
$$+ \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}\big[m_3(\frac{1}{2}\log_| a||x|) + m_3(\frac{1}{2}\log_| a|ax)\big],$$

$$A_2 = \frac{|\lambda_0|^{\frac{\ln x}{\ln|a|}}}{2q}\Big(\cos\frac{\varphi\ln x}{\ln|a|}\big[n_4(\frac{1}{2}\log_| a|x) + n_4(\frac{1}{2}\log_| a||ax|)\big]$$
$$+ \sin\frac{\varphi\ln x}{\ln|a|}\big[m_4(\frac{1}{2}\log_| a|x) + m_4(\frac{1}{2}\log_| a||ax|)\big].$$

Trong đó $m_i(t), n_i(t), i = \overline{1,4}$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên D.

$$\lambda_1 \;=\; p - iq\lambda_2 \;=\; p + iq \;\Rightarrow\; |\lambda_0| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{p^2+q^2}$$
$$arg\lambda_2 = \varphi = \overline{arg\lambda_1};\; \operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p};\; \overline{arg\lambda_2} = -\varphi.$$

3.3. Phương trình hàm dạng sai phân bậc hai không thuần nhất với dịch chuyển đồng dạng

3.3.1. Bài toán.

Cho $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, tập D thỏa mãn điều kiện $D \subseteq \mathbb{R}^*, \forall x \in D \Rightarrow a^{\pm 1}x \in D$ và hàm $g(x)$ xác định trên D. Tìm tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = g(x), \forall x \in D \qquad (3.3.30)$$

3.3.2. Nhận xét

a) Nghiệm của phương trình (3.3.30) là $f(x) = \widetilde{f}(x) + f^*(x)$, trong đó $\widetilde{f}(x)$ là nghiệm của phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất với dịch chuyển đồng dạng,$f^*(x)$ là một nghiệm nào đó (còn gọi là nghiệm riêng) của phương trình (3.3.30).
b) Nếu với mỗi $i = \overline{1, n}$ $\quad f_i^*(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = g_i(x)$$

thì $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^*(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$$

Từ nhận xét trên ta rút ra phương pháp giải phương trình (3.3.30) như sau:
Bước 1: Tìm $\widetilde{f}(x)$.
Bước 2: Tìm $f^*(x)$.
Bước 3: Nghiệm của phương trình (3.3.30) là $f(x) = \widetilde{f}(x) + f^*(x)$.

3.3.3. Một số bài toán và phương pháp tìm nghiệm riêng

Bài toán 3.5. *Tìm nghiệm riêng của phương trình*

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = b, \tag{3.3.31}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}, \beta \in \mathbb{R}^*, b, \alpha \in \mathbb{R}, b \neq 0$, *tập* D *thỏa mãn:* $D \subseteq \mathbb{R}^*, \forall x \in D \Rightarrow a^{\pm 1}x \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Với $1 + \alpha + \beta \neq 0$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (3.3.31) có dạng $f^*(x) = c$, thay vào (3.3.31) ta được

$$\begin{aligned} c + \alpha c + \beta c = b &\Leftrightarrow c(1 + \alpha + \beta) = b \\ &\Leftrightarrow c = \frac{b}{1 + \alpha + \beta}, \end{aligned}$$

do đó $f^*(x) = \dfrac{b}{1 + \alpha + \beta}$.

b) Với $1 + \alpha + \beta = 0$ và $\alpha \neq -2$

Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình (3.3.31) có dạng

$$f^*(x) = c \ln |x|,$$

thay vào (3.3.31) ta được

$$\begin{aligned} & c \ln \left|a^2x\right| + \alpha c \ln |ax| + \beta c \ln |x| = b \\ & \Leftrightarrow 2c \ln |a| + c \ln |x| + \alpha c \ln |a| + \alpha c \ln |x| + \beta c \ln |x| = b \\ & \Leftrightarrow c = \tfrac{b}{(\alpha+2)\ln|a|}. \end{aligned}$$

Do đó

$$f^*(x) = \frac{b \ln |x|}{(\alpha + 2) \ln |a|} = \frac{b}{\alpha + 2} \log_{|a|} x.$$

c) Với $1 + \alpha + \beta = 0$ và $\alpha = -2$

Phương trình (3.3.31) trở thành

$$f(a^2x) - 2f(ax) + f(x) = b, \tag{3.3.32}$$

ta tìm một nghiệm riêng của (3.3.32) có dạng $f^*(x) = c(\ln|x|)^2$. Thay vào 3.3.32) ta được

$$\begin{aligned}
&c\left(\ln\left|a^2x\right|\right)^2 + \alpha c(\ln|ax|)^2 + \beta c(\ln|x|)^2 = b\\
&\Leftrightarrow c(2\ln|a| + c\ln|x|)^2 + 2c(\ln|a| + \ln|x|)^2 + c(\ln|x|)^2 = b\\
&\Leftrightarrow c = \tfrac{b}{2(\ln|a|)^2}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$f^*(x) = \frac{b(\ln|x|)^2}{2(\ln|a|)^2} = \frac{b}{2}\left(\log_{|a|}|x|\right)^2.$$

Kết luận

\+ Nếu $1+\alpha+\beta \neq 0$ thì

$$f^*(x) = \frac{b}{1+\alpha+\beta}.$$

\+ Nếu $1+\alpha+\beta = 0$ và $\alpha \neq -2$ thì

$$f^*(x) = \frac{b}{\alpha+2}\log_{|a|}|x|.$$

\+ Nếu $1+\alpha+\beta = 0$ và $\alpha = -2$ thì

$$f^*(x) = \frac{b}{2}\left(\log_{|a|}|x|\right)^2.$$

Bài toán 3.6. *Tìm nghiệm riêng của phương trình*

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = h(x), \tag{3.3.33}$$

trong đó $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha \in \mathbb{R}$ *và* $h(x)$ *là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ* a *trên* $D \subseteq \mathbb{R}^*$, $f : D \to \mathbb{R}$.

Lời giải

i) Trường hợp $1+\alpha+\beta \neq 0$

Ta tìm nghiệm riêng của (3.3.33) có dạng $f^*(x) = ch(x)$, thay vào (3.3.33)ta được

$$ch(x) + \alpha ch(x) + \beta ch(x) \equiv h(x) \Leftrightarrow ch(x)(1+\alpha+\beta) \equiv h(x) \tag{3.3.34}$$

Chọn $c = \dfrac{1}{1+\alpha+\beta}$ thì (3.3.33)thỏa mãn.
Vậy $f^*(x) = \dfrac{h(x)}{1+\alpha+\beta}$.
ii) Trường hợp $1+\alpha+\beta = 0$ và $\beta \neq 1$
Ta tìm nghiệm riêng của (3.3.32) có dạng $f^*(x) = c\ln|x|h(x)$
thay vào(3.3.32) ta được

$$c\ln|a^2x|h(x) - (1+\beta)c\ln|ax|h(x) + \beta c\ln|x|h(x) \equiv h(x).$$

muốn vậy, ta cần có

$$c\ln|a^2x| - (1+\beta)c\ln|ax| + \beta c\ln|x| = 1 \Leftrightarrow \ln|a|c - \ln|a|c\beta = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{\ln|a|(1-\beta)}.$$

Vậy $f^*(x) = \dfrac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|(1-\beta)} = \dfrac{h(x)}{1-\beta}\log_{|a|}|x|$.
iii) Trường hợp $1+\alpha+\beta = 0$ và $\beta = 1$
Phương trình (3.3.32) trở thành

$$f(a^2x) - 2f(ax) + f(x) = h(x). \tag{3.3.35}$$

Ta tìm nghiệm riêng của (3.3.34) có dạng $f^*(x) = c(\ln|x|)^2h(x)$ thay vào (3.3.34) ta được

$$c(\ln|a^2x|)^2h(x) - 2c(\ln|ax|)^2h(x) + c(\ln|x|)^2h(x) \equiv h(x)$$

muốn vậy, ta cần có
$c(\ln|a^2x|)^2 - 2c(\ln|ax|)^2 + c(\ln|x|)^2 = 1 \Leftrightarrow 2(\ln|a|)^2c = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2(\ln|a|)^2}$.
Vậy $f^*(x) = \dfrac{(\ln|x|)^2h(x)}{2(\ln|a|)^2} = \dfrac{h(x)}{2}(\log_{|a|}|x|)^2$.
Kết luận
+ Nếu $1+\alpha+\beta \neq 0$ thì $f^*(x) = \dfrac{h(x)}{1+\alpha+\beta}$.
+ Nếu $1+\alpha+\beta = 0$ và $\beta \neq 1$ thì $f^*(x) = \dfrac{h(x)}{1-\beta}\log_{|a|}|x|$.

+ Nếu $1+\alpha+\beta=0$ và $\beta=1$ thì $f^*(x)=\dfrac{h(x)}{2}(\log_{|a|}|x|)^2$.

Bài toán 3.7. *Tìm nghiệm riêng của phương trình*

$$f(a^2x)+\alpha f(ax)+\beta f(x)=h(x), \tag{3.3.36}$$

trong đó $a\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,1\}, \beta\in\mathbb{R}^*, \alpha\in\mathbb{R}$ *và* $h(x)$ *là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ* a *trên* $D\subseteq\mathbb{R}^*$, $f:D\to\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Trường hợp $1-\alpha+\beta\neq 0$

Tương tự cách giải bài toán 3.6 (i) ta được

$$f^*(x)=\frac{h(x)}{1-\alpha+\beta},$$

b) Trường hợp $1-\alpha+\beta=0$ và $\beta\neq 1$

Tương tự cách giải bài toán 3.6 (ii) ta được

$$f^*(x)=\frac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|(1-\beta)}=\frac{h(x)}{1-\beta}\log_{|a|}|x|$$

c) Trường hợp $1-\alpha+\beta=0$ và $\beta=1$

Tương tự cách giải bài toán 3.9 (iii) ta được

$$f^*(x)=\frac{(\ln|x|)^2h(x)}{2(\ln|a|)^2}=\frac{h(x)}{2}\left(\log_{|a|}|x|\right)^2$$

Kết luận

+ Nếu $1-\alpha+\beta\neq 0$ thì

$$f^*(x)=\frac{h(x)}{1-\alpha+\beta}$$

+ Nếu $1-\alpha+\beta=0$ và $\beta\neq 1$ thì

$$f^*(x)=\frac{h(x)}{1-\beta}\log_{|a|}|x|$$

+ Nếu $1-\alpha+\beta=0$ và $\beta=1$ thì

$$f^*(x)=\frac{h(x)}{2}\left(\log_{|a|}|x|\right)^2$$

3.4. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 3.1. *Tìm tất cả các hàm* $f:\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned}
&a) f(4x) - 8f(2x) + 15f(x) &&= 16, \forall x \in \mathbb{R}^*\\
&b) f(9x) - 10f(-3x) + 9f(x) &&= 7, \forall x \in \mathbb{R}^*\\
&c) f(5x) - 2f(\sqrt{5}x) + f(x) &&= 8, \forall x \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Lời giải

a) + Bước 1: Phương trình $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$ có $\Delta = 1 > 0$,
hai nghiệm là $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$.
Áp dụng công thức nghiệm trường hợp $\Delta > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ và $a = 2 > 0$ của bài toán 3.4 ta được

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[|x|^{\log_2 5}k_1(\log_2|x|) - |x|^{\log_2 3}h_1(\log_2|x|)\right] & \text{khi } x < 0,\\ \dfrac{1}{2}\left[x^{\log_2 5}k_2(\log_2 x) - x^{\log_2 3}h_2(\log_2 x)\right] & \text{khi } x > 0;\end{cases}$$

$g_1(t), g_2(t), h_1(t), h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
+ Bước 2: Vì $1 + \alpha + \beta = 8 \neq 0$ nên $f^*(x) = 2$.
+ Bước 3: Vậy

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[|x|^{\log_2 5}k_1(\log_2|x|) - |x|^{\log_2 3}h_1(\log_2|x|)\right] + 2 & \text{khi } x < 0,\\ \dfrac{1}{2}\left[x^{\log_2 5}k_2(\log_2 x) - x^{\log_2 3}h_2(\log_2 x)\right] + 2 & \text{khi } x > 0;\end{cases}$$

$g_1(t), g_2(t), h_1(t),\ h_2(t)$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.
b) + Bước 1: Ta tìm $\widetilde{f}(x)$ của phương trình

$$f(9x) - 10f(-3x) + 9f(x) = 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$ có $\Delta > 0$, hai nghiệm là $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$. Áp dụng công thức nghiệm trường hợp $\Delta > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ và $a = -3 < 0$ của bài toán 3.4 ta được

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} A_1(x), & \text{khi } x < 0,\\ A_2(x), & \text{khi } x > 0;\end{cases}$$

trong đó

$$A_1(x) = \frac{1}{16}\left\{|x|^3\left[k_3\left(\frac{1}{2}\log_3|x|\right) + k_3\left(\frac{1}{2}\log_3|3x|\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \left[h_3\left(\frac{1}{2}\log_3|x|\right) + h_3\left(\frac{1}{2}\log_3|3x|\right)\right]\right\},$$
$$A_2(x) = \frac{1}{16}\left\{|x|^3\left[k_4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right) + k_4\left(\frac{1}{2}\log_3 3x\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \left[h_4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right) + h_4\left(\frac{1}{2}\log_3 3x\right)\right]\right\};$$

$h_i(t), k_i(t), i = 3, 4$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.

+ Bước 2: Vì $1 + \alpha + \beta = 0$ và $\alpha = -10 \neq -2$ nên

$$f^*(x) = -\frac{7}{8}\log_3|x|$$

+ Bước 3: Vậy

$$f(x) = \begin{cases} A_1(x) - \frac{7}{8}\log_3|x|, & \text{khi } x < 0 \\ A_2(x) - \frac{7}{8}\log_3 x, & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

c) + Bước 1: Ta tìm $\widetilde{f}(x)$ của phương trình

$$f(5x) - 2f(\sqrt{5}x) + f(x) = 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, có $\Delta = 0$ hai nghiệm kép là $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Áp dụng công thức nghiệm trong trường hợp $\Delta = 0$, $\alpha = -2$ và $a = \sqrt{(5)} > 0$ của bài toán 3.4 ta có

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} g_1\left(\log_{\sqrt{5}}|x|\right) + \dfrac{\ln|x|}{\ln\sqrt{5}}h_1\left(\log_{\sqrt{5}}|x|\right), & \text{khi } x < 0 \\ g_2\left(\log_{\sqrt{5}} x\right) + \dfrac{\ln|x|}{\ln\sqrt{5}}h_2\left(\log_{\sqrt{5}} x\right), & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

+ Bước 2: Vì $1 + \alpha + \beta = 0$ và $\alpha = -2$ nên

$$f^*(x) = 4\left(\log_{\sqrt{5}}|x|\right)^2.$$

+ Bước 3: Vậy

$$f(x)=\begin{cases} g_1\left(\log_{\sqrt{5}}|x|\right)+\dfrac{\ln|x|}{\ln\sqrt{5}}h_1\left(\log_{\sqrt{5}}|x|\right)+4\left(\log_{\sqrt{5}}|x|\right)^2, & \text{khi } x<0\\ g_2\left(\log_{\sqrt{5}}x\right)+\dfrac{\ln|x|}{\ln\sqrt{5}}h_2\left(\log_{\sqrt{5}}x\right)+4\left(\log_{\sqrt{5}}|x|\right)^2, & \text{khi } x>0\end{cases}$$

Ví dụ 3.2. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}^*\to R$ sao cho*

$$f(9x)+2f(3x)+f(x)=\sin(\pi\log_3|x|)-cos(2\pi\log_3|x|)$$

Lời giải

+ Bước 1: Ta tìm $\widetilde{f}(x)$ là nghiệm của phương trình

$$f(9x)+2f(3x)+f(x)=0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2+2\lambda+1=0$, có $\Delta=0$ hai nghiệm kép là $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Áp dụng công thức nghiệm trong trường hợp $\Delta=0$, $\alpha=2$ và $a=3>0$ của bài toán 3.4 ta có

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} E(x), & \text{khi } x<0\\ F(x), & \text{khi } x>0,\end{cases}$$

trong đó

$$\begin{aligned} E(x)=&\frac{1}{2}\left[p_1\left(\frac{1}{2}\log_3|x|\right)-p_1\left(\frac{1}{2}\log_3|3x|\right)\right]-\\ &-\frac{\ln\frac{|x|}{3}}{2\ln 3}\left[h_1\left(\frac{1}{2}\log_3|x|\right)-h_1\left(\frac{1}{2}\log_3|3x|\right)\right],\\ F(x)=&\frac{1}{2}\left[p_2\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)-p_2\left(\frac{1}{2}\log_3 3x\right)\right]-\\ &-\frac{\ln\frac{|x|}{3}}{2\ln 3}\left[h_2\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)-h_2\left(\frac{1}{2}\log_3 3x\right)\right];\end{aligned}$$

$p_i(t), h_i(t), i=1,2$ là các hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$.

+ Bước 2: Ta tìm nghiệm riêng $f_1^*(x)$ của phương trình

$$f(9x)+2f(3x)+f(x)=\sin(\pi\log_3|x|).$$

Ta có

$$\sin(\pi \log_3 3\,|x|) = \sin\left(\pi \log_3 |x| + \pi\right) = -\sin(\pi \log_3 |x|),$$

suy ra $h(x) = \sin(\pi \log_3 |x|)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ 3 trên $\mathbb{R}^*$, mặt khác do $1 - \alpha + \beta = 0$ và $\beta = 1$ nên

$$f_1^*(x) = \frac{\sin(\pi \log_3 |x|)}{2} \left(\log_3 |x|\right)^2.$$

Ta tìm nghiệm riêng $f_2^*(x)$ của phương trình

$$f(9x) + 2f(3x) + f(x) = -cos(2\pi \log_3 |x|).$$

Ta có

$$-cos(2\pi \log_3 3\,|x|) = -cos(2\pi \log_3 |x| + 2\pi) = -cos(2\pi \log_3 |x|),$$

suy ra $g(x) = -cos(2\pi \log_3 |x|)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 3 trên $\mathbb{R}^*$, mặt khác $1 + \alpha + \beta = 4 \neq 0$ nên

$$f_2^*(x) = \frac{-cos(2\pi \log_3 |x|)}{4}.$$

+ Bước 3: Vậy

$$f(x) = \begin{cases} E(x) + \dfrac{\sin(\pi \log_3 |x|)}{2} \left(\log_3 |x|\right)^2 - \dfrac{cos(2\pi \log_3 |x|)}{4}, & \text{khi } x < 0 \\ F(x) + \dfrac{\sin(\pi \log_3 x)}{2} \left(\log_3 |x|\right)^2 - \dfrac{cos(2\pi \log_3 x)}{4}, & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3.3. *Cho $D = \mathbb{R}^* \backslash \{\pm(\sqrt{7})^k | k \in \mathbb{Z}\}$. Tìm tất cả các hàm $f : D \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(49x) - 2\sqrt{3}f(7x) + 4f(x) = tg\left(\pi \log_7 |x|\right) + cotg\left(\pi \log_7 |x|\right), \forall x \in D.$$

Lời giải

+ Bước 1: Ta tìm $\widetilde{f}(x)$ là nghiệm của phương trình

$$f(49x) - 2\sqrt{3}f(7x) + 4f(x) = 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 2\sqrt(3)\lambda + 4 = 0$, có $\Delta < 0$ hai nghiệm phức là

$$\lambda_1 = \sqrt{3} - i, \lambda_2 = \sqrt{3} + i \Rightarrow |\lambda_0| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 2, q = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Áp dụng công thức nghiệm trong trường hợp $\Delta < 0$ và $a = 7 > 0$ của bài toán 3.4 ta có

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{\ln|x|}{\ln 7}} P(x), & \text{khi } x < 0 \\ 2^{\frac{\ln|x|}{\ln 7}} Q(x), & \text{khi } x > 0, \end{cases}$$

trong đó

$$P(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi \ln|x|}{6\ln 7}\right) n_1(\log_7 |x|) + \sin\left(\frac{\pi \ln|x|}{6\ln 7}\right) m_1(\log_7 |x|)\right],$$

$$Q(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi \ln x}{6\ln 7}\right) n_2(\log_7 x) + \sin\left(\frac{\pi \ln x}{6\ln 7}\right) m_2(\log_7 x)\right];$$

$n_i(t), m_i(t), i = 1, 2$ là các hàm hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

+ Bước 2: Ta tìm nghiệm riêng $f_1^*(x)$ của phương trình

$$f(49x) - 2\sqrt{3}f(7x) + 4f(x) = tg(\pi \log_7 |x|).$$

Ta có

$$tg(\pi \log_7 7|x|) = tg(\pi \log_7 |x| + \pi) = tg(\pi \log_7 |x|),$$

suy ra $h(x) = tg(\pi \log_7 |x|)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 7 trên D, mặt khác $1 + \alpha + \beta = 5 - 2\sqrt(3) \neq 0$ nên $f_1^*(x) = \dfrac{tg(\pi \log_7 |x|)}{5 - 2\sqrt{3}}$.

Tương tự ta có $f_2^*(x) = \dfrac{cotg(\pi \log_7 |x|)}{5 - 2\sqrt{3}}$.

+ Bước 3: Vậy

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{\ln|x|}{\ln 7}} P(x) + \dfrac{tg(\pi \log_7 |x|) + cotg(\pi \log_7 |x|)}{5 - 2\sqrt{3}}, & \text{khi } x < 0 \\ 2^{\frac{\ln|x|}{\ln 7}} Q(x) + \dfrac{tg(\pi \log_7 |x|) + cotg(\pi \log_7 |x|)}{5 - 2\sqrt{3}}, & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

trong đó

$$P(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi \ln|x|}{6\ln 7}\right) n_1(\log_7 |x|) + \sin\left(\frac{\pi \ln|x|}{6\ln 7}\right) m_1(\log_7 |x|)\right],$$

$$Q(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi \ln x}{6 \ln 7}\right) n_2\left(\log_7 x\right) + \sin\left(\frac{\pi \ln x}{6 \ln 7}\right) m_2\left(\log_7 x\right)\right].$$

Kết luận

Phương trình hàm dạng sai phân là sự mở rộng của phương trình sai phân tuyến tính. Tuy nhiên, về kỹ thuật biến đổi hoàn toàn khác và phức tạp hơn rất nhiều so với phương trình sai phân tuyến tính.

Luận văn đã giải quyết được những vấn đề sau:

• Giải quyết được các phương trình dạng sai phân bậc nhất với dịch chuyển tịnh tiến và đồng dạng để làm cơ sở cho việc giải quyết phương trình hàm dạng sai phân bậc hai thuần nhất với dịch chuyển tịnh tiến và đồng dạng.

• Đưa ra một số quy tắc tìm nghiệm riêng của phương trình hàm dạng sai phân bậc hai không thuần nhất với dịch chuyển tịnh tiến và đồng dạng.

Hướng phát triển của đề tài: Tiếp tục nghiên cứu phương trình hàm dạng sai phân thuần nhất bậc cao và phương trình hàm dạng sai phân không thuần nhất bậc hai và bậc cao trên cơ sở phương trình hàm dạng sai phân bậc nhất và bậc hai đã có.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Hữu Điển (2003), *Hàm số với biến số phức,* Nxb Giáo dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu(2003), *Phương trình hàm,* Nxb Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu(2004), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ,* Nxb Giáo dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu(2006), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ,* Nxb Giáo dục.

[5] Nguyễn Thủy Thanh và Hà Huy Khoái dịch(1974), *Nhập môn Giải tích phức,* Nxb Đại học và Trung học Chuyên nghiệp.

[6] Lê Đình Thịnh và các tác giả khác, *Phương trình sai phân và một số ứng dụng,* Nxb Giáo dục.

[7] Trương Văn Thưởng(2003), *Hàm số với biến số phức,* Nxb Giáo dục.

[8] Nguyễn Trọng Tuấn, *Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olimpic,* Nxb Giáo dục.

[9] Marek KucZma(1968), *Functional equations in a single variable,* PWN- Polish scientific publishers.