PHƯƠNG TRÌNH HÀM - KỸ THUẬT GIẢI VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Trần Minh Hiền - GV trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước

Ngày 15 tháng 6 năm 2011

Mục lục

1 Phương pháp thế biến

Phương pháp thế biến có lẽ là phương pháp được sử dụng nhiều nhất khi giải phương trình hàm. Ta có thể:

- Hoặc cho các biến $x, y, \ldots$ nhận các giá trị bằng số. Thường các giá trị đặc biệt là $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Hoặc thế các biến bằng các biểu thức để làm xuất hiện các hằng số hoặc các biểu thức cần thiết. Chẳng hạn, nếu trong phương trình hàm có mặt $f(x+y)$ mà muốn có $f(0)$ thì ta thế y bởi $-x$, muốn có $f(x)$ thì cho $y=0$, muốn có $f(nx)$ thì thế y bởi $(n-1)x$.

Ví dụ 1.1. (Áo 199?) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Giải

Thay x bởi $1-x$ ta được

$$(1-x)^2 f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Nhu vậy ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \\ f(x)+(1-x)^2 f(1-x)=2(1-x)-(1-x)^4 \end{cases}.$$

Ta có $D=\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x+1\right)$ và $D_x=\left(1-x^2\right)\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x+1\right)$. Vậy $D.f(x)=D_x, \forall x\in\mathbb{R}$. Từ đó ta có nghiệm của bài toán là

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & : x\neq a, x\neq b, \\ c\in\mathbb{R} & : x=a, \\ 2a-a^4-a^2c & : x=b, \end{cases} \quad (c \text{ là hằng số tùy ý}),$$

với a, b là nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$.

Nhận xét: Bài toán trên được dùng một lần nữa trong kỳ thi **VMO 2000, bảng B**.

Ví dụ 1.2. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y, \forall x, y\in\mathbb{R}$$

Hint: 1. Thế $y\to\frac{\pi}{2}$
2. Thế $y\to y+\frac{\pi}{2}$ hoặc thế $x=\frac{\pi}{2}$
3. Thế $x\to 0$
Đáp số: $f(x)=a\cos x+b\sin x(a, b\in\mathbb{R})$

Ví dụ 1.3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y), x, y\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x, y\in\mathbb{R}.$$

Hint:
1. Tính $f(0)$
2. Thế $y = -1$, chứng minh f là hàm lẻ
3. Thế $y = 1 \Rightarrow f(2x+1) = 2f(x)+1$
4. Tính $f(2(u+v+uv)+1)$ theo (3) và theo giả thiết để suy ra $f(2uv+u) = 2f(uv)+f(u)$
5. Cho $v = -\frac{1}{2}, \frac{u}{2} \to x$ và $u \to y, 2uv \to x$ để suy ra điều phải chứng minh

Ví dụ 1.4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0$$

$$f(x) + f(y) = 1 + f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0); x + y \neq 0$$

Hint:
1. Tính $f(0), f(-1)$
2. Tính $a+1$ với $a = f(1) = f\left(\frac{x+1}{x+1}\right) = f\left(x + 1\frac{1}{x+1}\right)$ theo cả hai điều kiện.
Đáp số: $f(x) = x + 1$

Nhận xét: Thủ thuật này áp dụng cho một lớp các bài toán gần tuyến tính

Ví dụ 1.5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa $f(1) = \frac{1}{2}$ và

$$f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Hint:
1. Tính $f(3)$
2. Thế $y \to \frac{3}{x}$
Đáp số: $f(x) = \frac{1}{2}$

Ví dụ 1.6. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Hint: Thế $x \to \frac{1}{x}$
Đáp số: $f(x) = \frac{2}{x} - x$

Ví dụ 1.7. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x, \forall x, \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$$

Hint:
Thế $x \to \frac{x-1}{x}, x \to \frac{-1}{x-1}$
Đáp số: $f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{x-1}{x}$
Luyện tập:

2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Q}^+ \text{ và } f(x^3) = f^3(x), \forall x \in \mathbb{Q}^+$$

Hint:
1. Quy nạp $f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{Q}^+, \forall n \in \mathbb{N}$
2. Với $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, tính $f\left(\left(\frac{p}{q} + q^2\right)^3\right)$ theo hai cách.
Đáp số: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}^+$

Ví dụ 1.8. (**VMO 2002**). Hãy tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(y - f(x)) = f\left(x^{2002} - y\right) - 2001.y.f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải

a) Thế $y = f(x)$ vào (1) ta được

$$f(0) = f\left(x^{2002} - f(x)\right) - 2002.\left(f(x)\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

b) Lại thay $y = x^{2002}$ vào (1) thì

$$f\left(x^{2002} - f(x)\right) = f(0) - 2001.x^{2002}.f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Lấy (2) cộng với (3) ta được

$$f(x)\left(f(x) + x^{2002}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra với mỗi giá trị $x \in \mathbb{R}$ thì ta có hoặc là $f(x) = 0$ hoặc là $f(x) = -x^{2002}$. Ta sẽ chỉ ra rằng để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì bắt buộc phải có đồng nhất

$$f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ hoặc } f(x) \equiv -x^{2002}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, vì $f(0) = 0$ trong cả hai hàm số trên, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$, và tồn tại $b > 0$ sao cho $f(b) = -b^{2002}$(*vì chỉ cần thay $x = 0$ vào quan hệ (1) ta nhận được hàm f là hàm chẵn*). Khi đó thế $x = a$ và $y = -b$ vào (1) ta được

$$f(-b) = f\left(a^{2002} + b\right).$$

Vậy ta nhận được dãy quan hệ sau

$$\begin{aligned} 0 &\neq -b^{2002} \\ &= f(b) \\ &= f(-b) \\ &= f\left(a^{2002} + b\right) \\ &= \left[\begin{array}{l} 0 (\text{mâu thuẫn vì } 0 \neq 0) \\ -\left(a^{2002} + b\right)^{2002} (\text{mâu thuẫn vì } -\left(a^{2002} + b\right)^{2002} < -b^{2002}) \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Bằng cách thử lại quan hệ hàm ban đầu ta kết luận chỉ có hàm số $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1.9. (**Hàn Quốc 2003**) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Giải

Nhận thấy hàm $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét trường hợp $f(x) \not\equiv 0$.

a) Thế $x = f(y)$ vào (4) ta được

$$f(0) = 2f(x) + x^2 \to f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{f(0)}{2},$$

hay

$$f\left(f(x)\right) = -\frac{f^2(x)}{1} + \frac{f(0)}{2}.$$

b) Thế $x = f(z)$, với z là một số thuộc $\mathbb{R}$ thì ta được

$$f\left(f(z) - f(y)\right) = f\left(f(z)\right) + f(z)f(y) + f\left(f(y)\right).$$

Với lưu ý là

$$f\left(f(y)\right) = -\frac{f^2(y)}{2} + \frac{f(0)}{2} \text{ và } f\left(f(z)\right) = -\frac{f^2(z)}{2} + \frac{f(0)}{2},$$

thay vào quan hệ hàm ở trên ta được

$$f\left(f(z) - f(y)\right) = -\frac{\left(f(z) - f(y)\right)^2}{2} + f(0). \quad (5)$$

c) Tiếp theo ta chứng tỏ tập $\{f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Do $f(x) \not\equiv 0$ nên tồn tại một giá trị y_0 sao cho $f(y_0) = a \neq 0$. Khi đó từ quan hệ (4) ta có

$$f(x - a) = f(x) + xa + f(a) \to f(x - a) - f(x) = ax + fa.$$

Vì vế phải là hàm bậc nhất của X nên $xa + fa$ có tập giá trị là toàn bộ $\mathbb{R}$. Do đó hiệu $f(x-a) - f(x)$ cũng có tập giá trị là toàn bộ $\mathbb{R}$, khi $x \in \mathbb{R}$. Mà

$$\{f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{R}\} \supset \{f(x - a) - f(x) | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

do đó $\{f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Vậy từ quan hệ (5) ta thu được

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác ta lại có

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + f(0), \forall x \in T(f)$$

nên $f(0) = 0$. Thử lại thấy hàm số $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn quan hệ hàm.

Kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn là $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) \equiv 0$.

Nhận xét: Bài toán trên lấy ý tưởng từ bài thi **IMO 1996**: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x - f(y)\right) = f\left(f(y)\right) + xf(y) + f(x) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số là $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.10. (Iran 1999) Xác định các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4yf(x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Giải

a) Thế $y=x^2$ ta được

$$f\left(f(x)+x^2\right)=f(0)+4x^2f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

b) Thế $y=-f(x)$ ta được

$$f(0)=f\left(f(x)+x^2\right)-4\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Cộng hai phương trình trên ta được

$$4f(x)\left(f(x)-x^2\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đây ta thấy với mỗi $x\in\mathbb{R}$ thì hoặc là $f(x)\equiv 0$ hoặc là $f(x)=-x^2$. Ta chứng minh nếu hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán thì f phải đồng nhất với hai hàm số trên. Nhận thấy $f(0)=0$, từ đó thay $x=0$ ta được $f(y)=f(-y),\forall y\in\mathbb{R}$, hay f là hàm chẵn. Giả sử tồn tại $a\neq 0,b\neq 0$ sao cho $f(a)=0,f(b)=-b^2$, khi đó thay $x=a,y=-b$ ta được

$$f(-b)=f(a^2+b)\to f(b)=f(a^2+b).$$

Từ đó ta có quan hệ sau

$$\begin{aligned}0&\neq -b^2\\&=f(b)\\&=f(-b)\\&=f\left(a^2+b\right)\\&=\left[\begin{array}{l}0(\text{mâu thuẫn vì }0\neq 0)\\-\left(a^2+b\right)^2(\text{mâu thuẫn vì }-\left(a^2+b\right)^2<-b^2)\end{array}\right..\end{aligned}$$

Do đó xảy ra điều mâu thuẫn. Thử lại thấy hàm số $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu.

Nhận xét:
1. Rõ ràng bài toán **VMO 2002** có ý tưởng giống bài toán này.
2. Ngoài phép thế như trên thì bài toán này ta cũng có thể thực hiện những phép thế khác như sau:

a) Thế $y=\dfrac{1}{2}\left(x^2-f(x)\right)$.

b) Thế $y=0$ để có $f\left(f(x)\right)=f\left(x^2\right)$, sau đó thế $y=x^2-f(x)$.

c) Thế $y=x-f(x)$ và sau đó là $y=x^2-x$.

Ví dụ 1.11. Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x-f(y)\right)=2f(x)+x+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.\qquad(6)$$

Giải

Nhận thấy hàm $f(x) \equiv 0$ không thỏa mãn yêu cầu. Xét $f(x) \not\equiv 0$.

a) Thay x bởi $f(y)$ vào (6) ta được
$$f\left(f(y)\right) = -f(y) + \frac{f(0)}{2}.$$

b) Lại thay x bởi $f(x)$ ta được
$$\begin{aligned} f\left(f(x) - f(y)\right) &= 2f\left(f(x)\right) + f(x) + f(y) \\ &= 2\left(-f(x) + \frac{f(0)}{2}\right) + f(x) + f(y) \\ &= -\left(f(x) - f(y)\right) + f(0). \end{aligned}$$

Tuy nhiên *việc chứng minh tập* $\{f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ *có tập giá trị là* $\mathbb{R}$ *chưa thực hiện được.*

c) Từ đây ta có
$$\begin{aligned} f\left(f(x) - 2f(y)\right) &= f\left(\left(f(x) - f(y)\right) - f(y)\right) \\ &= 2f\left(f(x) - f(y)\right) + f(x) - f(y) + f(y) \\ &= -2\left(f(x) - f(y)\right) + 2f(0) + f(x) \\ &= -\left(f(x) - 2f(y)\right) + 2f(0). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh tập $\{f(x) - 2f(y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ bằng với $\mathbb{R}$. Thật vậy tồn tại giá trị $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_0) = a \neq 0$. Khi đó thay $y = y_0$ vào (6) ta có
$$f(x - a) - 2f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mà khi $x \in \mathbb{R}$ thì $x + a$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Chứng tỏ tập $\{f(x - a) - f(x) | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Mà $\{f(x) - 2f(y) | x, y \in \mathbb{R}\} \supset \{f(x - a) - f(x) | x \in \mathbb{R}\}$ nên $\{f(x) - 2f(y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Do đó từ (c) ta kết luận $f(x) = -x + 2f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (6) ta được $f(0) = 0$.

Kết luận: Hàm số $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1.12. (Belarus 1995) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn
$$f\left(f(x + y)\right) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Rõ ràng f khác hằng số.

a) $y = 0$ vào điều kiện bài toán ta được
$$f\left(f(x)\right) = \left(1 + f(0)\right) f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Trong đẳng thức trên thay x bởi $x + y$ thì
$$\left(1 + f(0)\right) f(x + y) = f\left(f(x + y)\right) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy,$$

đơn giản ta được
$$f(0).f(x + y) = f(x)f(y) - xy. \tag{7}$$

c) Thay $y = 1$ vào (7) thì
$$f(0)f(x+1) = f(x)f(1) - x.$$

d) Lại thay $y = -1$ và x bởi $x+1$ vào (7) ta có
$$f(0).f(x) = f(x+1).f(-1) + x + 1.$$

Kết hợp hai đẳng thức trên ta được
$$\left((f(0))^2 - f(1)f(-1)\right) f(x) = (f(0) - f(-1))\, x + f(0).$$

Nếu $(f(0))^2 - f(1)f(-1) = 0$, thì thay $x = 0$ vào phương trình cuối cùng ta được $f(0) = 0$, nên theo (7) thì $f(x)f(y) = xy$. Khi đó $f(x)f(1) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, điều này dẫn đến $(f(0))^2 - f(1)f(-1) = -1$, mâu thuẫn. Vậy $(f(0))^2 - f(1)f(-1) \neq 0$, suy ra $f(x)$ là một đa thức bậc nhất nên có dạng $f(x) = ax+b$. Thay vào quan hệ hàm ban đầu suy ra $a = 1, b = 0$. Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét: Nếu chịu khó tính ta sẽ tính được $f(0) = 0$ bằng cách thế các biến x, y bởi hai số 0 và 1.

Ví dụ 1.13. (VMO 2005) Hãy xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f\left(f(x-y)\right) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Giải

a) Thế $x = y = 0$ vào (8) ta được
$$f\left(f(0)\right) = \left(f(0)\right)^2.$$

b) Thế $x = y$ vào (8) và sử dụng kết quả trên thì
$$\left(f(x)\right)^2 = \left(f(0)\right)^2 + x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $\left(f(x)\right)^2 = \left(f(-x)\right)^2 \to |f(x)| = |f(-x)|, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Thế $y = 0$ vào (8) được
$$f\left(f(x)\right) = f(0)f(x) - f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*).$$

d) Thế $x = 0, y = -x$ vào (8) được
$$f\left(f(x)\right) = f(0)f(-x) + f(-x) - a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ hai đẳng thức trên ta có
$$f(0)\left(f(-x) - f(x)\right) + f(-x) + f(x) = 2f(0), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$, thì thế $x = x_0$ vào (9) ta có
$$\begin{aligned}
&f(x_0) = f(0)\\
&\to \left(f(x_0)\right)^2 = \left(f(0)\right)^2\\
&\to \left(f(0)\right)^2 + x_0^2 = \left(f(0)\right)^2 + 0^2\\
&\to x_0 = 0 \text{ mâu thuẫn}
\end{aligned}$$

Vậy $f(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, từ điều này kết hợp với (9) ta có

$$f(0)\left(f(x) - 1\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra $f(0) = 0$, vì nếu ngược lại thì $f(x) = 1, \forall x \neq 0$, trái với điều kiện f là hàm lẻ. Từ đây ta nhận được quan hệ quen thuộc

$$\left(f(x)\right)^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f\left(x_0\right) = x_0$, khi đó trong (*) ta có

$$x_0 = f\left(x_0\right) = -f\left(f(x_0)\right) = -f(x_0) = x_0,$$

vô lý. Vậy chứng tỏ $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm này thỏa mãn bài toán.

Nhận xét: Bài toán trên cho kết quả là hàm chẵn $f(x) = -x$. Nếu vẫn giữa nguyên vế phải và để nhận được hàm lẻ $f(x) = x$, ta sửa lại dữ kiện trong vế trái như trong ví dụ sau

Ví dụ 1.14. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(f(x) - y\right) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) Thế $y = 0$ ta được

$$f\left(f(x)\right) = f(x) - f(0) + f(0).f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

b) Thế $y = f(x)$ và sử dụng kết quả trên, ta được

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) - f\left(f(x)\right) + f(x).f\left(f(x)\right) - xf(x) \quad (*) \\ &= f(0) - 2f(0).f(x) + \left(f(x)\right)^2 + f(0).\left(f(x)\right)^2 - xf(x), \end{aligned}$$

hay

$$-2f(0).f(x) + \left(f(x)\right)^2 + f(0).\left(f(x)\right)^2 - xf(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Thế $x = 0$ vào đẳng thức trên ta được

$$\left(f(0)\right)^2 - \left(f(0)\right)^2 = 0 \to f(0) = 0 \text{ hoặc } f(0) = 1.$$

d) Nếu $f(0) = 0$ thì thay vào (10) ta có $f\left(f(x)\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, thay kết quả này vào trong (*) ta có $f(x) = x$.

e) Nếu $f(0) = 1$ thay vào (10) ta có $f\left(f(x)\right) = 2f(x) - 1$, thay vào trong (*) ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Kết luận: Thay vào ta thấy chỉ có hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ là thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 1.15. (AMM,E2176). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(2) = 2 \text{ và } f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)}, \forall x \neq y.$$

Giải

Ta sẽ chứng minh $f(x) = x$ là nghiệm duy nhất của bài toán dựa vào một chuỗi các sự kiện sau. Trước tiên nhận thấy f không thể là hàm hằng.

a) Tính $f(0), f(1)$. Thay $y = 0$ ta nhận được

$$f(1) = \frac{f(x) + f(0)}{f(x) - f(0)} \to (f(1) - 1)\, f(x) = f(0)\,(1 + f(1))\,, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Suy ra $f(1) = 1, f(0) = 0$.

b) Hàm f là hàm lẻ. Thay $y = -x$ ta có

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) \to f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Q}.$$

c) Thay $y = cx, c \neq 1, x \neq 0$ ta có

$$\frac{f(x) + f(cx)}{f(x) - f(cx)} = f\left(\frac{1+c}{1-c}\right) = \frac{1 + f(c)}{1 - f(c)},$$

suy ra $f(cx) = f(c).f(x)$, lấy $c = q, x = \dfrac{p}{q}$ thì ta được $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{f(p)}{f(q)}$

Ví dụ 1.16. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Thay $x = y = 0$ thì $(f(0)) = (f(0))^2 \to f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

1. Nếu $f(0) = 0$, thì thay $x = y$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$f(0) = (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = (f(x) - x)^2 \to f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Nhận thấy hàm số này thỏa mãn.

2. Nếu $f(0) = 1$ thì lại vẫn thay $x = y = 0$ ta nhận được, với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì hoặc là $f(x) = x + 1$ hoặc $f(x) = x - 1$. Giả sử tồn tại giá trị a sao cho $f(a) = a - 1$. Khi đó thay $x = a, y = 0$ ta được

$$f\left(a^2\right) = a^2 - 4a + 1.$$

   Nhưng ta lại có hoặc là $f\left(a^2\right) = a^2 + 1$ hoặc là $f\left(a^2\right) = a^2 - 1$. Do đó ta phải có hoặc là $a^2 - 4a + 1 = a^2 + 1$ hoặc $a^2 - 4a + 1 = a^2 - 1$, tức $a = 0$ hoặc là $a = \dfrac{1}{2}$. Tuy nhiên kiểm tra đều không thỏa.

Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc là $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.17. (THTT T9/361) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x^3 - y\right) + 2y\left(3\left(f(x)\right)^2 + y^3\right) = f\left(x + f(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) Thay $y = x^3$ ta có
$$f(0) + 2x^3\left(3\left(f(x)\right)^2 + x^6\right) = f\left(x^3 + f(x)\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Thay $y = -f(x)$ ta được
$$f\left(x^3 + f(x)\right) - 2f(x)\left(3\left(f(x)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2\right) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ hai đẳng thức trên ta được
$$2x^3\left(3\left(f(x)\right)^2 + x^6\right) = 8\left(f(x)\right)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó
$$\begin{aligned}
0 &= 4\left(f(x)\right)^2 - x^3\left(3\left(f(x)\right)^2 + x^6\right)\\
&= \left(4\left(f(x)\right)^3 - 4\left(f(x)\right)^2.x^3\right) + \left(\left(f(x)\right)^2.x^3 - x^9\right)\\
&= \left(f(x) - x^3\right)\left(4\left(f(x)\right)^2 + x^3\left(f(x) + x^3\right)\right) \qquad = \left(f(x) - x^3\right)\left(\left(2f(x) + \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}x^6\right).
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\left(2f(x) + \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}x^6 = 0$ thì $x = 0, f(0) = 0$. Bởi vậy trong mọi trường hợp ta đều có $f(x) = x^3$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn bài toán.

2 Phương trình hàm Cauchy

PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÔSI(HÀM TUYẾN TÍNH) Version 5.0 updated to 24 – 10 – 2008 I.Định nghĩa: Một hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gọi là tuyến tính nếu: $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (Hàm số tuyến tính còn được gọi là hàm Cauchy) II. Một số tính chất Tính chất 1. Hàm f tuyến tính và thỏa mãn $x\geq 0$ thì $f(x)\geq 0$, khi đó f là hàm đồng biến. (Nếu với mọi $x\geq 0\Rightarrow f(x)\leq 0$ thì hàm nghịch biến). Chứng minh Xét $x\leq y\Rightarrow y-x\geq 0\Rightarrow f(y-x)\geq 0$ Ta có $f(y)=f(y-x+x)=f(y-x)+f(x)\geq f(x)$. Vậy f là hàm tăng. Tính chất 2. Hàm tuyến tính f là hàm lẻ. Chứng minh Ta có $f(0)=f(0+0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$. Từ đó $f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=0\Rightarrow f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy f là hàm lẻ. Tính chất 3. Hàm tuyến tính f liên tục tại $x=0$ thì liên tục trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh Xét $x_0\in\mathbb{R}$ bất kỳ, ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+f(-x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)=\lim\limits_{y\to 0}f(y)=f(0)=f(0)=0$ Vậy hàm số liên tục tại $x_0\in\mathbb{R}$. Do x_0 lấy bất kỳ trên $\mathbb{R}$ nên chứng tỏ hàm số liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$. Tính chất 4. Hàm số f tuyến tính và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh Cho $y=0\Rightarrow f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$ Cho $y=x\Rightarrow f(2x)=2f(x)$, bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được: $f(nx)=nf(x),\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}(1)$ Mặt khác từ công thức (1) suy ra $f(x)=nf\left(\frac{x}{n}\right)$ hay $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}$, do đó: $f\left(\frac{m}{n}\right)x=\frac{m}{n}f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\forall m,n\in\mathbb{N}$ hay $f(qx)=qf(x),\ \forall q\in\mathbb{Q},\forall x\in\mathbb{R}$ Đến đây ta có thể giải quyết theo hai cách sau: Với $\varepsilon>0$ bất kỳ, chọn $\delta=\frac{\varepsilon}{1+|f(1)|+|f(-1)|}$, khi đó với mọi $x\in\mathbb{R},\ |x|<\delta$ theo tính chất của tập số thực thì tồn tại $m,n\in\mathbb{N}$ sao cho $|x|<\frac{m}{n}<\delta$, tức là $-\frac{m}{n}<x<\frac{m}{n}$. Vì f là hàm đồng biến nên $f\left(-\frac{m}{n}\right)<f(x)<f\left(\frac{m}{n}\right)\Rightarrow\frac{m}{n}f(-1)<f(x)<\frac{m}{n}f(1)\Rightarrow-\frac{m}{n}(1+|f(1)|+|f(-1)|)<f(x)<\frac{m}{n}(1+|f(1)|+|f(-1)|)$ Vậy $|f(x)-f(0)|=|f(x)|<\frac{m}{n}(1+|f(1)|+|f(-1)|)<\delta(1+|f(1)|+|f(-1)|)=\varepsilon$. Do đó hàm số liên tục tại $x=0$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$ Hoặc ta có thể là như sau: từ $f(qx)=qf(x),\ \forall q\in\mathbb{Q},\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)=xf(1),\ \forall x\in\mathbb{Q}$ Hơn nữa với mỗi $x\in\mathbb{R}$, tồn tại hai dãy hữu tỉ $(u_n),(v_n)\subset\mathbb{Q}:u_n<x<v_n$ mà $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=x$. Do hàm đồng biến nên $f(u_n)<f(x)<f(v_n)\Rightarrow u_nf(1)<f(x)<v_nf(1)$. Chuyển qua giới hạn ta được $f(x)=f(1)x\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=ax$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính chất 5. Hàm tuyến tính f và liên tục trên $\mathbb{R}$ có biểu diễn là $f(x)=ax,(a=f(1))$. Chứng minh Theo cách thiết lập trong tính chất 3 ta có $f(x)=xf(1),\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Vì với mỗi $x\in\mathbb{R}$, luôn tồn tại dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Q}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Vì f liên tục nên

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_nf(1)=f(x)\Rightarrow f(x)=ax$$

, với

$$a=f(1)$$

, thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính chất 6. Cho $c>0$. Nếu hàm số f tuyến tính và thỏa mãn điều kiện $|f(x)|\leq c\ \forall x\in[-1,1]$ thì $f(x)=ax$ với $|a|\leq c$ Chứng minh Từ tính chất 3 ta có $f(qx)=qf(x),\ \forall q\in\mathbb{Q},\ x\in\mathbb{R}$ Giả sử (x_n) là dãy số thực $\neq 0$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Với mỗi giá trị của x_n ta chọn một số hữu tỉ q_n thỏa mãn: $\frac{1}{\sqrt{|x_n|}}\leq q_n\leq\frac{1}{\sqrt[3]{|x_n|}},n=1,2,...$(có thể từ giá trị $n=n_0,n_0+1,...$ để thỏa mãn điều kiện trên) thì ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n.q_n)=0$ Vậy $|f(x_n)|=\left|f\left(\frac{1}{q_n}.q_n.x_n\right)\right|=\frac{1}{q_n}|f(q_nx_n)|,\ \forall n\in\mathbb{N}$, do $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n.q_n)=0$ nên với n đủ lớn thì $q_nx_n\in[-1,1]$ nên $|f(q_nx_n)|\leq c$, với n đủ lớn. Do đó $|f(x_n)|\leq\frac{1}{q_n}c$ Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0=f(0)$ nên hàm f liên tục tại 0, từ đó liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$ do đó có biểu diễn $f(x)=ax$. Từ điều kiện bài toán ta được hàm cần tìm là $f(x)=ax$ với $|a|\leq c$ Tính chất 7. Nếu hàm số f tuyến tính và thỏa mãn điều kiện tồn tại hằng số $M>0$ sao cho $f(x)\leq M\ \forall x\in[0,1]$ thì $f(x)=ax$ Chứng minh Từ $f(qx)=qf(x)\ \forall q\in\mathbb{Q},\forall x\in\mathbb{R}$

hay $f(x)=ax\ \forall x\in\mathbb{Q}$ Từ điều kiện bài toán ta có: $f(1)-f(x)=f(1-x)\le M\ \forall x\in[0,1]$, Suy ra $f(1)-M\le f(x)\le M\quad\forall x\in[0,1]$ Vậy tồn tại hằng số $N>0$ mà $|f(x)|\le N\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow|f(x)|\le N\ \forall x\in[-1,1]$(do $f(-x)=-f(x)$), đến đây ta có thể là tiếp theo như tính chất 6. Ở đây ta có thể chứng minh khác như sau: Với mọi $x\in\mathbb{R}$, khi đó với $r\in\mathbb{Q}^+$ sao cho $|x|<r$ thì $\left|\frac{x}{r}\right|\le 1$, do đó $\left|f\left(\frac{x}{r}\right)\right|\le N$. Vì $\frac{1}{r}\in Q$ nên $\left|f\left(\frac{x}{r}\right)\right|=\frac{1}{r}|f(x)|\le N\Rightarrow|f(x)|\le r.N$ Cho $r\to|x|$ thì $|f(x)|\le N|x|$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ hay f liên tục tại 0 nên liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$. Do đó $f(x)=ax$ Nhận xét 1. Cho tập $A=\mathbb{R},[0,\infty)$ hay $(0,\infty)$. Nếu $f:A\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+y)=f(x)+f(y)$ và $f(xy)=f(x)f(y),\forall x,y\in A$, thì hoặc là $f(x)=0,\forall x\in A$ hoặc là $f(x)=x,\forall x\in A$ Chứng minh Theo tính chất của hàm cộng tính thì $f(x)=f(1).x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Nếu $f(1)=0$ thì $f(x)=f(x.1)=f(x).f(1)=0,\ \forall x\in A$. Nếu $f(1)\ne 0$ do $f(1)=f(1)f(1)\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow f(x)=x,\forall x\in A\bigcap\mathbb{Q}$ Nếu $y\ge 0$ thì $f(y)=f(\sqrt{y})f(\sqrt{y})=f^2(\sqrt{y})\ge 0$ và do đó $f(x+y)=f(x)+f(y)\ge f(x)$, hay chứng tỏ f là hàm tăng. Bây giờ với mọi $x\in A\backslash\mathbb{Q}$, theo tính trù mật của tập số thực, tồn tại hai dãy $p_n,q_n\in\mathbb{Q}$ sao cho $p_n<x<q_n$; $p_n\nearrow x$ và $q_n\searrow x$, khi $n\to\infty$. Do f là hàm tăng, ta có: $p_n=f(p_n)\le f(x)\le f(q_n)=q_n$ Chuyển qua giới hạn ta có $f(x)=x,\forall x\in A$ III. Các hệ quả trực tiếp của hàm Cauchy Từ quan hệ cho hàm f liên tục thỏa mãn điều kiện $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ta có biểu diễn của hàm là $f(x)=ax$. Nếu ta đặt vào quan hệ hàm trên qua phép logarit Nepe tức là: $\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y)=\ln(f(x).f(y))$, suy ra $f(x+y)=f(x).f(y)$. Vậy nếu $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì quan hệ hàm $f(x+y)=f(x).f(y)$ dễ dàng chuyển về quan hệ hàm Cauchy qua phép logarit. Tuy nhiên từ quan hệ hàm đó dễ dàng thấy được bài toán vẫn giải được với miền xác định trên $\mathbb{R}$.

Hệ quả 1. Các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x+y)=f(x).f(y)$ (1) là: $\left[\begin{array}{l} f(x)\equiv 0\\ f(x)=a^x\ (a>0)\end{array}\right.$

Chứng minh Nhận thấy hàm đồng nhất $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn quan hệ đó. Xét hàm không đồng nhất 0, khi đó tồn tại x_0 :$f(x_0)\ne 0$ thì: $f(x_0)=f((x_0-x)+x)=f(x_0-x)f(x)\ne 0\Rightarrow f(x)\ne 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ Và cũng thỏa điều kiện luôn dương, thật vậy: $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ Do đó đến đây ta chỉ cần đặt $\ln f(x)=g(x)$ thì ta có quan hệ: $g(x+y)=g(x)+g(y)$ Vậy $g(x)=bx,\ b\in\mathbb{R}$ tùy ý. Vậy $f(x)=e^{bx}=a^x(a>0)$. Vậy hai hàm thỏa mãn quan hệ đó là:

Bây giờ lại từ hàm Cauchy nêu ta nâng lũy thừa của biến lên từ x thành e^x ta được quan hệ là $f(e^{x+y})=f(e^x)+f(e^y)\Rightarrow g(x+y)=g(x)+g(y)$ với $g(x)=f(e^x)$ và hàm g thu được lại chính là hàm Cauchy. Mặt khác từ $f(e^{x+y})=f(e^x)+f(e^y)\Rightarrow f(e^x.e^y)=f(e^x)+f(e^y)$, bây giờ thay ngược trở lại e^x bởi x thì ta được quan hệ mới là $f(xy)=f(x)+f(y)$. Quan hệ này với quan hệ Cauchy tương tác với nhau bởi việc nâng lũy thừa của biến. Tuy nhiên việc nâng lũy thừa của biến lại có yêu cầu biến phải dương. Nếu có một biến bằng 0 thì bài toán trở nên dễ dàng với kết quả là $f(x)\equiv 0$, nếu cả hai biến cùng dương thì bài toán chuyển về phương trình hàm Cauchy qua phép nâng biến lên lũy thừa. Nếu cả hai số cùng âm thì tích xy là số dương nên lại quy về trường hợp hai biến cùng dương.

Hệ quả 2. Các hàm số $f(x)$liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn điều kiện:$f(xy)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)là: $f(x)=b\ln|x|\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\},b\in\mathbb{R}$ Chứng minh Nếu $x=y=1$ thì từ (3) ta được $f(1)=0$. Lại cho $x=y=-1$ ta được $f(-1)=0$. Bây giờ cho $y=-1$ thì ta được $f(x)=f(-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó f là hàm chẵn. a) Xét $x,y\in\mathbb{R}^+$, đặt $x=e^u,y=e^v,f(e^u)=g(u)$ ta được $g(u+v)=g(u)+g(v)\ \forall u,v\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow g(t)=bt\Rightarrow f(x)=a\ln x\ \forall x\in\mathbb{R}^+,a\in\mathbb{R}$ b) Nếu $x,y\in\mathbb{R}^-$ thì $xy\in\mathbb{R}^+$ nên với $y=x$ ta được: $f(x)=\frac{1}{2}f(x^2)=\frac{1}{2}b\ln(x^2)=b\ln|x|\ \forall x\in\mathbb{R}^-,b\in\mathbb{R}$

Lại tiếp tục từ quan hệ hàm $f(x+y)=f(x).f(y)$ ta lại nâng biến theo lũy thừa của e thì có dạng $f(e^{x+y})=f(e^x)f(e^y)\Rightarrow f(e^x.e^y)=f(e^x)f(e^y)$ và ta được quan hệ hàm: $g(xy)=g(x)g(y)$ Hiển nhiên bài toán có ngay lời giải nếu miền xác định chứa số 0. Do đó ta đặt vấn đề đó như sau:

Hệ quả 3. Các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn điều kiện:$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$là:

$f(x) = 0$ $f(x) = |x|^\alpha$ $f(x) = \begin{cases} x^\beta, \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ -|x|^\beta, \ \forall x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ Chứng minh Thay $y = 1 \Rightarrow f(x)(1 - f(1)) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (1) Nếu $f(1) \neq 1$ thì từ (1) suy ra $f(x) \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Xét $f(1) = 1$, khi đó $1 = f(1) = f\left(x.\frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Vậy $f(x) \neq 0, \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. a) Xét $x, y \in \mathbb{R}^+$, đặt $x = e^u, y = e^v$ va $g(t) = f(e^t)$. Khi đó ta có: $g(u+v) = g(u)g(v), \ \forall u, v \in \mathbb{R}$ Vậy$g(t) = a^t \ \forall t \in \mathbb{R}(a > 0$ tuy yù) và do đó: $f(x) = f(e^u) = g(u) = a^u = a^{\ln x} = x^{\ln a} = x^\alpha, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ trong đó$\alpha = \ln a$ b) Bây giờ ta xét trường hợp $x \neq 0, y \neq 0$ bất kỳ thì cho và $x = y = -t$ ta nhận được $f^2(t) = f(t^2) = f(-t)f(-t) = f^2(-t) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(-t) = f(t) = t^c (hay\ 0) \\ f(-t) = -f(t) = -t^c \end{array}\right.$ Vậy trong trường hợp tổng quát ta có các nghiệm là: a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = |x|^\alpha$ $f(x) = \begin{cases} x^\beta, \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ -|x|^\beta, \ \forall x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$

Từ quan hệ hàm Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ta thực hiện vế trái theo trung bình cộng vế trái theo biến và trung bình cộng vế phải theo hàm số thì ta nhận được:

Hệ quả 4(Hàm Jensen). Các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ (4) là:$f(x) = ax+b$ Chứng minh Cho $y = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2}$. Vậy: $\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2} \Rightarrow f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y)$ Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$ thì ta có $g(x+y) = g(x) + g(y)$ hay $g(x) = ax \Rightarrow f(x) = ax + b$

Lại trong quan hệ hàm Jensen ta thực hiện logarit Nepe nội tại của biến(dĩ nhiên trong trường hợp các biến dương, ta được:$f\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) = \frac{f(\ln x)+f(\ln y)}{2} \Leftrightarrow f(\ln\sqrt{xy}) = \frac{f(\ln x)+f(\ln y)}{2}$. Từ vấn đề này đặt ngược lại ta được hệ quả sau: Hệ quả 5. Các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ (5) là $f(x) = a\ln x + b$ Điều kiện $x, y \in \mathbb{R}^+$ là để cho hàm số luôn được xác định. Chứng minh Đặt $x = e^u, y = e^v, g(u) = f(e^u)$. Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: $g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2} \ \forall u, v \in \mathbb{R}$ Suy ra $g(u) = au + b \Rightarrow f(x) = a\ln x + b, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Cũng lại từ quan hệ hàm $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ nếu ta viết được vào dưới dạng của biểu diễn logarit tức là: $\ln f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\ln f(x) + \ln f(y)}{2} \Rightarrow \ln f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \ln\sqrt{f(x)f(y)} \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$ Tức là ta được quan hệ hàm: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$. Vậy ta có: Hệ quả 6. Hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$ (6) là:$\left[\begin{array}{l} f(x) \equiv 0 \\ f(x) = e^{ax+b} \ (a, b \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$

Chứng minh Từ điều kiện bài toán cho $x = y \Rightarrow f(x) = \sqrt{f^2(x)} \geq 0$. Nếu tồn tại $x_0 : f(x_0) = 0$ thì: $f\left(\frac{x_0+y}{2}\right) = \sqrt{f(x_0)f(y)} = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ tức là $f(x) \equiv 0$ Nếu $f(x) > 0$ thì thực hiện logarit Nepe hai vế đưa về hàm Jensen ta được:$f(x) = e^{ax+b}, \ a, b$ tùy ý thuộc $\mathbb{R}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Lại từ quan hệ hàm trong hệ quả 5, thực hiện phép toán nghịch đảo hàm số(giả sử thực hiện được) ta có: $\frac{1}{f(\sqrt{xy})} = \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}{2}$, bằng cách đặt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ta nhận được hệ quả sau: Hệ quả 7. Các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:$f(\sqrt{xy}) = \frac{2}{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}} \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ (7) là hàm hằng $f(x) = b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Chứng minh Từ giả thiết bài toán suy ra $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$. Ta có $\frac{1}{f(\sqrt{xy})} = \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}{2} \Rightarrow g(\sqrt{xy}) = \frac{g(x)+g(y)}{2} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ với $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ Theo hệ quả 5 thì $g(x) = a\ln x + b \Rightarrow f(x) = \frac{1}{a\ln x + b}$. Để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thì: $a\ln x + b \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ nên $a = 0, b \neq 0$. Vậy $f(x) = b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$(đpcm).

Từ quan hệ hàm Jensen nếu ta thực hiện nghịch đảo(với hàm số) thì ta có: $\frac{1}{f\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2f(x)f(y)}$ hay $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ Tuy nhiên để đảm bảo cho phép nghịch đảo hàm luôn thực hiện được thì ta chỉ cần giới hạn giá trị hàm trong $\mathbb{R}^+$. Do đó ta nhận được kết quả: Hệ quả 8. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ (8) là $f(x)=\frac{1}{b},\ b>0$

Chứng minh Chỉ cần đặt $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, ta nhận được quan hệ hàm Jensen theo hàm $g(x)$ nên$g(x)=cx+d$. Do đó $f(x)=\frac{1}{cx+d}$. Tuy nhiên hàm số này cần phải thỏa mãn điều kiện $f(x)\in\mathbb{R}^+$ nên: $\frac{1}{cx+d}>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow c=0,b>0$, vậy hàm thu được là $f(x)=\frac{1}{b},\ b>0$ tùy ý.

Lại vẫn trong quan hệ hàm Jensen nếu ta thực hiện phép bình phương vào hàm số thì ta nhận ngay được hệ quả sau:

Hệ quả 9. Hàm số $f(x)$liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{\frac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}}$ (9) là $f(x)=c$ với $c\geq 0$. Chứng minh Từ quan hệ hàm số suy ra $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có: $\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2=\frac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}$. Đặt $g(x)=[f(x)]^2$ thì ta nhận được quan hệ hàm Jensen cho hàm $g(x)$nên $g(x)=ax+b$. Do đó $f(x)=\sqrt{ax+b}$. Mà theo điều kiện thì $\sqrt{ax+b}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=0,b\geq 0$ Ta được hàm $f(x)=b,b\geq 0$.

Từ quan hệ hàm trong hệ quả 6, nếu ta thực hiện phép nâng lũy thừa lên cơ số e(đối với biến) thì ta có: $f\left(e^{\frac{x+y}{2}}\right)=\sqrt{f(e^x)f(e^y)}\Rightarrow f(\sqrt{e^x.e^y})=\sqrt{f(e^x)f(e^y)}$ Thay ngược lại biến dạ ng bình thường ta nhận được kết quả:

Hệ quả 10. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa $f(\sqrt{xy})=\sqrt{f(x)f(y)},\forall x,y\in\mathbb{R}^+$ (10) là: $\left[\begin{array}{l} f(x)\equiv 0\\ f(x)=c.x^a,a\in\mathbb{R},c>0\end{array}\right.$ Chứng minh Đặt $x=e^u,y=e^v,f(e^u)=g(u)$ thì ta nhận được: $g\left(\frac{u+v}{2}\right)=\sqrt{g(u)g(v)}$, theo hệ quả 6 thì: $\left[\begin{array}{l} g(u)\equiv 0\\ g(u)=e^{au}+b\end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l} f(x)\equiv 0\\ f(x)=e^{a\ln x+b}=c.x^a,c>0,a\in\mathbb{R}\end{array}\right.$. Trong quan hệ hàm của hệ quả 5, nếu ta thực hiện theo quan hệ hàm bình phương, tức là $f^2(\sqrt{xy})=\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2}$, thực hiện căn bậc hai hai vế ta được hệ quả 11. Hệ quả 11. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa $f(\sqrt{xy})=\sqrt{\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2}},\forall x,y\in\mathbb{R}^+$ (11) là $f(x)\equiv c,c\geq 0$ Chứng minh Từ giả thiết của hàm dễ thấy $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}^+$. Đặt $x=e^u,y=e^v,[f(e^u)]^2=g(u)$. Khi đó $g(u)\geq 0$, và ta có: $g\left(\frac{u+v}{2}\right)=\frac{g(u)+g(v)}{2},\forall u,v\in\mathbb{R}$ Vậy $g(u)=au+b$. Để $g(u)\geq 0,\forall u\in\mathbb{R}$thì $a=0,b\geq 0$. Do đó $f(x)\equiv c,c\geq 0$.

Lại từ quan hệ hàm Jensen $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, ta xét phép gán hàm $f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$ thì ta nhận được quan hệ hàm số: $g\left(\frac{1}{(x+y)/2}\right)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{y}\right)}{2}\Leftrightarrow g\left(\frac{2}{x+y}\right)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{y}\right)}{2}$, thay ngược trở lại biến bình thường ta được: Hệ quả 12. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\forall x,y,x+y\neq 0$$

(12) là hàm số $f(x)=\frac{a}{x}+b;\ a,b\in\mathbb{R}$ tùy ý. Giải Với cách thiết lập như trên thì ta có $g(x)=ax+b$, với $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, khi đó thì $f(x)=\frac{a}{x}+b;\ a,b\in\mathbb{R}$. Lại từ quan hệ hàm Jensen $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, ta xét phép gán hàm $f(x)=\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}$ thì ta nhận được quan hệ hàm:

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{\frac{x+y}{2}}\right)}=\frac{\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{g\left(\frac{1}{y}\right)}}{2}=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{y}\right)}{2g\left(\frac{1}{x}\right)g\left(\frac{1}{y}\right)}\Leftrightarrow g\left(\frac{2}{x+y}\right)=\frac{2g\left(\frac{1}{x}\right)g\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{y}\right)}=\frac{2}{\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{g\left(\frac{1}{y}\right)}}$$

Thay ngược lại biến ta được: Hệ quả 13. Hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa $f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)=\frac{2}{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}}$(13) là $\left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x}{a},a\neq 0\\ f(x)=\dfrac{1}{b},b\neq 0\end{array}\right.$. Bằng cách thực hiện các phép toán khai căn, nâng lũy thừa, logarit

Nepe như trong các phần trước ta thu được các kết quả tương tự sau: Hệ quả 14. Hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa $f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}, \forall x,y,x+y\neq 0 (14)$ là: $\left[\begin{array}{l} f(x)\equiv 0 \\ f(x)=e^{\frac{a}{x}+b}, a,b\in\mathbb{R}\end{array}\right.$ Hệ quả 15. Hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa $f\left(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)=\sqrt{\frac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}}, \forall x,y,x+y\neq 0$ (15) là: $f(x)\equiv c, c\geq 0$ tùy ý. Hệ quả 16. Các hàm $f(x)\geq 0$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa $f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)=\sqrt{\frac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}}, \forall x,y\in\mathbb{R}^+(16)$ là: $f(x)=\sqrt{ax^2+b}$ với $a,b\geq 0$ tùy ý. Hệ quả 17. Các hàm số $f(x)$ xác định, liện tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x,y\in\mathbb{R}$ (17) là: $f(x)=ax^2+b; \forall a,b\in\mathbb{R}$ Hệ quả 18. Các hàm số $f(x)$ xác định, liện tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}, \forall x,y\in\mathbb{R}$ (18) là: $\left[\begin{array}{l} f(x)\equiv 0 \\ f(x)=e^{ax^2+b}; \forall a,b\in\mathbb{R}\end{array}\right.$ Hệ quả 19. Các hàm số $f(x)$ xác định, liện tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}}, \forall x,y\in\mathbb{R}$ (19) là: $f(x)=\frac{1}{ax^2+b}$ với $ab\geq 0, b\neq 0$ tùy ý.

IV. Các bài tập vận dụng Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa: $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ Giải: Từ bài toán ta có: $f(x+y)+1=(f(x)+1)(f(y)+1)$ nên đặt $g(x)=f(x)+1$ thì ta có $g(x+y)=g(x).g(y)\Rightarrow g(x)=a^x$ vậy $f(x)=a^x-1$. Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:$f(x)+f(y)-f(x+y)=xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ Giải Ta có thể viết lại phương trình hàm dưới dạng: $\begin{array}{c} f(x)+f(y)-f(x+y)=\dfrac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)] \\ \Leftrightarrow f(x)+\dfrac{1}{2}x^2+f(y)+\dfrac{1}{2}y^2=f(x+y)+\dfrac{1}{2}(x+y)^2\end{array}$ Đặt $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2$ thì ta có $g(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $g(x)+g(y)=g(x+y)$ Vậy $g(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$, a là một hằng số thực, nên $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax$. Thử lại thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Bài toán 3. Cho $a\in\mathbb{R}$, tìm tất cả các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho: $f(x-y)=f(x)-f(y)+axy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ Giải Cho $x=1,y=0\Rightarrow f(1)=f(1)-f(0)$ nên $f(0)=0$. Lại cho $x=y=1\Rightarrow f(0)=f(1)-f(1)+a\Rightarrow a=0$. Vậy với $a\neq 0$ thì không tồn tại hàm số. Ta viết lại quan hệ hàm $f(x-y)=f(x)-f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ Từ đây ta được: $f(x)=f(x+y-y)=f(x+y)-f(y)\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y),\ x,y\in\mathbb{R}$ Vậy $f(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$ Bài toán 4. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$ Giải Đặt $\frac{x}{y}=t\to x=ty$ thay vào ta có: $f(t)=f(ty)-f(y)\Rightarrow f(ty)=f(t)+f(y)$. Vậy $f(x)=a\ln x\ \forall x\in\mathbb{R}^+, a\in\mathbb{R}$.

Bài toán 5. Cho $a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, tìm các hàm $f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: $f(ax+by)=af(x)+bf(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}(1)$ Giải Cho $x=y=0$ vào (1) ta được: $f(0)(a+b-1)=0$ Nếu $a+b\neq 1$ thì $f(0)=0$. Vậy điều kiện Cauchy được thỏa mãn, nên khi đó thì $f(ax)=af(x)$ và $f(bx)=bf(x)$, và ta có quan hệ $f(ax+by)=f(ax)+f(by),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Vậy $f(x)=x$. Nếu $a+b=1$ thì nhận giá trị tùy ý, vậy ta phải đặt một hàm mới để được quan hệ Cauchy là $g(x)=f(x)-f(0)$ thì $g(0)=0$ và tương tự như phần trình bày trên ta có $f(x)=cx+d$ Vậy: $f(ax+by)=af(x)+bf(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ là: $\left[\begin{array}{l} a+b=1\Rightarrow f(x)=cx, c\in\mathbb{R} \\ a+b=1\Rightarrow f(x)=cx+d,\ c,d\in\mathbb{R}\end{array}\right.$ Nhận xét: Với cách làm tương tự cho quan hệ $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$ Bài toán 6. Xác định các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:$f(2x-y)=2f(x)-f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ Giải Đặt $g(x)=f(x)-f(0)$ thì $g(0)=0$, từ phương trình trên ta thu được: $g(2x-y)=2g(x)-g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ Cho $y=0\Rightarrow g(2x)=2g(x)$ và cho $x=0\Rightarrow g(-y)=-g(y)$. Thay vào trên ta được: $g(2x-y)=g(2x)-g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ Vậy $g(x+y)=g\left(2.\frac{x}{2}-1.\frac{y}{-1}\right)=g(x)-g(-y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Do đó: $g(x)=ax,\ x\in\mathbb{R}$, a là số thực tùy ý. Vậy $f(x) = ax+b$, thử lại thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Bài toán 8(Đề nghị IMO 1979). Chứng minh rằng mọi hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(xy+x+y) = f(xy)+f(x)+f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ Giải Dễ thấy nếu f tuyến tính thì f thỏa mãn hệ thức đầu tiên. Giả sử $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ đặt $y = u + v + uv$ ta được: $f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv) = f(x)+f(u+v+uv)+f(xu+xv+xuv)$ Hoán đổi vai trò của x và u ta được: $f(u+x+v+ux+uv+xv+uxv) = f(u)+f(x+v+xv)+f(ux+uv+uxv)$ So sánh hai đẳng thức trên ta được: $f(x) + f(u + v + uv) + f(xu + xv + xuv)= f(u) + f(x + v + xv) + f(ux + uv + uxv)$ Hay $f(uv) + f(xu + xv + xuv) = f(xv) + f(xu + uv + xuv)$ Lấy $x = 1$ ta có $f(u) + 2f(uv) = f(u + 2uv)$, theo ví dụ 4 ta có điều phải chứng minh. Bài toán 9. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:$f(x)f(y) - f(x + y) = \sin x.\sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ Giải Thay $y = 0$ ta có $f(x)[f(0) - 1] = 0 \Rightarrow f(0) = 1$, vì dễ dàng nhận thấy $f(x) \equiv 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ không là nghiệm của phương trình. Thay $y = -x$ ta nhận được: $f(x)f(-x) - f(0) = -\sin^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)f(-x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}(1)$. Thay $x = \frac{\pi}{2}$ vào (1) ta được nên: $f\left(\frac{\pi}{2}\right).f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ Hoặc $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ thay vào hàm ta được: $-f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \Rightarrow f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \to f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ Hoặc $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ thay vào hàm ta được: $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \Rightarrow f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ Dễ dàng kiểm tra lại thấy $f(x) = \cos x$ là hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Bài toán 10. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$ (1) với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Giải Ta chứng minh nếu f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán thì hàm số $F(x) = f(x + 1) - f(x)$ sẽ thỏa mãn điều kiện hàm Cauchy $F(u + v) = F(u) + F(v)$ với mọi $(u, v) \in \Delta = \{(u, v) : u + v > 0$hoặc $u = v = 0$ hoặc $u + v \le -4\}$ Thật vậy, giả sử $f$là hàm số thỏa mãn điều kiện (1). Ta định nghĩa hàm số $f^*(x, y)$ bởi: $f^*(x, y) = f(x) + f(y) - f(xy)$ Dễ thấy rằng hàm f^* thỏa mãn phương trình hàm: $f^*(xy, z)+f^*(x, y) = f^*(x, yz)+f^*(y, z)(1)$ Mặt khác ta có $f^*(x, y) = f(x+y-xy)(2)$ Thay (2) vào (1) ta được: $f\left(xy + \frac{1}{y} - x\right) + f(x+y-xy) = f(1) + f\left(y + \frac{1}{y} - 1\right)$, với mọi $x, y \neq 0$ Đặt $xy + \frac{1}{y} - x = u+1$ và $x + y - xy = v + 1(3)$ ta nhận được: $f(u + 1) + f(v + 1) = f(1) + f(u + v + 1)$, với mọi u, v thỏa mãn điều kiện trên. Bằng việc cộng hai đẳng thức của (3) ta có $y + \frac{1}{y} = u + v + 2$, để có nghiệm $y \neq 0$ chỉ trong trường hợp $D = \{(u + v + 2)^2 - 4 = (u + v)(u + v + 4) \ge 0\}$. Điều kiện này xảy ra khi và chỉ khi hoặc là $u + v > 0$ hoặc $u + v = 0$ hoặc $u + v + 4 \le 0$. Bằng việc kiểm tra điều kiện ta thấy bài toán được thỏa. Nếu f là một nghiệm của bài toán thì f phải có dạng $f(x) = F(x - 1) + f(1)(1)$ với mọi x, trong đó F thỏa mãn phương trình hàm Cauchy $F(x + y) = F(x) + F(y)$ với mọi x, y. Chứng minh Theo chứng minh trên, thì $f$có dạng với F thỏa mãn phương trình Cauchy với mọi $(u, v) \in \Delta$. Ta sẽ chứng minh rằng Fthỏa mãn phương trình Cauchy với mọi (u, v) bất kỳ. Giả sử , khi đó tồn tại một số thực sao cho các điểm $(x, u), (x + u, v), (x, u + v)$ nằm trong Δ với việc xác định x là: cố định $(u, v) \in \Delta$ thì từ các bất đẳng thức $x + u > 0, x + u + v > 0$ ta tìm được điều kiện của x. Nhưng khi đó:

$F(u) = F(x + u) - F(x)$

$F(v) = F(x + u + v) - F(x + u)$ Suy ra từ các phương trình này ta có $F(u) + F(v) = F(u + v)$. Và bài

$F(u + v) = F(x + u + v) - F(x)$

toán được chứng minh.

Bài toán 14(VMO 1992 bảng B). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + 2xy) = f(x) + 2f(xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Biết $f(1991) = a$, hãy tính $f(1992)$ Giải Thay $x = 0$ ta được $f(0) = 0$. Thay $y = -1$ ta nhận được $f(x) = -f(-x)$. Thay $y = -\frac{1}{2}$ ta được $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$. Xét $x \neq 0$ và số thực t bất kỳ, đặt $y = \frac{t}{2x}$ ta nhận được: $f(x + t) = f(x) + 2f\left(\frac{t}{2}\right) = f(x) + f(t)$ Vậy f là hàm Cauchy nên $f(x) = kx$, với k là hằng số nào đó. Từ $f(1991) = a \Rightarrow k.1991 = a \Rightarrow k = \frac{a}{1991}$. Do đó $f(1992) = \frac{1992}{1991}a$ Bài toán 15. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên $(0, +\infty)$, có đạo hàm tại $x = 1$ và thỏa mãn điều kiện $f(xy) = \sqrt{x}f(y) + \sqrt{y}f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ Giải Xét các hàm số sau $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$. Từ giả thiết của bài toán ta có: $\sqrt{xy}.g(xy) = \sqrt{xy}.g(x) + \sqrt{xy}.g(y) \Leftrightarrow g(xy) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ Vậy $g(x) = \log_a x,\ x > 0$.

Từ đó ta có kết quả hàm số $f(x) = k.\sqrt{x}.\log_a x$ với $k \in \mathbb{R}$. Lại từ (1) nếu ta đặt $z = x + y$ thì $y = z - x$ và quan hệ (1) trở thành $f(z) = f(x).f(z-x)$, nếu với giả thiết $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì ta có thể viết lại như sau: $f(z-x) = \frac{f(z)}{f(x)}$, và ta đề xuất được bài toán sau đây: Bài toán 18. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)},\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ (2) Vì giả thiết là $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên chỉ có hàm số $f(x) = a^x (a > 0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

To be continued

.

3 Phương pháp quy nạp

Phương pháp này yêu cầu ta trước hết tính $f(0), f(1)$ rồi dựa vào đó tính $f(n)$ với $n \in \mathbb{N}$. Sau đó tính $f(n)$ với $n \in \mathbb{Z}$. Tính tiếp $f\left(\frac{1}{n}\right)$, từ đó suy ra biểu thức của $f(r)$ với $r \in \mathbb{Q}$. Phương pháp này thường sử dụng khi cần tìm hàm số xác định trên $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Ví dụ 3.1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(1) = 2, \quad f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \forall x, y \in \mathbb{Q}. \tag{11}$$

Giải

Cho $y = 1$ và sử dụng giả thiết $f(1) = 2$ ta được

$$f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{12}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(x+m) = f(x) + m, \forall x \in \mathbb{Q}, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Tiếp theo ta sẽ lần lượt chứng minh:

a) $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy trong (12) cho $x = 0$ ta tìm được $f(0) = 1$. Giả sử ta đã có $f(k) = k + 1$ thì

$$f(k+1) = f(k) + 1 = k + 1 + 1 = k + 2.$$

b) Tiếp theo ta chứng minh $f(m) = m+1, \forall m \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, trong (12) cho $x = -1$ ta được $f(-1) = 0$. Trong (11) cho $y = -1$ thì ta có

$$f(-x) = -f(x-1) + 1, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Khi đó với $m \in \mathbb{Z}, m < 0$ thì đặt $n = -m$, khi đó $n \in \mathbb{N}$ nên sử dụng kết quả trên và phần (a) ta được

$$f(m) = f(-n) = -f(n-1) + 1 = -n + 1 = m + 1.$$

c) Tiếp theo ta chứng minh $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{Q}$. Trước tiên ta tính $f\left(\dfrac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^+$, bằng cách trong (11) cho $x = n, y = \dfrac{1}{n}$ ta có

$$2 = (n+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1.$$

Lại theo (13) thì

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + n$$

thay vào phương trình trên ta được

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} + 1.$$

Từ đây thì với $x \in \mathbb{Q}$ thì x luôn được biểu diễn dưới dạng $x = \dfrac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+$, do đó

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\frac{m}{n}\right) \\
&= f\left(m.\frac{1}{n}\right) \\
&= f(m).f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= (m+1).\left(\frac{1}{n} + 1\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - m + 1 \\
&= (m+1)\left(\frac{1}{n} + 1\right) - \frac{1}{n} - 1 - m + 1 \\
&= \frac{m}{n} + 1 = x + 1
\end{aligned}$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Bài toán trên kết quả không thay đổi nếu ta làm trên tập $\mathbb{R}$ và không cần cho trước $f(1)$. Việc cho trước $f(1)$ giúp quá trình quy nạp thuận lợi hơn. Từ lời giải trên chỉ cần sử lý trên tập số vô tỉ. Tham khảo thêm về bài này trong bài 8.11.

Ví dụ 3.2. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) $f(0) = 0$, thật vậy chỉ cần thay $x = y = 0$ ta có được kết quả.

b) f là hàm chẵn. Đổi vai trò giữa x, y trong điều kiện ta có

$$f(x+y) + f(y-x) = 2\left(f(x) + f(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Và như vậy thì $f(x-y) = f(y-x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Do đó f là hàm chẵn nên ta chỉ cần làm việc trên $\mathbb{R}^+$.

c) $f(nx) = n^2 f(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Thật vậy, cho $x = y$ ta được

$$f(2x) = 4f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Giả sử ta đã có $f(nx) = n^2 f(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Khi đó thay $y = nx$ ta được

$$f\left((n+1)x\right) + f\left(-(n-1)x\right) = 2\left(f(x) + f(nx)\right),$$

hay

$$f\left((n+1)x\right) = 2\left(f(x) + n^2 f(x)\right) - (n-1)^2 f(x) = (n+1)^2 f(x).$$

d) $f(qx) = q^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall q \in \mathbb{Q}^+$. Thật vậy từ (c) thì

$$f(x) = \frac{1}{n^2} f(nx) \to f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2} f(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Với $q \in \mathbb{Q}^+$ thì $q = \dfrac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ nên

$$f(qx) = f\left(m.\frac{x}{n}\right) = m^2 f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m^2}{n^2} f(x) = q^2 f(x).$$

e) Do f liên tục trên $\mathbb{R}^+$ nên $f(x) = ax^2, \forall x \in \mathbb{R}^+$(với $a = f(1)$).

Thử lại thấy hàm số $f(x) = ax^2, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Quan hệ bài toán trên chính là đẳng thức hình bình hành quen thuộc. Đó là nếu $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ là hai vector thì ta có

$$|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 = 2\left(|\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2\right)$$

Bản chất của lời giải là chứng minh nếu hàm f liên tục và thỏa mãn hằng đẳng thức hình bình hành thì bắt buộc phải có dạng $f(x) = f(1)x^2$. Cũng cần lưu ý là điều kiện liên tục có thể thay bằng điều kiện đơn điệu của hàm số.

Ví dụ 3.3. Tìm tất cả các hàm số $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sao cho f đơn điệu và thỏa mãn điều kiện

$$(f(x) + f(y))^2 = f\left(x^2 - y^2\right) + f(2xy), \forall x \geq y \geq 0.$$

Giải

Cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

a) Trường hợp $f(0) = \dfrac{1}{2}$, thì thay $x = 1, y = 0$ ta lại được $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

(i) Nếu $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ thì thay $x = y = 1$ ta được $f(2) = \dfrac{1}{2}$. Khi đó ta thấy $f(0) > f(1), f(1) < f(2)$, mâu thuẫn với tính chất đơn điệu của hàm số.

(ii) Vậy $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Khi đó thay $x = y$ ta được

$$4\,(f(x))^2 = f\left(2x^2\right) + \frac{1}{2}.$$

Xét dãy số $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n^2$, thay vào quan hệ trên ta được

$$4\,(f(x_n))^2 = f\,(x_{n+1}) + \frac{1}{2}.$$

Bằng quy nạp ta được $f\,(x_n) = \dfrac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Vì $x_n \to \infty$ và f đơn điệu nên suy ra $f(x) = \dfrac{1}{2}$ với mọi $x \geq 0$.

b) Trường hợp $f(0) = 0$. Khi đó thay $y = 0$ ta được

$$f\left(x^2\right) = (f(x))^2, \forall x \geq 0 \to f(x) \geq 0, \forall x \geq 0.$$

Ngoài ra thay $x = y$ ta được $4\,(f(x))^2 = f(2x^2)$. Kết hợp với đẳng thức trên ta được

$$4f(x) = f(2x), \forall x \geq 0.$$

Trong phương trình hàm ban đầu, đặt $x = u + v, y = u - v$ thì ta được

$$\begin{aligned}[f(u+v) - f(u-v)]^2 &= f(4uv) + f\left(2(u^2 - v^2)\right)\\ &= 4\left[f(2uv) + f(u^2 - v^2)\right]\\ &= 4\,(f(u) + f(v))^2\,.\end{aligned}$$

Từ đây lấy căn bậc hai ta được

$$f(u+v)+f(u-v)=2\left(f(u)+f(v)\right),\forall u\geq v\geq 0.$$

Phương trình hàm này có nghiệm là $f(x)=f(1)x^2,\forall x\geq 0$. Ngoài ra dễ dàng tính được $f(1)=0$ hoặc $f(1)=1$.

Kết luận: Các hàm số thỏa mãn là $f(x)\equiv 0, f(x)\equiv \dfrac{1}{2}$ và $f(x)=x^2,\forall x\geq 0$.

Nhận xét: Bài toán trên xuất phát từ một hằng đẳng thức quen thuộc là $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$. Và điểm mấu chốt của bài toán là tính chất $f\left(x^2\right)=\left(f(x)\right)^2$, để suy ra $f(x)\geq 0$ khi $x\geq 0$.

Ví dụ 3.4. (China 1996) Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^3+y^3)=(x+y)(f^2(x)-f(x)f(y)+f^2(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(1996x)=1996f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Giải

a) Tính $f(0)$ và thiết lập cho $f(x)$.
Cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Cho $y=0$ ta được

$$f(x^3)=xf^2(x).$$

Nhận xét: $f(x)$ và x luôn cùng dấu. Từ đây ta có

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}f^2(x^{\frac{1}{3}}).$$

b) Thiết lập tập hợp tất cả các giá trị a mà $f(ax)=af(x)$.
Đặt $S=\{a>0:f(ax)=af(x),\forall x\in\mathbb{R}\}$.

- Rõ ràng $1\in S$.
- Ta chứng tỏ nếu $a\in S$ thì $a^{\frac{1}{3}}\in S$. Thật vậy

$$\begin{aligned}&axf^2(x)=af(x^3)=f(ax^3)=f\left((a^{\frac{1}{3}}x)^3\right)=a^{\frac{1}{3}}x.f^2(a^{\frac{1}{3}}x)\\&\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}f^2(x)=f^2(a^{\frac{1}{3}}x)\\&\Rightarrow a^{\frac{1}{3}}f(x)=f(a^{\frac{1}{3}}x)\end{aligned}$$

- Nếu $a,b\in S$ thì $a+b\in S$. Thật vậy

$$\begin{aligned}&f\left((a+b)x\right)=f\left((a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3\right)\\&=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\left[f^2(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})-f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}).f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})+f^2(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\right]\\&=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\left[a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right]x^{\frac{1}{3}}f^2(x^{\frac{1}{3}})=(a+b)f(x).\end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta chứng tỏ mọi $n\in\mathbb{N}$ đều thuộc S. Và bài toán ra là trường hợp đặc biệt với $n=1996$.

Nhận xét: 1. Nếu chỉ đơn thuần chứng minh kết quả của bài toán thì có thể quy nạp trực tiếp. Bằng cách khảo sát như trên ta sẽ thấy hết được tất cả các giá trị của $a > 0$ mà $f(ax) = af(x)$.

2. Do yêu cầu "đặc biệt" của bài toán, nên tự nhiên ta sẽ nghĩ ngay là có thể chứng minh điều đó đúng với mọi số tự nhiên, và qua đó, sẽ nghĩ ngay đến hướng quy nạp.

3. Việc suy ra dấu của $f(x)$ cùng dấu với x là quan trọng, nó giúp ta triệt tiêu bình phương mà không cần xét dấu, đây cũng là một điều đáng lưu ý trong rất nhiều bài tập khác.

4. Bài toán trên rất có thể xuất phát từ hằng đẳng thức $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Ví dụ 3.5. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = f^3(x) + f^3(y) + f^3(z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$$

Hint:
1. Tính $f(0)$ và chứng minh f là hàm lẻ.
2. Chứng tỏ $f(2) = 2f(1), f(3) = 3f(1)$. Chứng minh bằng quy nạp $f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$ 3. Trong chứng minh chuyển từ $n = k \geq 0$ sang $n = k+1$, ta sử dụng hằng đẳng thức sau: Nếu k chẵn thì $k = 2t$, ta có:

$$(2t+1)^3 + 5^3 + 1^3 = (2t-1)^3 + (t+4)^3 + (4-t)^3 \text{ khi } k = 2t$$

và nếu k lẻ thì $k = 2t - 1$ khi đó $n = 2t$ luôn được viết dưới dạng $2t = 2^j(2i+1)$, và đẳng thức trên chỉ cần nhân cho 2^{3j}

Ví dụ 3.6. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$f(1) > 0 \text{ và } f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n), \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Hint:
1. Tính $f(0) \Rightarrow f(m^2 + n^2) = f(m^2) + f(n^2)$
2. Chứng minh $f(n) = n, \forall n \leq 10$. Với $n > 10$ ta sử dụng các đẳng thức sau:

$$(5k+1)^2 + 2^2 = (4k+2)^2 + (3k-1)^2$$

$$(5k+2)^2 + 1^2 = (4k+1)^2 + (3k+2)^2$$

$$(5k+3)^2 + 1^2 = (4k+3)^2 + (3k+1)^2$$

$$(5k+4)^2 + 2^2 = (4k+2)^2 + (3k+4)^2$$

$$(5k+5)^2 = (4k+4)^2 + (3k+3)^2$$

4 Khai thác tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh, chẵn lẻ của hàm số

Trước tiên ta nhắc lại các khái niệm cơ bản này.

a) Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là đơn ánh thì từ $f(x) = f(y)$ ta suy ra được $x = y$.

b) Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là toàn ánh thì với mỗi $y \in \mathbb{R}$, tồn tại $x \in \mathbb{R}$ để $f(x) = y$.

c) Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là song ánh thì ta có cả hai đặc trưng trên.

Nếu một hàm số mà đơn ánh chúng ta rất hay dùng thủ thuật tác động f vào cả hai vế, nếu một hàm f toàn ánh ta hay dùng: Tồn tại một số b sao cho $f(b) = 0$, sau đó tìm b. Nếu quan hệ hàm là hàm bậc nhất của biến ở vế phải thì có thể nghĩ tới hai quan hệ này.

Ví dụ 4.1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x) + y\right) = x + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Giải

Nhận xét, hàm đồng nhất 0 không thỏa mãn bài toán. Xét $f(x) \not\equiv 0$.

a) f đơn ánh, thật vậy, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì

$$f\left(f\left(x_2\right) + y\right) = f\left(f\left(x_2\right) + y\right) \to x_1 + f(y) = x_2 + f(y) \to x_1 = x_2.$$

b) f toàn ánh, thật vậy, vì tồn tại y_0 sao cho $f(y_0) \neq 0$. Do đó vế phải của điều kiện là một hàm số bậc nhất của x nên có tập giá trị là $\mathbb{Q}$.

c) Tính $f(0)$, cho $x = y = 0$ và sử dụng tính đơn ánh ta được

$$f\left(f(0)\right) = f(0) \to f(0) = 0.$$

Từ đó thay $y = 0$ ta được

$$f\left(f(x)\right) = x, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

d) Thay x bởi $f(x)$ và sử dụng kết quả trên(*và điều này đúng cho với mọi* $x \in \mathbb{Q}$ vì f là toán ánh) thì

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Từ đây ta được $f(x) = ax$ thay vào bài toán ta nhận $f(x) \equiv x$ hoặc $f(x) \equiv -x$ trên $\mathbb{Q}$.

Nhận xét: Nếu yêu cầu bài toán trên tập $\mathbb{R}$ thì cần thêm tính chất đơn điệu hoặc liên tục. Cụ thể, các bạn có thể giải lại bài toán sau (**THTT, 2010**): Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x + f(y)\right) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 4.2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(xf(y) + x\right) = xy + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Thay $x = 1$ vào điều kiện hàm ta được

$$f\left(f(y)+1\right) = y + f(1), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra f là một song ánh. Lấy $x = 1, y = 0$ ta được

$$f\left(f(0)+1\right) = f(1) \to f(0) = 0 \text{ do } f \text{đơn ánh.}$$

Bây giờ với $x \neq 0$, đặt $y = -\dfrac{f(x)}{x}$ thay vào điều kiện hàm ta được

$$f\left(xf(y)+x = 0 = f(0)\right) \to xf(y) = x \text{ do } f \text{đơn ánh,}$$

hay $f(y) = -1$, tức là

$$f\left(-\frac{f(x)}{x}\right) = f(y) = -1 = f(b),$$

với b là một số thực nào đó(do f là một toàn ánh). Vậy $f(x) = -bx, \forall x \neq 0$. Kết hợp với $f(0) = 0$ thì viết gộp thành $f(x) = -bx, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào điều kiện hàm số ta có được hai hàm thỏa mãn là $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -x$.

Nhận xét: Bài toán này có thể giải bằng cách thế biến như sau mà không cần dùng đến tính song ánh của hàm số. Thay $x = 1$ ta được

$$f\left(f(y)+1\right) = y + f(1), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 4.3. (Đề nghị IMO 1988) Xác định hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(f(n)+f(m)) = m + n, \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Giải

a) Trước tiên ta kiểm tra f đơn ánh. Thật vậy giả sử $f(n) = f(m)$, khi đó

$$f\left(2f(n)\right) = f\left(f(n)+f(n)\right) = 2n,$$

và

$$f\left(2f(n)\right) = f\left(f(m)+f(m)\right) = 2m.$$

Do đó $m = n$, nên f đơn ánh.

b) Ta tính $f\left(f(n)\right)$ theo các bước sau: cho $m = n = 0$ trong (14) thì ta được $f\left(2f(0)\right) = 0$, lại cho $m = 2f(0)$ vào trong (14) thì ta được

$$f\left(f(n)\right) = n + 2f(0).$$

c) Tác động f vào cả hai vế của (14) và sử dụng kết quả trên, ta được

$$f\left(f\left(f(n)+f(m)\right)\right)=f(n)+f(m)+2f(0).$$

Ngoài ra theo quan hệ đề bài thì

$$f\left(f\left(f(n)+f(m)\right)\right)=f(n+m).$$

Từ đây ta có

$$f(n+m)=f(n)+f(m)+2f(0).$$

Cho $m=n=0$ thì $f(0)=0$, do đó quan hệ trên trở thành hàm cộng tính. Vậy $f(n)=an$. Thay vào quan hệ bài toán ta được

$$f(n)=n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

- *Nhận xét*: Quan hệ đơn ánh của bài toán này không cần thiết trong lời giải. Và bài toán này có thể chứng minh bằng quy nạp trên $\mathbb{N}$.

Cách 2. Nếu xét trên $\mathbb{Z}^+$ thì ta có thể chứng minh bằng quy nạp $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{N}$. Tức là, dùng phương pháp, ta chứng minh không còn tồn tại hàm số nào khác. Trước tiên ta tính $f(1)$. Giả sử $f(1)=t>1$, đặt $s=f(t-1)>0$. Nhận thấy rằng nếu $f(m)=n$ thì

$$f(2n)=f\left(f(m)+f(m)\right)=2m.$$

Như vậy

$$f(2t)=2,f(2s)=2t-2.$$

Nhưng khi đó thì

$$2s+2t=f\left(f(2s)+f(2t)\right)=f(2t)=2\rightarrow t<1,$$

điều này vô lý. Vậy $f(1)=1$. Giả sử ta có $f(n)=n$ thì

$$f(n+1)=f\left(f(n)+f(1)\right)=n+1.$$

Vậy $f(n)=n,\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Ví dụ 4.4. (Balkan 2000) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=\left(f(x)\right)^2+y,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

Giải

a) Ta tính $f\left(f(y)\right)$ bằng cách cho $x=0$ vào (15) ta được

$$f\left(f(y)\right)=\left(f(0)\right)^2+y,\forall y\in\mathbb{R}.$$

b) Chứng tỏ f đơn ánh. Thật vậy nếu $f(y_1)=f(y_2)$ thì $f\left(f(y_1)\right)=f\left(f(y_2)\right)$. Từ đây theo phần (a) thì

$$f^2(0)+y_1=\left(f(0)\right)^2+y_2\Rightarrow y_1=y_2.$$

c) Chứng tỏ f toàn ánh vì vế phải của (15) là một hàm bậc nhất của y nên có tập giá trị bằng $\mathbb{R}$. Kết hợp hai điều trên ta thu được f là một song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

d) Tính $f(0)$. Dựa vào tính toàn ánh thì phải tồn tại $a \in \mathbb{R}$ để $f(a) = 0$. Thay $x = y = a$ vào (15) ta được
$$f\left(af(a) + f(a)\right) = \left(f(a)\right)^2 + a \Rightarrow f(0) = a.$$
Do f là một song ánh nên $a = 0$, tức $f(0) = 0$. Từ đây theo (a) thì
$$f\left(f(x)\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Trong (15) cho $y = 0$ ta được
$$f\left(xf(x)\right) = \left(f(x)\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Trong quan hệ trên, thay x bởi $f(x)$ ta được(*thay được đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ vì f là song ánh*)
$$\begin{aligned}&f\left(f(x).f\left(f(x)\right)\right) = \left[f\left(f(x)\right)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow f\left(f(x)\cdot x\right) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
Từ đây suy ra với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì hoặc là $f(x) = x$ hoặc là $f(x) = -x$. Chúng ta chứng tỏ là phải có sự đồng nhất $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc là $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ chứ không thể xảy ra sự đan xen giữa hai giá trị.

Thật vậy, giả sử tồn tại $a \neq 0, n \neq 0$ sao cho $f(a) = -a, f(b) = b$ thì khi đó trong quan hệ (15) thay $x = a, y = b$ ta được
$$f\left(-a^2 + b\right) = a^2 + b.$$
Nhưng vì giá trị của $f(-a^2 + b)$ chỉ có thể là $-a^2 + b$ hoặc là $a^2 - b$. Nhưng nhận thấy $a^2 + b$ không thể bằng với một giá trị nào trong hai giá trị trên. Vậy điều giả sử là sai.

Kiểm tra lại thấy hai hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc là $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4.5. (IMO 1992) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f\left(x^2 + f(y)\right) = \left(f(x)\right)^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Giải

a) f đơn ánh, thật vậy nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì
$$f\left(x^2 + f(y_1)\right) = f\left(x^2 + f(y_2)\right) \to \left(f(x)\right)^2 + y_1 = \left(f(x)\right)^2 + y_2 \to y_1 = y_2.$$

b) f toàn ánh, vì vế trái làm hàm bậc nhất theo y nên f có tập giá trị là toàn bộ $\mathbb{R}$. Kết hợp hai điều trên suy ra f là một song ánh.

c) Tính $f(0)$. Do f song ánh nên tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = 0$. Thay $x = 0$ ta được
$$f\left(f(y)\right) = \left(f(0)\right)^2 + y.$$
Thay $x = y = a$ vào (17) và sử dụng kết quả trên, ta được
$$\begin{aligned}&f\left(a^2\right) = a\\ &\to f(a) = f\left(f\left(a^2\right)\right)\\ &\to 0 = \left(f(0)\right)^2 + a^2\\ &\to f(0) = a = 0.\end{aligned}$$

Từ đây ta thu được quan hệ quen thuộc

$$f\left(f(x)\right) = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(x^2\right) = \left(f(x)\right)^2 \text{ (thay } y = 0\text{)}.$$

Từ đây thì nếu $x \geq 0$ thì $f(x) \geq 0$, ngoài ra $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$. Bây giờ lấy $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$ thì

$$f(x+y) = f\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + f\left(f(y)\right)\right) = \left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 + f(y) = f\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right) + f(y),$$

hay

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = -x$ ta được $f(-x) = -f(x)$ hay f là hàm lẻ. Do đó nếu $x < 0$ thì

$$f(x+y) = f\left(-(-x-y)\right) = -f(-x-y) = -f(-x) - f(-y) = f(x) + f(y), \forall y \in \mathbb{R}, \forall x < 0.$$

Kết hợp hai điều trên ta thu được quan hệ cộng tính của hàm f

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra sử dụng tính chất $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ ta còn có thêm f đơn điệu tăng. Thật vậy, với $x > y$ thì $x - y > 0$ nên $f(x-y) > 0$, do đó

$$f(x) = f\left((x-y) + y\right) = f(x-y) + f(y) > f(y).$$

Hàm f cộng tính và đơn điệu nên có dạng $f(x) = ax$, thay vào ta được $a = 1$. Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 4.6. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x + f(y)\right) = x + f(y) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Ta có thể viết lại quan hệ hàm dưới dạng

$$f\left(x + f(y)\right) = \left(f(y) + 1\right)x + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

a) Nếu $f(x) \equiv -1$, dễ dàng kiểm tra hàm này thỏa mãn.

b) Xét $f(x)$ không đồng nhất -1. Khi đó phải tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ để $f\left(y_0\right) \neq -1$. Khi đó vế phải của (18) là hàm bậc nhất của x nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Điều này chứng tỏ f là toàn ánh.

   Cho $x = 0$ ta thu thêm được một quan hệ nữa là

$$f\left(f(x)\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, do f toàn ánh nên sẽ tồn tại y(phụ thuộc vào x) sao cho $x = f(y)$, khi đó

$$f(x) = f\left(f(y)\right) = f(y) = x.$$

   Tuy nhiên, thay hàm này vào (18) thì không thỏa mãn.

Kết luân: Hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) \equiv -1$.

Ví dụ 4.7. (Việt Nam TST 2004) Tìm tất cả các giá trị của a, sao cho tồn tại duy nhất một hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = (f(x))^2 + ay, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Giải

Nhận thấy nếu $a = 0$ thì có hai hàm số thỏa mãn là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv 1$. Do đó ta xét trường hợp $a \neq 0$.

a) Hàm f toàn ánh. Thật vậy do vế phải là hàm bậc nhất của y nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Do đó f toàn ánh, khi đó tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(b) = 0$.

b) $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$. Thay $y = b$ vào (19) ta được

$$f\left(x^2 + b\right) = (f(x))^2 + ab. \tag{20}$$

Từ phương trình trên ta thấy

$$f\left(x^2 + b\right) = (f(-x))^2 + ab.$$

Do đó ta được $(f(x))^2 = (f(-x))^2$ hay $|f(x)| = |f(-x)|, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ điều này ta thu được thêm $f(-b) = 0$. Lại thay $y = -b$ vào (19) ta được

$$f\left(x^2 - b\right) = (f(x))^2 - ab. \tag{21}$$

Từ (20) và (21) ta nhận được

$$f\left(x^2 + b\right) - f\left(x^2 - b\right) = 2ab, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = 0$ vào đẳng thức trên ta được $2ab = f(b) - f(-b) = 0 \to b = 0$. Vậy $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$.

c) $a = 2$. Trong (19) cho $y = 0$ thì $f(x^2) = (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây cho $x = 1$ ta được $f(1) = (f(1))^2 \to f(1) = 1$(vì $f(1) \neq 0$ do phần (b)). Lại trong (19) cho $y = 1$ thì được

$$f\left(x^2 + 2\right) = (f(x))^2 + a = f\left(x^2\right) + a.$$

Thay $x = 0$ vào đẳng thức trên thì $a = f(2)$. Do vậy

$$\begin{aligned} a^2 &= (f(2))^2 \\ &= f(2^2) = f(4) \\ &= f\left((\sqrt{2})^2 + 2\right) \\ &= f(2) + a = 2a. \end{aligned}$$

Vậy $a = 2$ vì $a \neq 0$.

Bây giờ ta giải phương trình hàm

$$f\left(x^2+y+f(y)\right)=(f(x))^2+2y, \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{22}$$

Thay $y=-\dfrac{(f(x))^2}{2}$ vào (22) ta được

$$f\left(x^2-\frac{(f(x))^2}{2}\right)+f\left(-\frac{(f(x))^2}{2}\right)=0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì tính chất của f là $f(x)=0$ khi và chỉ khi $x=0$ nên

$$f\left(-\frac{(f(x))^2}{2}\right)=-x^2+\frac{(f(x))^2}{2}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lại trong (22) và sử dụng kết quả trên ta được

$$f\left(x^2-y^2\right)=(f(x))^2-(f(y))^2=f(x^2)-f(y^2), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ đẳng thức này cho $x=0$ thì $f\left(-y^2\right)=-f(y^2)$ tức f là hàm lẻ. Nên quan hệ trên có thể viết lại dưới dạng

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lại sử dụng $(f(x))^2=f\left(x^2\right)$ thì $(f(x+y))^2=f\left((x+y)^2\right)$, khai triển và sử dụng tính cộng tính ta được

$$f(xy)=f(x)f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Hàm f vừa cộng tính, vừa nhân tính nên $f(x)\equiv x$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn đề bài.

Nhận xét: Một phần của bài toán trên xuất hiện đầu tiên trên tạp chí AMM, được đề xuất bởi Wu Wei Chao, và được chọn là một bài toán chọn đội tuyển Bungari năm 2003 và chọn đội tuyển Iran 2007, trong đó chỉ giải quyết cho trường hợp $a=2$.

Ví dụ 4.8. (Đề nghị IMO 2002) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)+y\right)=2x+f\left(f(y)-x\right), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Giải

a) f toàn ánh, thật vậy thay $y=-f(x)$ ta được

$$f\left(f\left(-f(x)\right)-x\right)=f(0)-2x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do vế phải là hàm bậc nhất của x nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

b) Vì f toàn ánh nên tồn tại a sao cho $f(a)=0$. Thay $x=a$ vào đề bài thì

$$f(y)-a=f\left(f(y)-a\right)+a.$$

Vì f toàn ánh nên quan hệ trên có thể viết lại

$$f(x)=x-a \text{ với } a \text{ là hằng số.}$$

Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn.

Ví dụ 4.9. (THTT T8/360). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x).f(y)=f\left(x+yf(x)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}^+. \tag{23}$$

Giải

Giả sử f là hàm số thỏa mãn bài toán.

a) Nếu $f(x)\in(0,1),\forall x\in\mathbb{R}^+$ thì khi thay $y=\dfrac{x}{1-f(x)}$ vào (23) ta được

$$f(x)f\left(\frac{x}{1-f(x)}\right)=f\left(\frac{x}{1-f(x)}\right),\forall x\in\mathbb{R}^+,$$

suy ra $f(x)=1$, trái với giả thiết $f(x)\in(0,1)$. Vậy giá trị của hàm số f luôn lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Nếu tồn tại giá trị $a\in\mathbb{R}^+$ sao cho $f(a)=1$, thì khi đó thay $x=a$ ta được

$$f(y+a)=f(y),\forall y\in\mathbb{R}^+.$$

Ngoài ra, ứng với mỗi $x\in\mathbb{R}^+$ cố định và $h\in\mathbb{R}^+$ cho trước, luôn tồn tại $y\in\mathbb{R}^+$ để $yf(x)=h$. Do đó

$$f(x+h)=f\left(x+yf(x)\right)=f(x)f(y)\geq f(x).$$

Kết hợp hai điều trên bắt buộc phải có $f(x)\equiv 1$. Kiểm tra lại thấy hàm số này thỏa mãn.

c) Nếu $f(x)>1,\forall x\in\mathbb{R}^+$ thì f đơn ánh. Thật vậy, khi đó

$$f(x+h)=f\left(x+yf(x)\right)=f(x)f(y)>f(x),\forall x,h\in\mathbb{R}^+.$$

Chứng tỏ f là hàm đồng biến ngặt trên $\mathbb{R}^+$, do đó nó là một đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Đổi vai trò của x và y trong (23) ta có

$$f\left(y+xf(x)\right)=f\left(x+yf(x)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Vì f đơn ánh nên

$$y+xf(y)=x+yf(x),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Từ đây ta có

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}=\frac{f(y)}{y}-\frac{1}{y},\forall x,y\in\mathbb{R}^+,$$

hay

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}=a,\forall x\in\mathbb{R}^+\to f(x)=ax+1,a>0.$$

Thử lại thấy hai hàm số $f(x)\equiv 1$ hoặc $f(x)=ax+1,a>0,\forall x\in\mathbb{R}^+$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 4.10. (USA 2002) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2-y^2\right)=xf(x)-yf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Giải

a) $f(0) = 0$ (thay $x = y = 0$).

b) f là hàm lẻ, thật vậy

$-xf(-x) - yf(y) = f\left((-x)^2 - y^2\right) = f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \to f(x) = -f(-x), \forall x \neq 0.$

Từ đây ta chỉ tính toán với $x, y \geq 0$.

c) $f(x) = f(x-y) + f(y)$ (1). Cho $x = 0$ ta được $f(x^2) = xf(x)$, thay vào quan hệ hàm ta được

$$f\left(x^2\right) = f\left(x^2 - y^2\right) + f\left(y^2\right) \to f(u) = f(u-v) + f(v), \forall u, v \geq 0.$$

d) $f(2t) = 2f(t)$, chỉ cần thay $x = 2t, y = t$ vào (1).

e) Tính $f(2t+1)$ theo hai cách, trước tiên với $x = t+1, y = 1$ thế vào (1) ta được

$$f(t+1) = f(t) + f(1).$$

Thay $x = t+1, y = t$ vào điều kiện ban đầu cùng với sử dụng kết quả trên, ta được

$$f(2t+1) = (t+1)f(t+1) - tf(t) = f(t) + (t+1)f(1).$$

Ngoài ra, thay $2t+1, y = 1$ vào trong (1) ta được

$$f(2t+1) = f(2t) + f(1) = 2f(t) + f(1).$$

Kết hợp hai kết quả trên ta được

$$2f(t) + f(1) = f(t) + (t+1)f(1) \to f(t) = tf(1), \forall t \geq 0.$$

Vậy $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, a$ là hằng số. Kiểm tra lại thấy hàm số này thỏa mãn.

Nhận xét: 1. Quan hệ (1) là quan hệ cộng tính. Tuy nhiên nếu ta dùng tính cộng tính ở đây thì chỉ thu được kết quả trên $\mathbb{Q}$. Và giả thiết của bài toán không thể khai thác thêm được tính chất liên tục hoặc đơn điệu nên không thể có được kết quả hàm $f(x) = ax$. Cách tính $f(2t+1)$ theo hai cách trên là một ý tưởng hay, mang tư tưởng của cách tính sai phân.

2. Nếu bài toán có thêm giả thiết $(f(x))^2 = f(x^2)$ thì bằng các khai triển $(f(x+1))^2 = (f(x+1))^2$ theo tính chất cộng tính, ta thu được quan hệ nhân tính, từ đó bài toán dễ dàng giải hơn.

Ví dụ 4.11. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left((1+x)f(y)\right) = yf\left(f(x)+1\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Rõ ràng nhìn từ quan hệ hàm ta thấy nếu hàm số f là đơn ánh thì bài toán trở nên rất dễ dàng. Thật vậy nếu hàm f đơn ánh thì thay $y = 1$ ta được

$$f\left((1+x)f(1)\right) = f\left(f(x)+1\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây do f đơn ánh nên $(1+x)f(1) = f(x)+1$, hay $f(x)$ có dạng hàm số bậc nhất $f(x) = ax+b$. Thay lại vào quan hệ hàm ta được $a = 1, b = 0$. Vậy trong trường hợp này có hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Vấn đề còn lại là nếu hàm f không đơn ánh. Tức là tồn tại $y_1 \neq y_2$ mà $f(y_1) = f(y_2)$. Khi đó ta có

$$y_1 f(f(x)+1) = f((1+x)f(y_1))\, f((1+x)f(y_2)) = y_2 f(f(x)+1), \forall x, \in \mathbb{R}.$$

Từ điều trên thì phải có $f(f(x)+1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào quan hệ hàm ta phải có $f((1+x)f(y)) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại y_0 sao cho $f(y_0) \neq 0$ thì ta có $f((1+x)f(y_0)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) \equiv 0$(mâu thuẫn). Vậy chứng tỏ không tồn tại y_0 để $f(y_0) \neq 0$, tức $f(y) \equiv 0$. Từ đây ta có hàm đồng nhất $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét: Quan hệ đơn ánh trong bài toán này chính là điểm mấu chốt của lời giải.

Ví dụ 4.12. Xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, đồng thời thỏa mãn hai điều kiện:

$$f(2) = 2 \text{ và } f(mn) = f(m)f(n), \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 4.13. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Hint:
1. Nhận thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn. Xét $f(x) \neq 0$.
2. Kiểm tra f đơn ánh, cùng với f liên tục, $f(1) > f(0)$ nên f tăng ngặt.
3. Tác động f vào hai vế, so ánh $f(xf(y))$ và $xf(y)$.
Đáp số: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét: Bài toán này cũng có thể dùng phép thế thích hợp để đưa về hàm nhân tính

Ví dụ 4.14. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn:

$$f(f(n)+m) = n + f(m+2003), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Giải

a) Trước tiên ta chứng minh f đơn ánh. Thật vậy nếu $f(n_1) = f(n_2)$ thì

$$\begin{aligned} &f(f(n_1)+m) = f(f(n_2)+m) \\ \to &n_1 + f(m+2003) = n_2 + f(m+2003) \to n_1 = n_2 \end{aligned}$$

b) Thay $m = f(1)$ ta có

$$\begin{aligned} f(f(n)+f(1)) &= n + f(f(1)+2003) \\ &= n+1+f(2003+2003) \\ &= f(f(n+1)+2003) \end{aligned}$$

Vì f đơn ánh nên $f(n)+f(1) = f(n+1)+2003$ hay $f(n+1) = f(n)+f(1)-2003$. Điều này dẫn đến $f(n+1)-f(n) = f(1)-2003$, tức $f(n)$ có dạng như một cấp số cộng, với công sai là $f(1)-2003$, số hạng đầu tiên là $f(1)$. Vậy $f(n)$ có dạng $f(n) = f(1)+(n-1)(f(1)-2003)$, tức $f(n) = an+b$. Thay vào quan hệ hàm ta được $f(n) = n+2003, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

5 Khai thác tính đơn điệu của hàm số

Trong mục này, ta xét một số bài toán giải phương trình hàm có sử dụng đến tính đơn điệu của hàm số. Một số điều cần lưu ý:

a) Nếu f cộng tính và đơn điệu trên $\mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{R}^+$) thì $f(x) = kx$.

b) Nếu f đơn điệu thực sự thì f là đơn ánh.

c) Trong một vài trường hợp, nếu ta dự đoán được công thức của hàm số chẳng hạn $f(x) = g(x)$ thì có thể xét $f(x) > g(x)$ và $f(x) < g(x)$, sau đó sử dụng tính đơn điệu của hàm f để dẫn tới điều vô lý.

d) Nếu hàm f đơn điệu và ta đã có công thức của f trên tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ thì dùng kỹ thuật chọn hai dãy hữu tỉ đơn điệu ngược nhau, rồi sau đó chuyển qua giới hạn.

Ví dụ 5.1. Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) Ta chứng minh f đơn ánh.
Thật vậy giả sử $f(x_1) = f(x_2)$, khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + f(x_1)) = f(x + f(x_2)) \Rightarrow f(x) + x_1 = f(x) + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

b) Lại thay $x = 0$ thì

$$f(f(y)) = f(0) + y \text{ hay } f(f(x)) = x + f(0) \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Bây giờ thay $x = f(x)$ vào quan hệ hàm thì

$$f\left(f(x) + f(y)\right) = f(f(x)) + y = x + y + f(0) = f(0 + f(x + y)).$$

Do f đơn ánh nên $f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Vì f đơn điệu và cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = kx$. Thay vào quan hệ hàm ta tìm được $k = \pm 1$. Vậy $f(x) = x$ hay $f(x) = -x$ là những hàm số cần tìm.

Ví dụ 5.2. Tìm tất cả các hàm tăng nghiêm ngặt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) Tính $f\left(f(x)\right)$.
Cho $y = 0$ ta được

$$f(f(x)) = f(x) + 1.$$

b) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.
Thay x bởi $f(x)$ và sử dụng kết quả trên ta có

$$f(f(f(x))+y)=f(f(x)+y)+1 \Rightarrow f(f(x)+1+y)=f(x+y)+1+1. \tag{24}$$

Thay y bởi $f(y)$ ta được

$$f(f(x)+f(y))=f(x+f(y))+1=f(x+y)+1+1. \tag{25}$$

Từ (24) và (25) ta được

$$f(f(x)+y+1)=f(f(x)+f(y)).$$

Vì f là hàm đơn điệu nên

$$f(x)+y+1=f(x)+f(y) \Rightarrow f(x)=x+1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x)=x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 5.3. (Hy lạp 1997) Giả sử $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn ba điều kiện:

(a) f tăng nghiêm ngặt.

(b) $f(x)>-\frac{1}{x}$ với mọi $x>0$ và

(c) $f(x)f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=1$ với mọi $x>0$.

Tính $f(1)$.

Giải

Đặt $t=f(1)$. Thế $x=1$ vào (c), ta được $tf(t+1)=1$. Do đó $t\neq 0$ và $f(t+1)=\frac{1}{t}$. Lại đặt $x=t+1$ vào trong (c) ta được

$$f(t+1)f\left(f(t+1)+\frac{1}{t+1}\right)=1.$$

Khi đó

$$f\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)=t=f(1).$$

Do f là hàm tăng nghiêm ngặt nên

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=1.$$

Giải ra ta được $t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Nếu $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$, thì

$$1<t=f(1)<f(1+t)=\frac{1}{t}<1$$

mâu thuẫn. Do đó $f(1)=t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Chú ý là hàm số

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$$

là một hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5.4. Tìm tất cả các hàm số $f : [1;+\infty) \to [1;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(xf(y)\right) = yf(x), \forall x \in [1;+\infty).$$

Giải

a) f là hàm đơn ánh. Thật vậy nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì

$$f\left(xf(y_1)\right) = f\left(xf(y_2)\right. \Leftrightarrow y_1 f(2x) = y_2 f(2x), \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

(điều trên đúng vì miền giá trị của hàm số nằm trong $[1;+\infty)$, tức là khác 0).

b) Tính $f(1)$.
Cho $x = y = 1$ thì $f\left(f(1)\right) = f(1)$, do f đơn ánh nên $f(1) = 1$.

c) Cho $x = 1$ thì $f\left(f(y)\right) = y$.

d) Với $y > 1$ thì $f(y) > 1$(do f đơn ánh). Với $x > y \geq 1$ thì

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}.y\right) = f\left(\frac{x}{y}.f(f(y))\right) = f(y).f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y).$$

Suy ra f đồng biến trên $[1;+\infty)$.

e) Ta chứng minh $f(x) = x, \forall x \in [1;+\infty)$. Thật vậy, giả sử có $x_0 \in [1;+\infty)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Nếu $f(x_0) > x_0$ thì

$$f\left(f(x_0)\right) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0)$$

vô lý. Tương tự cho trường hợp ngược lại. Vậy $f(x) = x, \forall x \in [1;+\infty)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5.5. (**Iran 1997**) Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm giảm thỏa mãn

$$f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f[f(x + f(y)) + f(y + f(x))], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f\left(f(x)\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

a) Làm xuất hiện $f\left(f(x)\right)$.
Cho $y = x$ ta được

$$f(2x) + f(2f(x)) = f\left(2f(x + f(x))\right). \tag{26}$$

Thay $x = f(x)$ trong vào trong (26) ta được

$$f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f\left(2f(f(x) + f(f(x)))\right). \tag{27}$$

Lấy (27) trừ cho (26) ta được

$$f\left(2f\left(f(x)\right)\right) - f(2x) = f\left(2f\left(f(x) + f\left(f(x)\right)\right)\right) - f\left(2f\left(x + f(x)\right)\right). \tag{28}$$

b) Sử dụng tính chất hàm f là hàm giảm. Giả sử tồn tại x_0 sao cho $f(f(x_0)) > x_0$, khi đó $2f(f(x_0)) > 2x_0$. Do f là hàm giảm nên $f(2f(f(x_0))) < f(2x_0)$. Do đó vế trái của (28) nhỏ hơn 0. Vậy

$$\begin{aligned} &f(2f(f(x_0)+f(f(x_0)))) - f(2f(x_0+f(x_0))) < 0 \\ &\Rightarrow f(2f(f(x_0)+f(f(x_0)))) < f(2f(x_0+f(x_0))). \end{aligned}$$

Lại do f là hàm giảm nên

$$2f(f(x_0)+f(f(x_0))) > 2f(x_0+f(x_0)) \Rightarrow f(x_0)+f(f(x_0)) < x_0+f(x_0) \Rightarrow f(f(x_0)) < x_0.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn.
Nếu tồn tại x_0 sao cho $f(f(x_0)) < x_0$ thì lập luận tương tự như trên ta cũng dẫn đến điều vô lý. Vậy $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5.6. (**Italy 2000**)

a) Tìm tất cả các hàm đơn điệu ngặt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y)) = f(x)+y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 1$, không tồn tại hàm đơn điệu ngặt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x+f(y)) = f(x)+y^n, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Hàm đơn điệu ngặt thì đơn ánh. Ngoài ra dễ thấy f là một song ánh.

a) Thế $x = y = 0$ ta được $f(f(0)) = f(0)$. Do f đơn ánh nên $f(0) = 0$. Từ đó ta được quan hệ

$$f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó với mọi $z \in \mathbb{R}$, thay $y = f(z)$ vào quan hệ hàm ta được

$$f(x+z) = f(x)+f(z), \forall x, z \in \mathbb{R}.$$

Từ tính chất cộng tính của hàm f và tính đơn điệu ngặt của f, suy ra f có dạng $f(x) = ax$. Thay vào hàm ban đầu ta được $f(x) \equiv x$ hoặc $f(x) \equiv -x$ là hai hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách khác: Ta có thể kiểm tra trực tiếp hai hàm số này như sau. Xét trường hợp f là hàm tăng, giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) > x_0$, thì do f là hàm tăng nên

$$f(f(x_0)) > f(x_0) \to x_0 > f(x_0),$$

vô lý, tương tự cho trường hợp $f(x_0) < x_0$. Vậy $f(x) \equiv x$. Tương tự cho hàm giảm.

b) Trước tiên ta khẳng định n phải là số lẻ. Thật vậy vì f đơn ánh nên với $y \neq 0$ thì $f(y) \neq f(-y)$ dẫn đến
$$f(x+f(y)) \neq f(x+f(-y)) \to f(x)+y^n \neq f(x)+(-y)^n \to y^n \neq (-y)^n.$$
Nếu n chẵn thì đẳng thức trên vô lý, vậy n phải là số nguyên lẻ.

Lập luận tương tự như phần (a) ta vẫn thu được
$$f(0)=0, f(f(x))=x^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Tác động f vào cả hai vế của đẳng thức cuối ta được
$$f^n(y)=f(f(f(y)))=f(y^n).$$
Do đó ta thu được quan hệ dưới đây
$$\begin{aligned} f(x+y^n) &= f(x+f(f(y))) \\ &= f(x)+f^n(y) \\ &= f(x)+f(y^n), \forall x,y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{29}$$
Vì do n lẻ nên ta thu được tính cộng tính $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$. Vì f đơn điệu nên có dạng $f(x)=ax$, thay vào ta thấy không thỏa mãn. Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có thể tiếp cận cách khác mà không qua tính cộng tính của hàm số như sau. Ta có $f(f(1))=1$. Nếu f là hàm tăng, thì lập luận giống như phần (a) ta được $f(1)=1$. Khi đó
$$f(2)=f(1+f(1))=f(1)+1^n=2,$$
và
$$2^n=f(f(2))=f(2)=2,$$
mâu thuẫn. Nếu f là hàm giảm thì lập luận tương tự.

Ví dụ 5.7. (APMO 1989) Xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn ba điều kiện dưới đây:

(i) Hàm f có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

(ii) Hàm f tăng ngặt trên $\mathbb{R}$.

(iii) $f(x)+f^{-1}(x)=2x, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó f^{-1} là hàm ngược của f.

Giải

Ta dễ thấy rằng:

a) Sự tồn tại hàm ngược f^{-1} của hàm số f và $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

b) Hàm số f^{-1} là hàm tăng.

Với điều kiện (iii) của bài toán ta có thể kiểm tra dễ dàng các hàm số có dạng $f(x) = x + c$, trong đó c là một hằng số tùy ý, đều thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán, vì khi đó hàm ngược của f có dạng $f^{-1}(x) = x - c$. Như vậy bài toán luôn có nghiệm. Mục đích của sự trình bày dưới đây là chứng tỏ rằng bài toán không có nghiệm nào khác ngoài nghiệm $f(x) = x + c$.

Bước 1. Với mỗi số thực $a \in \mathbb{R}$, ta xây dựng tập $S(a) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = x + a\}$. Mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ đều phải thuộc một tập $S(a)$ nào đó, bởi vì lấy $x_0 \in \mathbb{R}$, thì nhiển nhiên $x_0 \in S(a)$ với $a = f(x_0) - x_0$. Do vậy ta thấy rằng tồn tại ít nhất một số thực a sao cho $S(a) \neq \emptyset$.

Bước 2. Ta chứng minh rằng $x_0 \in S(a) \Leftrightarrow x_0 + ka \in S(a)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Nhờ quy nạp, ta thấy rằng chỉ cần chứng minh $x_0 \in S(a) \Leftrightarrow x_0 + a \in S(a)$. Thật vậy

- Nếu $x_0 \in S(a) \to f(x_0) = x_0 + a \to f^{-1}(x_0 + a) = x_0$. Do đó theo điều kiện (iii) thì

$$2(x_0 + a) = f(x_0 + a) + f^{-1}(x_0 + a) = f(x_0 + a) + x_0,$$

  suy ra

$$f(x_0 + a) = x_0 + 2a = (x_0 + a) + a \to x_0 + a \in S(a).$$

- Ngược lại, nếu $x_0 + a \in S(a) \to f(x_0 + a) = x_0 + 2a$ nên

$$2(x_0 + a) = f(x_0 + a) + f^{-1}(x_0 + a) = x_0 + 2a + f^{-1}(x_0 + a) \to f^{-1}(x_0 + a) = x_0.$$

  Do đó

$$f(x_0) = x_0 + a \to x_0 \in S(a).$$

Bước 3. Ta chứng minh rằng nếu $S(a) \neq \emptyset$ thì $S(b) = \emptyset$ với mọi $b \neq a$.

- Giả sử $b < a$ và $x_0 \in S(a)$. Với $y \in \mathbb{R}$ tùy ý, luôn tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$x_0 + k(a - b) \leq y < x_0 + (k + 1)(a - b) \quad (1),$$

  suy ra

$$x_0 + ka \leq y + kb < (x_0 + ka) + (a - b).$$

  Theo điều kiện (ii) của bài toán ta có

$$f(y + kb) \geq f(x_0 + ka) = x_0 + (k + 1)a.$$

  Do đó, nếu $y + kb \in S(b) \to f(y + kb) = y + (k + 1)b$, suy ra

$$y + (k + 1)b \geq x_0 + (k + 1)a \to y \geq x_0 + (k + 1)(a - b)$$

  trái với điều kiện (1). Vậy $y + kb \notin S(b)$, do đó theo bước 2, ta có $y \notin S(b)$. Chứng tỏ $S(b) = \emptyset$.

- Nếu $b > a$ thì $S(b) \neq \emptyset$, thì theo phần trên ta lại suy ra $S(a) = \emptyset$, trái với giả thiết.

Kết luận: Nếu $S(a) \neq \emptyset$ thì với mỗi $x \in \mathbb{R}$ đều phải thuộc một tập $S(b)$ nào đó, mà ta có $S(b) = \emptyset$ nếu $b \neq a$, do vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$ đều phải cùng thuộc một tập $S(a)$, tức là ta có $S(a) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$.

6 Khai thác tính chất điểm bất động của hàm số

Cho hàm số $f : X \to \mathbb{R}$. Điểm $a \in X$ gọi là điểm cố định(điểm bất động, điểm kép) của hàm số f nếu $f(a) = a$.
Việc nghiên cứu các điểm bất động của một hàm số cũng cho ta một số thông tin về hàm số đó. Điểm bất động a của hàm số f chính là chu trình bậc 1 của điểm a qua ánh xạ f

Ví dụ 6.1. (IMO 1983) Tìm các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn hai điều kiện:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ và } f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Giải

a) Tính $f(1)$.
Cho $x = y = 1$, ta được $f(f(1)) = f(1)$. Lại cho $y = f(1)$ ta được

$$f(xf(f(1))) = f(1)f(x) \Rightarrow f(xf(1)) = f(1)f(x).$$

Mặt khác $f(xf(1)) = f(x)$ nên ta được

$$f(x) = f(x)f(1) \Rightarrow f(1) = 1(\text{do } f(x) > 0).$$

b) Điểm cố định của hàm số
Cho $x = y$ vào quan hệ hàm ta được

$$f(xf(x)) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra $xf(x)$ là điểm bất động của hàm số f.

c) Một số đặc điểm của tập điểm cố định.
Nếu x và y là hai điểm cố định của hàm số, thì

$$f(xy) = f(xf(y)) = yf(x) = xy.$$

Chứng tỏ xy cũng là điểm bất động của hàm số. Như vậy tập các điểm bất động đóng với phép nhân. Hơn nữa nếu x là điểm bất động thì

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Nghĩa là $\frac{1}{x}$ cũng là điểm bất động của hàm số. Như vậy tập các điểm bất động đóng với phép nghịch đảo.
Như vậy ngoài 1 là điểm bất động ra, nếu có điểm bất động nào khác thì hoặc điểm bất động này lớn hơn 1, hoặc nghịch đảo của nó lớn hơn 1. Do đó lũy thừa nhiều lần của điểm này lớn hơn 1 cũng sẽ là điểm bất động. Điều này trái với điều kiện thứ 2 trong quan hệ hàm.

d) Vậy 1 là điểm bất động duy nhất của hàm số, do $xf(x)$ là điểm bất động của hàm số với mọi $x > 0$ nên từ tính duy nhất ta suy ra $f(x) = \frac{1}{x}$.
Dễ thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6.2. (IMO 1994) Giả sử S là tập hợp các số thực lớn hơn -1. Tìm tất cả các hàm số $f : S \to S$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

a) $f[x + f(y)) + xf(y)] = y + f(x) + yf(x) \quad \forall x, y \in S$

b) $\dfrac{f(x)}{x}$ là hàm thực sự tăng với $-1 < x < 0$ và với $x > 0$.

Giải

a) Tìm điểm bất động.
Từ điều kiện (b) ta nhận thấy phương trình điểm bất động $f(x) = x$ có nhiều nhất là 3 nghiệm(nếu có): một nghiệm nằm trong khoảng $(-1; 0)$, một nghiệm bằng 0, một nghiệm nằm trong khoảng $(0; +\infty)$.

b) Nghiên cứu điểm bất động của hàm số.
Giả sử $u \in (-1; 0)$ là một điểm bất động của f. Trong điều kiện (a) cho $x = y = u$ ta được

$$f(2u + u^2) = 2u + u^2.$$

Hơn nữa $2u + u^2 \in (-1; 0)$ và $2u + u^2$ là một điểm bất động nữa của hàm số trong khoảng $(-1; 0)$. Theo nhận xét trên thì phải có

$$2u + u^2 = u \Rightarrow u = -u^2 \in (-1; 0).$$

Hoàn toàn tương tự, không có điểm bất động nào nằm trong khoảng $(0; +\infty)$. Như thế 0 là điểm bất động duy nhất của hàm số(nếu có).

c) Kết luận hàm
Cho $x = y$ vào (a) ta được

$$f\left(x + f(x) + xf(x)\right) = x + f(x) + xf(x), \quad \forall x \in S.$$

Như vậy với mọi $x \in S$ thì $x + (1 + x)f(x)$ là điểm bất động của hàm số. Theo nhận xét trên thì

$$x + (1 + x)f(x) = 0, \quad \forall x \in S \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{1 + x}, \quad \forall x \in S.$$

Thử lại thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6.3. (IMO 1996) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho:

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Giải

a) Tính $f(0)$.
Cho $m = n = 0$ thì ta có

$$f\left(f(0)\right) = f\left(f(0)\right) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Từ đây lại cho $n = 0$ thì $f\left(f(m)\right) = f(m), \forall m \in \mathbb{N}$. Vậy ta có quan hệ hàm như sau

$$\begin{cases} f(m + f(n)) = f(m) + f(n) & (1) \\ f(0) = 0 & (2) \end{cases}.$$

b) Nhận thấy hàm $f(0) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Tìm điểm cố định của hàm số.
Nếu f không đồng nhất 0. Thì từ quan hệ $f(f(m)) = f(m), \forall m \in \mathbb{N}$ suy ra với mọi $m \in \mathbb{N}$ thì $f(m)$ là điểm cố định của hàm số với $m \in \mathbb{N}$.

d) Tính chất của các điểm bất động.
Nếu a và b là hai điểm bất động của hàm số f thì

$$f(a+b) = f(a + f(b)) = f(f(a)) + f(b) = f(a) + f(b) = a + b.$$

Vậy tập các điểm bất động bất biến qua phép cộng.

e) Tập hợp các điểm bất động của f. Gọi a là điểm bất động khác 0 bé nhất của hàm số f.
- Nếu $a = 1$, tức là $f(1) = 1$, thì dễ thấy rằng $f(2) = 2$ (bằng cách cho $m = n = 1$). Và áp dụng phương pháp quy nạp ta suy ra $f(n) = n \forall n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a > 1$, tức là $f(a) = a$. Bằng phương pháp quy nạp ta cũng chứng tỏ được là $f(ka) = ka, \forall k \geq 1$. Ta chứng minh tập các điểm bất động động đều có dạng $ka, \forall k \geq 1$(lưu ý là a là điểm bất động nhỏ nhất của hàm số). Thật vậy nếu n là điểm bất động khác thì $n = ka + r(0 \leq r < a)$, khi đó theo (1) và tính chất điểm bất động của ka, ta có

$$n = f(n) = f(ka + r) = f(r + f(ka)) = f(r) + f(ka) = f(r) + ka \Rightarrow f(r) = n - ka = r.$$

Vì $r < a$ mà r lại là điểm bất động, a là điểm bất động nhỏ nhất, nên $r = 0$. Chứng tỏ các điểm bất động đều có dạng $ka, \forall k \geq 1$ (*).

f) Xây dựng hàm f.
Vì $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ là tập các điểm bất động của hàm f. Vậy thì với $i < a$ thì do (*) nên ta có $f(i) = n_i a$ với $n_0 = 0, n_i \in \mathbb{N}$.
Lấy số nguyên dương n bất kỳ thì ta có thể viết $n = ka + i(0 \leq i < a)$. Theo quan hệ đầu bài thì

$$f(n) = f(i + ka) = f(i + f(ka)) = f(i) + ka = n_i a + ka = (n_i + k)a.$$

Ta kiểm chứng hàm f như vậy thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, với $m = ka + i, n = la + j\ , 0 \leq i, j < a$ thì

$$f(m + f(n)) = f(la + j + f(ka + i)) = ka + i + f(f(la + i)).$$

Ví dụ 6.4. (AMM, E984) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(f(x)) = x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải

Ta chứng minh một kết quả tổng quát hơn: Cho S là một tập hợp và $g : S \to S$ là một hàm số có chính xác 2 điểm cố định $\{a, b\}$ và $g \circ g$ có chính xác 4 điểm cố định $\{a, b, c, d\}$. Thì không tồn tại hàm số $f : S \to S$ để $g = f \circ f$.

Chứng minh

Giả sử $g(c) = y$. Thì $c = g\left(g(c)\right) = g(y)$, nên $y = g(c) = g\left(g(y)\right)$. Do vậy y là một điểm cố định của $g \circ g$. Nếu $y = a$ thì $a = g(a) = g(y) = c$, dẫn đến mâu thuẫn. Tương tự cho $y = b$ sẽ dẫn đến mâu thuẫn là $c = b$. Nếu $y = c$ thì $c = g(y) = g(c)$, tức c là điểm cố định của g, mâu thuẫn. Từ đó suy ra $y = d$, tức là $g(c) = d$, và tương tự thì $g(d) = c$.

Giả sử tồn tại $f : S \to S$ sao cho $f \circ f = g$. Thì $f \circ g = f \circ f \circ f = g \circ f$. Khi đó $f(a) = f\left(g(a)\right) = g\left(f(a)\right)$, nên $f(a)$ là một điểm cố định của g. Bằng việc kiểm tra từng trường hợp ta kết luận $f\{a, b\} = \{a, b\}, f\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$.

Xét $f(c)$. Nếu $f(c) = a$, thì $f(a) = f\left(f(c)\right) = g(c) = d$, mâu thuẫn do $f(a)$ nằm trong $\{a, b\}$. Tương tự cũng không thể xảy ra $f(c) = b$. Ngoài ra cũng không thể có $f(c) = c$ vì c không là điểm cố định của g. Do vậy chỉ có khả năng là $f(c) = d$. Nhưng khi đó thì

$$f(d) = f\left(f(c)\right) = g(c) = d,$$

mâu thuẫn, vì điều này không thể xảy ra do d không phải là điểm cố định của g. Do vậy không thể tồn tại hàm f thỏa yêu cầu bài toán.

Quay trở lại bài toán, bài toán là trường hợp đặc biệt của hàm $g(x) = x^2 - 2$, có hai điểm cố định là -1 và 2, và $g\left(g(x)\right) = \left(x^2 - 2\right)^2 - 2$ có các điểm cố định là $-1, 2, \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ và $\dfrac{-1\sqrt{5}}{2}$. Áp dụng kết quả trên ta hoàn thành lời giải cho bài toán.

7 Phương pháp đưa về phương trình sai phân

Khi cần xác định các hàm số $f(n)$ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$ thì ta có thể đặt $y_n = f(n)$ và đưa phương trình hàm đã cho về phương trình sai phân và sử dụng kiến thức của lí thuyết phương trình sai phân.

Ví dụ 7.1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m), \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$$

Hint:
1. Tính $f(0)$. Nếu $f(0) = 0 \Rightarrow f(n) \equiv 0$. Nếu $f(0) = 2$
2. Đặt $m = 1$, khi đó đặt $a = f(1), x_n = f(n)$ đưa về phương trình:

$$x_0 = 2, x_1 = a, x_{n+2} - ax_{n+1} + a_n = 0, (n \geq 1)$$

Ngay cả khi cần tìm hàm số $f : X \to X$ với $X \subset \mathbb{R}$ nhưng trong phương trình hàm đã cho là hàm hợp ta cũng có thể sử dụng lý thuyết phương trình sai phân.
Xét hàm số $f : X \to X$. Xét dãy các hàm số $(f_n)_n$ với $n \in \mathbb{N}, f_n : X \to X$ được xác định như sau:

Ví dụ 7.2. Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Hint:
1. Với mỗi $x \in \mathbb{R}^+$, ta xây dựng dãy số x_n như sau:

$$x_0 = x, x_1 = f(x); f_{n+1} = f(f_n), \forall n \in \mathbb{N}(x_n \geq 0)$$

ta được phương trình sai phân:

$$x_{n+2} + ax_{n+1} - b(a+b)x_n = 0$$

2. Giải phương trình đặc trưng tìm $x_n = \lambda b^n + \mu(-1)^n(a+b)^n$, vì sao $\mu = 0$
Đáp số: $f(x) = x$

Ví dụ 7.3. Tìm tất cả các hàm số $f : [0,1] \to [0,1]$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(2x - f(x)) = x, \forall x \in [0,1]$$

Hint:
Khai thác hàm $g(x) = 2x - f(x)$ thì $g_n(x) = n(g(x) - x) + x$
Đáp số: $f(x) = x$

Ví dụ 7.4. Xác định các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(n+1)f^2(n-1) = f^3(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Hint:
1. Nhận xét rằng $f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Lấy ln hai vế
Đáp số: $f(n) = 2^{2^n} - 1$

Ví dụ 7.5. Xác định hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm:

$$f(0) = 2, f(n+1) = 3f(n) + \sqrt{8f^2(n) + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hint:
Chuyển vế rồi bình phương.
Đáp số: $f(n) = \frac{(8+\sqrt{66})(3+\sqrt{8})^n}{8} + \frac{(8-\sqrt{66})(3-\sqrt{8})^n}{8}$

Nhận xét: Các bài toán trên có nguồn gốc từ dãy số, ý tưởng là tuyến tính hóa dãy số chuyển qua thành tuyến tính hóa dãy hàm. Vì thực chất thì dãy số là một loại hàm đặc biệt

Ví dụ 7.6. Tìm các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$f(n+3) \cdot f(n+1) = f(n) + f(n+2), \forall n \geq 1$$

Hint:
1. Đặt $a_n = f(n)$ để suy ra: $a_{n+4} - a_n = a_{n+3}(a_{n+5} - a_{n+1})$
2. Tính $a_4 - a_0$ theo $a_3, a_3, \ldots, a_n$
3. Để ý rằng bốn số hạng liên tiếp của a_n không thể tất cả đều bằng 1(mâu thuẫn với giả thiết). Suy ra dãy tuần hoàn với chu kỳ 4.
4. Giải hệ $\begin{cases} a_0 + a_2 = a_1 a_3 \\ a_1 + a_3 = a_0 a_2 \end{cases}$ Đáp số: $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (2, 2, 2, 2) = (3, 1, 2, 5) = (2, 1, 3, 5) = (2, 5, 3, 1) = (3, 5, 2, 1)$

Ví dụ 7.7. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ thỏa mãn:

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 2000, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

8 Phương pháp sử dụng tính liên tục của hàm số

Đối với hàm số liên tục chúng ta thường sử dụng tính chất: Nếu $(x_n) \to x$, f là hàm liên tục thì $f(x_n) \to f(x)$
Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ thì f bị chặn trên đoạn $[a, b]$
Nếu f liên tục và đơn ánh thì f là hàm đơn điệu.
Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thì ta ký hiệu $f \in C[\mathbb{R}]$_tập các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
Trong loại toán này cũng hay áp dụng tư tưởng: nếu ta cần chứng minh hàm đó là hàm hằng thì chứng tỏ nó là hàm hằng trên một dãy số, rồi sử dụng tính liên tục để suy ra nó là hằng số trên toàn bộ tập hợp.

Ví dụ 8.1. Tìm tất cả các hàm số $f \in C[\mathbb{R}]$ thỏa mãn

$$x^2 f(y) + y f\left(x^2\right) = f(xy) + a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Cho $y = 0$ ta được

$$x^2 f(0) = f(0) + a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chỉ có thể xảy ra khi $f(0) = a = 0$. Vậy nếu $a \neq 0$ thì bài toán vô nghiệm. Xét $a = 0$, khi đó thì

$$x^2 f(y) + y f\left(x^2\right) = f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = y = 1$ ta được $f(1) = 1$. Lại thay $y = 1$ và sử dụng $f(1)$ ta được $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Đến đây cho $x = y$ thì có

$$(x^2 + x - 1) f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy phải có $f(x) = 0, \forall x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nhưng vì f liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$ nên phải có $f(x) \equiv 0$. Dễ thấy hàm số này thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 8.2. Tìm các hàm $f \in C[\mathbb{R}]$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(4x) + f(9x) = 2f(6x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải

a) Đưa về dạng để sử dụng tính liên tục.
   Đặt $t = 6x \Rightarrow x = \dfrac{t}{6}$. Ta có

$$f\left(\frac{2}{3}t\right) + f\left(\frac{3}{2}t\right) = 2f(t), \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}t\right) - f(t) = f(t) - f\left(\frac{3}{2}t\right)$$

   hay

$$g\left(\frac{2}{3}t\right) = g(t) \quad \text{với} \quad g(t) = f(t) - f\left(\frac{3}{2}t\right).$$

b) Sử dụng tính liên tục.
Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

$$g(t) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right), \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Do $f(x)$ liên tục suy ra $g(x)$ cũng liên tục, cho $n \to \infty$ ta được

$$.g(t) = \lim_{n\to\infty} g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right) = g(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Từ đó $f(t) = f\left(\frac{3}{2}t\right), \forall t \in \mathbb{R}$ hay $f\left(\frac{2}{3}x\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tương tự ta có

$$f(x) = f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right) \to f(0)(n \to \infty).$$

Vậy $f(x) = C$, với C là hằng số thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 8.3. (Đề nghị IMO??) Tìm tất cả các hàm $f \in C[\mathbb{R}]$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải

a) Đưa về dạng để sử dụng tính liên tục.
Đặt $g(x) = f(x) - x$ và ta chứng minh g là hàm hằng. Thật vậy, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(x^2) + g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = 0$ ta được $g(0) = 0$.
Thay $x = 1$ ta được $g(1) = 0$.
Thay x bởi $-x$ thì

$$g[(-x)^2] + g(-x) = 0 \Rightarrow g(-x) = -g(x^2) = g(x).$$

Do đó g là hàm chẵn nên ta chỉ cần xét trên miền $x > 0$. Từ quan hệ hàm trên ta suy ra $g(x) = -g(x^2) = g(x^4)$ hay với $x > 0$ thì

$$g(x) = g\left(x^{\frac{1}{4}}\right).$$

b) Sử dụng tính liên tục.
Lấy $a > 0$ tùy ý, xét dãy số (x_n) được xác định như sau

$$x_0 = a, x_{n+1} = x_n^{\frac{1}{4}}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Khi đó thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ và ta có

$$g(x_{n+1}) = g\left(x_n^{\frac{1}{4}}\right) = g(x_n) = g(x_{n-1}) = \cdots = g(x_0) = g(a).$$

Vậy g là hàm hằng trên dãy (x_n). Theo tính liên tục của hàm g thì

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(1) = 0.$$

Vậy $g(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Như vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 8.4. (Đề nghị IMO 1992) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn, với $a,b\in\mathbb{R}^+$

$$f\left(f(x)\right)+af(x)=b(a+b)x,\forall x\in\mathbb{R}^+.$$

Giải

Đây là một ví dụ cổ điển của loại bài toán giải được bằng sử dụng quan hệ hồi quy. Với mỗi $x_0\in\mathbb{R}^+$, đặt

$$u_0=x_0,u_1=f\left(u_0\right),u_{n+1}=f\left(u_n\right),n=1,2,3,\dots$$

Từ quan hệ bài toán ta được quan hệ hồi quy của dãy như sau

$$u_{n+2}=-a.u_{n+1}+b(a+b)u_n.$$

Xét phương trình đặc trưng

$$X^2+aX-b(a+b)=0\to X_1=b\text{và } X_2=-(a+b).$$

Do đó

$$u_n=c_1b^n+c_2(-1)^n(a+b)^n=(a+b)^n\left[c_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+(-1)^nc_2\right].$$

Vì $\lim\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^n=0$ nên nếu $c_2>0$ thì $u_n<0$ với n lẻ đủ lớn, còn nếu $c_2<0$ thì $u_n<0$ với n chẵn đủ lớn. Trong cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $c_2=0$. Do đó $u_n=c_1b^n$, cùng với $u_0=x_0=c_1$. Do đó ta được $u_1=f(x_0)=bx_0$. Do x_0 bất kỳ nên kết luận $f(x)=bx,\forall x\in\mathbb{R}^+$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 8.5. (Bulgari 1997) Tìm các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)=f\left(x^2+\frac{1}{4}\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Giải

Ta chứng minh chỉ có hàm hằng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Trước tiên ta dễ dàng nhận thấy f là hàm số chẵn nên ta chỉ cần xét trên miền $x\ge 0$. Lấy $a\ge 0$ bất kỳ, xét hai trường hợp

a) Nếu $0\le a\le\dfrac{1}{2}$, thì xét dãy số $(x_n):\begin{cases}x_0=a\\ x_{n+1}=x_n^2+\dfrac{1}{4}\end{cases}$ thì

$$f\left(x_n\right)=f\left(x_{n-1}^2+\frac{1}{4}\right)=f\left(x_{n-1}\right)=\cdots=f\left(x_0\right)=f(a).$$

Dãy (x_n) bị chặn trên, vì $x_1=x_0^2+\dfrac{1}{4}=a^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ và dùng phương pháp quy nạp ta cũng chứng minh được $x_n\le\dfrac{1}{2}$.

Dãy (x_n) là dãy tăng, vì

$$x_{n+1}-x_n=x_n^2+\frac{1}{4}-x_n=\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\to x_{n+1}\ge x_n.$$

Từ đó dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn, đặt $\lim x_n = b$, khi đó

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right) \to b = b^2 + \frac{1}{4} \to b = \frac{1}{2}.$$

Vì hàm số f liên tục nên

$$f(a) = \lim f(a) = \lim f(x_n) = f\left(\lim x_n\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{const}.$$

b) Nếu $a > \frac{1}{2}$ thì xét dãy số $(x_n) : \begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}} \end{cases}$, khi đó $x_n = x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}$ và

$$f\left(x_{n+1}\right) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) = f\left(x_n\right) = \cdots = f\left(x_0\right) = f(a).$$

Dãy (x_n) bị chặn dưới, vì $x_1 = \sqrt{x_0 - \frac{1}{4}} > \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $x_n \geq \frac{1}{2}$.

Dãy (x_n) đơn điệu giảm, vì

$$x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - x_{n+1}^2 - \frac{1}{4} = -\left(x_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \to x_{n+1} \leq x_n.$$

Từ đó dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn, đặt $\lim x_n = b$, ta có

$$\lim x_n = \lim \left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) \to b = b^2 + \frac{1}{4} \to b = \frac{1}{2}.$$

Vì hàm f liên tục nên

$$f(a) = \lim f(a) = \lim f(x_n) = f\left(\lim x_n\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{const}.$$

Trong cả hai trường hợp, ta thấy $f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{const}, \forall a \geq 0$ hay f là hàm hằng trên $x \geq 0$. Vì f là hàm chẵn nên $f(x) = \text{const}$ là hàm số duy nhất thỏa mãn điều kiện này.

Nhận xét: Điểm mấu chốt trong lời giải trên là: *để chứng minh $f(a)$ không đổi, với mọi $a \geq 0$, phải xây dựng dãy số có liên quan đến a, có giới hạn hữu hạn, và hàm số phải không thay đổi trên dãy này.* Bài toán tổng quát hơn bài toán trên được cho ở dưới đây.

Ví dụ 8.6. (Putnam 1996) Cho c là số thực dương. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = f\left(x^2 + c\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 8.7. (VMO 2001) Cho hàm số $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Hãy tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-1, 1)$ và thỏa mãn hệ thức

$$\left(1 - x^2\right) f\left(g(x)\right) = \left(1 + x^2\right)^2 . f(x), \forall x, y \in (-1, 1).$$

Giải

Viết lại hệ thức đã cho dưới dạng

$$\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} f\left(g(x)\right) = \left(1-x^2\right).f(x), \forall x, y \in (-1,1).$$

Đặt $\varphi(x) = (1-x^2)\, f(x), \forall x, y \in (-1,1)$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $(-1,1)$ và thỏa mãn đề bài khi và chỉ khi $\varphi(x)$ liên tục trên $(-1,1)$ và thỏa mãn hệ thức

$$\varphi\left(g(x)\right) = \varphi(x), \forall x, y \in (-1,1). \tag{30}$$

Dễ thấy $u(x) = \dfrac{1-x}{1+x}, x \in (0,+\infty)$ là một song ánh từ$(0,+\infty)$ đến $(-1,1)$. Do đó, có thể viết lại hệ thức trên như sau

$$\varphi\left(g\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right) = \varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \forall x \in (0,+\infty),$$

hay

$$\varphi\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \forall x, y \in (0,+\infty).$$

Xét hàm số $h(x) = \varphi\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$. Khi đó $\varphi(x)$ liên tục trên $(-1,1)$ và thỏa mãn (30) khi và chỉ khi $h(x)$ liên tục trên $(0,+\infty)$ và thỏa mãn hệ thức $h\left(x^2\right) = h(x), \forall x \in (0,+\infty)$. Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$h(x) = h\left(\sqrt[2n]{x}\right), \forall x \in (0,+\infty), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $\lim \sqrt[2n]{x} = 1$ và h là hàm liên tục nên $h(x) \equiv h(1)$. Từ đó $\varphi x = \text{const}$ và $f(x) = \dfrac{a}{1-x^2}, \forall x \in (-1,1)$, với a là hằng số. Kiểm tra lại thấy hàm số này thỏa mãn.

Ví dụ 8.8. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai tính chất sau

a) f liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $f\left(x+m\right)\left(f(x)+\sqrt{m+1}\right) = -(m+2), \forall x \in \mathbb{R}$, với m là số nguyên dương.

Giải

Giả sử tồn tại hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x+m\right)\left(f(x)+\sqrt{m+1}\right) = -(m+2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $f(x) \neq 0$ và $f(x) \neq -\sqrt{m+1}$ trên $\mathbb{R}$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên chỉ có thể xảy ra một trong 3 trường hợp đối với miền giá trị của f(ký hiệu là $\mathrm{Im}f$) như sau:

a) Nếu $\mathrm{Im}f \subset (-\infty, -\sqrt{m+1})$ thì

$$f\left(x+m\right)\left(f(x)+\sqrt{m+1}\right) > 0 > -(m+2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Nếu Im$f \subset (-\sqrt{m+1}, 0)$ thì $-\sqrt{m+1} < f(x+m) < 0$ nên

$$|f(x+m)| < \sqrt{m+1}$$

và

$$0 < f(x) + \sqrt{m+1} < \sqrt{m+1}.$$

Do đó

$$\left| f(x+m)\left(f(x) + \sqrt{m+1}\right)\right| < m+1 < m+2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Nếu Im$f \subset (0, +\infty)$ thì

$$f(x+m)\left(f(x) + \sqrt{m+1}\right) > 0 > -(m+2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét cả ba trường hợp ta thấy không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Gần đây, trong tạp chí THTT tháng 9 năm 2009 giải quyết bài toán này trong trường hợp đặc biệt $m = 2008$.

Ví dụ 8.9. Cho $t \in (0,1)$. Tìm tất cả các hàm $f \in C[\mathbb{R}]$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hint:
Đặt $g(x) = f(x) - f(tx)$. Thay biến $x \to tx$ nhiều lần để tìm hàm $g(x)$.
Đáp số: $f(x) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2} + C$ với C là hằng số.

Ví dụ 8.10. Tìm tất cả các hàm số $f \in C[\mathbb{R}]$ thỏa mãn điều kiện:

$$2f(2x) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hint:
1. Tìm nghiệm riêng $f(x) = ax \Rightarrow a = \frac{1}{3}$
2. Đặt $f(x) = g(x) + \frac{1}{3}x$, dùng tính liên tục tìm hàm g.
Đáp số: $f(x) = \frac{1}{3}x$

Ví dụ 8.11. Tìm tất cả các hàm số $f \in C[\mathbb{R}]$ thỏa mãn điều kiện:

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hint:
Tìm hàm riêng dưới dạng $f(x) = ax + b$
Đáp số: $f(x) = x - \frac{3}{2}$
Bài toán này cũng có thể giải trực tiếp bằng cách thế $x \to \frac{x-1}{2}$

Ví dụ 8.12. Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \forall x \neq 0 \end{cases}$$

Hint:

Điều kiện thứ 3 để cho ta chứng minh hàm liên tục

1. Nhận xét $f(x)$ và $f\left(\frac{1}{x}\right)$ cùng dấu.
2. Chứng minh nếu $|y| \geq 2$ thì $|f(y)| \geq 2$ và $|y| \leq \frac{1}{2}$ thì $|f(y)| \leq \frac{1}{2}$
3. Chứng minh $|y| \leq \frac{1}{2^n}$ thì $|f(y)| \leq \frac{1}{2^n}$, từ đó hàm liên tục tại 0.

Đáp số: $f(x) = x$

Ví dụ 8.13. Tìm các hàm số $f \in C[\mathbb{R}^*]$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^3) - x^2 f(x) = \frac{1}{x^3} - x, \forall x, y \in \mathbb{R}^*$$

Hint:

1. Viết lại quan hệ hàm thành $\frac{f(x^3)}{x^3} - \frac{1}{x^6} = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$
2. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$, dùng tính liên tục tìm hàm g.

Đáp số: $f(x) = ax + \frac{1}{x}, \forall a \in \mathbb{R}^*$

9 Ứng dụng phương trình hàm cơ bản

Ví dụ 9.1. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in [0, 1].$$

Giải

Lập luận tương tự giống như phương trình hàm Cauchy ta được $f(0) = 0$ và

$$f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

Từ đây ta được

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1).$$

Bây giờ với số hữu tỉ $r \in [0, 1]$ luôn có thể viết dưới dạng $r = \dfrac{p}{q}$ với p, q là các số nguyên dương $p \leq q$, ta có

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p.\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p\frac{1}{q}f(1) = rf(1).$$

Do vậy $f(x) = kx$ với mọi $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Bây giờ với số thực $\alpha \in [0, 1]$, tồn tại một dãy số hữu tỉ $\{x_n\} \in [0, 1]$ sao cho $\lim x_n = \alpha$. Theo tính liên tục ta có:

$$f(\alpha) = \lim f(x_n) = \lim kx_n = k \lim x_n = k\alpha.$$

Vậy $f(x) = kx, \forall x \in [0, 1]$ với k là số thực bất kỳ.

Ví dụ 9.2. (VMO 2006) Hãy tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Giải

Thay $x = \dfrac{t}{2}, y = -\dfrac{t}{2}, z = 0$ vào quan hệ hàm ta được

$$f(t)\left(f\left(-\frac{t}{2}\right)\right)^2 + 8 = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Từ đó chứng tỏ $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy ta có thể đặt

$$f(x) = -2^{g(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } g(x) \text{ làm một hàm số liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Thay vào ta được mối quan hệ của hàm g

$$g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) + 3 = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Đến đây ta đặt $h(x) = g(x) - 1$ thì

$$h(u) + h(v) = -h(-u-v), \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy $h(0) = 0$ và $h(-u) = -h(u)$ nên ta nhận được

$$h(u+v) = h(u) + h(v), \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Hàm h liên tục thỏa mãn tính cộng tính nên $h(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, từ đó $g(x) = ax + 1$ và hàm số $f(x) = -2^{ax+1}, \forall x \in \mathbb{R}, a$ là hằng số. Kiểm tra lại thấy hàm số này thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 9.3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ liên tục và thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Hint:
Nhận xét hàm là hàm chẵn.
1. Đặt $a = x^2 - y^2, b = 2xy$ thì với $a, b > 0$ có tồn tại x, y?? đưa về: $f(a) + f(b) = f(\sqrt{a^2 + b^2})$
2. Đặt $g(x) = f(\sqrt{x})$
Đáp số: $f(x) = kx^2$

Ví dụ 9.4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa:

$$f(xy) = xf(y) + yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Hint:
Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
Đáp số: $f(x) = Cx \ln x$

Ví dụ 9.5. Tìm tất cả các hàm số $f \in C[\mathbb{R}]$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x + y) + f(z) = f(x) + f(y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Hint:
1. Chuyển $f(x + y) - f(x) = f(y + z) - f(z)$, vế phải không chứa x nên vế trái không phụ thuộc vào x. Vậy $f(x + y) - f(x) = g(y)$
2. Ta có $g(x + y) = g(x) + g(y)$
Đáp số: $f(x) = Cx + a$

Ví dụ 9.6. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(f(xy) - xy) + xf(y) + yf(x) = f(xy) + f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Hint:
1. Cho $y = 1 \Rightarrow f[f(x) - x] = f(1)[f(x) - x]$
2. Thay kết quả trên vào bài toán, lại đặt $g(x) = f(x) - x$ được:

$$g(1)g(xy) = g(x)g(y)$$

Đáp số: $f(x) = x + Cx^a$ với $C > 0$ và a tùy ý.

Ví dụ 9.7. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$[f(x) + f(z)][f(y) + f(t)] = f(xy - zt) + f(xt + yz), \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

Hint:
1. Xét trường hợp f là hàm hằng.
2. Trường hợp f không là hàm hằng, cho $x = z = 0$, lập luận để thu được: $f(x)f(y) = f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. Đặt $g(x) = f(\sqrt{x})$ thì được: $g(xy) = g(x)g(y)$ và $g(x + y) = g(x) + g(y)$
Đáp số: $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 9.8. (**APMO 2003**) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hai tính chất sau:

(i) Phương trình $f(x) = 0$ chỉ có hữu hạn nghiệm.

(ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải

a) Tính $f(f(y))$. Thế $x = 0$ ta được

$$f(f(y)) = f(y), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây ta được quan hệ hàm

$$f\left(x^4 + y\right) = x^3 f(x) + f(y). \tag{31}$$

b) Tính $f(0)$. Thế $x = 1, y = 0$ vào (31) ta được $f(0) = 0$.

c) Lại thay $y = 0$ vào (31) ta được $f(x^4) = x^3 f(x)$. Từ đây (31) trở thành

$$f(x^4 + y) = f(x^4) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R}.$$

d) Thế $y = -x$ vào quan hệ trên ta được $f(-x) = -f(x)$ hay f là hàm lẻ. Do đó với $x < 0, y \in \mathbb{R}$ thì

$$f(x + y) = -f(-x - y) = -f(-x) - f(-y) = f(x) + f(y).$$

Do vậy ta đã chứng tỏ

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đặc điểm hàm cộng tính, ta dễ thấy nếu $f(x)$ là nghiệm thì phải là $f(x) = x$. Thật vậy, từ tính chất cộng tính và quan hệ $f(x) = f(f(x))$ ta suy ra

$$f(f(x) - x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do phương trình $f(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm, mà từ trên thì $f(x) - x$ luôn là nghiệm của phương trình. Do vậy tập $\{f(x) - x | x \in \mathbb{R}\}$ phải là hữu hạn.

Bây giờ ta chứng minh $f(x)$ phải bằng với x. Giả sử tồn tại một $x_0 \in \mathbb{R}$ mà $f(x_0) - x_0 \neq 0$. Thì khi đó với k nguyên dương ta luôn có

$$f(kx_0) - kx_0 = kf(x_0) - kx_0 = k(f(x_0) - x_0) \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Mà $k(f(x_0) - x_0), k \in \mathbb{Z}^+$ chứa vô hạn giá trị, nên $f(kx_0) - kx_0$ cũng chứa vô hạn giá trị, mâu thuẫn. Vậy hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Từ quan hệ $f(x^4) = x^3 f(x)$, dùng phương pháp sai phân chúng ta có thể tìm được công thức tường minh của $f(x)$. Trước tiên ta ký hiệu $\Delta_g^0(x) = g(x)$, $\Delta_g^1(x) = \Delta_g^0(x + 1) - \Delta_g^0(x)$,

$\Delta_g^2(x) = \Delta_g^1(x+1) - \Delta_g^1(x), \ldots$. Bây giờ ta sẽ khai triển $\Delta_z^3(x)$ và $\Delta_s^3(x)$, với $r(x) = f\left(x^4\right)$ và $s(x) = x^3 f(x)$ bằng cách sử dụng tính cộng tính của hàm f.

$$\begin{aligned}
\Delta_r^1 &= f\left((x+1)^4\right) - f\left(x^4\right)\\
&= f\left(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\right) - f\left(x^4\right)\\
&= 4f\left(x^3\right) - 6f\left(x^2\right) + 4f(x) + c,\\
\Delta_r^2 &= 4\left(f\left((x+1)^3\right) - f\left(x^4\right)\right) + 6\left(f\left((x+1)^2\right) - f\left(x^2\right)\right) + 4\left(f(x+1) - f(x)\right)\\
&= 4\left(3f(x^2) + 3f(x) + c\right) + 6\left(2f(x) + c\right) + 4c\\
&= 12f(x^2) + 24f(x) + 10c,\\
\Delta_r^3 &= 12\left(f\left(x+1\right)^2 - f(x^2)\right) + 24\left(f(x+1) - f(x)\right)\\
&= 24f(x) + 36c\\
\Delta_s^1 &= (x+1)^3 f(x+1) - x^3 f(x)\\
&= (3x^2 + 3x + 1)f(x) + c(x+1)^3,\\
\Delta_s^2 &= f(x+1)\left(3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1\right) + c(x+2)^3\\
&= (6x+6)f(x) + c(6x^2 + 18x + 14),\\
\Delta_s^3 &= \left(6(x+1) + 6\right) f(x+1) + c\left(6(x+1)^2 + 18(x+1) + 14\right)\\
&= 6f(x) + 18xc + 36c.
\end{aligned}$$

Vì ta có $\Delta_r^3 = \Delta_r^3, \forall x \in \mathbb{R}$ bởi vì $r(x) = s(x)$. Từ đây ta có $24f(x) + 36c = 6f(x) + 18xc + 36c$, suy ra $18f(x) = 18xc$ hay $f(x) = cx$. Thay vào quan hệ $f\left(f(y)\right) = f(y)$ suy ra $c = 0$ hoặc $c = 1$. Nếu $c = 1$ thì $f(x) = x$, nếu $c = 0$ thì $f(x) \equiv 0$ không thỏa điều kiện (i). Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm cần tìm.

Ví dụ 9.9. (**Mathematics Magazine**) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x + yf(x)\right) = f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Giải

Nhận xét: $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn bài toán. Xét trường hợp hàm f không đồng nhất bằng 0.

a) Tính $f(0)$. Thay $y = 0, x = 1$ ta được $f(0) = 0$. Ngoài ra nếu $f(x) = 0$ thì $xf(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, suy ra $x = 0$. Vậy

$$f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0.$$

b) Quan hệ $f(y+1) = f(y) + f(1), \forall y \in \mathbb{R}$. Thay $x = 1$ vào (32) ta được

$$f\left(1 + yf(1)\right) = f(1) + f(y), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(1) \neq 1$, thì thay $y = \dfrac{1}{1 - f(1)}$ vào phương trình trên thì

$$f\left(\frac{1}{1 - f(1)}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{1 - f(1)}\right) \to f(1) = 0,$$

mâu thuẫn với phần (a). Vậy $f(1) = 1$. Do đó ta được quan hệ hàm

$$f(1 + y) = 1 + f(y), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ quan hệ này ta có $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

c) Tính $f(nx), n\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R}$. Thay $x=n, y=z-1$ ta được

$$f(nz)=f\left(n+(z-1)f(n)\right)=n+nf(z-1)=nf(z).$$

d) f cộng tính. Nếu $a=-b$ thì $f(a)=f(-b)=-f(b)$ suy ra $f(a)+f(b)=0=f(a+b)$. Nếu $a\neq -b$ thì $a+b\neq 0$ và $f(a+b)\neq 0$(theo phần (a)). Thay $x=\dfrac{a+b}{2}, y=\pm\dfrac{a-b}{2}f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ ta được

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}f\left(\frac{a-b}{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right),$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}f\left(\frac{b-a}{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right).$$

Cộng hai đẳng thức trên, ta được

$$f(a)+f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a+b)(\text{theo bước (c)}).$$

e) f có tính chất nhân tính. Áp dụng tính cộng tính vào phương trình hàm ban đầu ta được

$$f(x)+f\left(yf(x)\right)=f\left(x+yf(x)\right)=f(x)+xf(y)\to f\left(yf(x)\right)=xf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thay $y=1$ ta được $f\left(f(x)\right)=x$, chứng tỏ f là một song ánh. Do đó lại thế $z=f(x)$ vào quan hệ trên ta được

$$f(yz)=xf(y)=f(z)f(y),\forall y,z\in\mathbb{R}.$$

f) Thay $z=y$ ta được $f\left(y^2\right)=f^2(y)\geq 0$ và $z=-y$ ta được $f(-y^2)=-f^2(y)\leq 0$. Do đó $f(a)>0$ khi và chỉ khi $a>0$.

g) Thay $y=-1$ vào phương trình hàm (32) ta được

$$f\left(x-f(x)\right)=f(x)-x.$$

Do $f(x)-x$ và $x-f(x)$ đối nhau, do đó theo bước (f) thì $x-f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 9.10. (THTT T7/231) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left((x+1)f(y)\right)=y\left(f(x)+1\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Giải

a) Tính $f(0)$ và $f(-1)$. Thay $x=-1, y=0$ vào điều kiện hàm ta được

$$f(0)=y\left(f(-1)+1\right),\forall y\in\mathbb{R}\to f(0)=0, f(-1)=-1.$$

Từ đây cho $x=0$ ta nhận được quan hệ

$$f\left(f(x)\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

b) Tính $f(1)$. Thay $y = f(1)$ và sử dụng kết quả trên ta được

$$f(x+1) = f(1)\left(f(x)+1\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây thế $x = -2$ và sử dụng $f(-1)$ ta được

$$-1 = f(1)\left(f(-2)+1\right).$$

Mặt khác, thay $x = -2, y = -1$ vào điều kiện ban đầu thì

$$f(1) = -\left(f(-2)+1\right).$$

Kết hợp hai đẳng thức này thì $(f(1))^2 = 1$, do đó $f(1) = 1$, vì nếu $f(1) = -1$ thì $f(-1) = f\left(f(1)\right) \to -1 = 1$(vô lý). Từ kết quả của $f(1)$, bằng cách cho $y = 1$ ta nhận được quan hệ

$$f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) f là hàm nhân tính, thật vậy

$$\begin{aligned} f(xy) &= f\left(x.f\left(f(y)\right)\right) \\ &= f\left(\left[(x-1)+1\right] f\left(f(y)\right)\right) \\ &= f(y)\left(f(x-1)+1\right) = f(x).f(y) \end{aligned}$$

Từ đây ta nhận được

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}.\sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt{x}\right)^2 \geq 0, \forall x \geq 0,$$

và

$$f(x) = 0 \leftrightarrow x = f\left(f(x)\right) = f(0) = 0.$$

d) f là hàm cộng tính, thật vậy, với $y \neq 0$ thì

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\left(\frac{x}{y}+1\right).y\right) \\ &= f\left(\left(\frac{x}{y}+1\right) f\left(f(y)\right)\right) \\ &= f(y)\left(f\left(\frac{x}{y}+1\right)\right) \\ &= f(y).f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x) + f(y) \text{ do } f\text{nhân tính.} \end{aligned}$$

Hàm f vừa cộng tính, vừa nhân tính nên $f(x) = ax$, thay vào ta có $a = 1$. Vậy hàm số thỏa mãn bài toán là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 9.11. (Belarus 1997) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Giải

Nếu $f(x) = c$ thì từ điều kiện bài toán ta có $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) \equiv 2$. Xét $f(x)$ không phải là hàm hằng.

a) Tính $f(0)$. Thay $y=0$ vào (33) ta có

$$f(x).f(0)=2f(0),\forall x\in\mathbb{R}\to f(0)=0,$$

do $f(x)$ khác hàm hằng 2.

b) Tính $f(x+2)$ theo hai cách. Trước tiên thay $y=1$ vào (33) ta có

$$f(x+1)=(2-f(1))\,f(x)+f(1)\to f(2)=(3-f(1))\,f(1).$$

Thay x bởi $x+1$ và $y=1$ ta được

$$\begin{aligned}f(x+2)&=(2-f(1))\,f(x+1)+f(1)\\&=(2-f(1))^2\,f(x)+(3-f(1))f(2)\\&=(2-f(1))^2\,f(x)+f(2).\end{aligned}$$

Ngoài ra thay $y=2$ vào (33) ta được

$$f(x+2)=f(2x)+(1-f(2))\,f(x)+f(2).$$

Từ hai đẳng thức trên ta được

$$f(2x)=(3-f(1))\,f(x),$$

hay $f(2x)=af(x)$ (với $a=3-f(1)\neq 0$(vì nếu không hàm f là hàm hằng 0), ngoài ra $a\neq 1$(nếu không hàm đồng nhất 2)) và $f(4x)=a^2f(x)$.

c) Thay x bởi $2x$ và y bởi $2y$ và sử dụng kết quả trên ta được

$$af(x+y)+a^2f(x)f(y)=a^2f(xy)+af(x)+af(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Ngoài ra, nhân cả hai vế của (33) với a^2 ta được

$$a^2f(x+y)+a^2f(x)f(y)=a^2f(xy)+a^2f(x)+a^2f(y).$$

Từ hai đẳng thức này ta thu được

$$a(a-1)f(x+y)=a(a-1)\left(f(x)+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vì $a\neq 0,a\neq 1$ nên ta được $f(x+y)=f(x)+f(y)$, thay vào ta lại được $f(xy)=f(x)f(y)$. Từ hai quan hệ này ta được $f(x)=x$.

Kết luận: Có ba hàm số thỏa mãn bài toán là $f(x)\equiv 0,f(x)\equiv 2,f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét: 1. Phương trình hàm ở trên là tổng của hai phương trình cộng tính $f(x+y)=f(x)+f(y)$ và hàm nhân tính $f(xy)=f(x)f(y)$. Với phép thế hợp lý như trên ta đã đưa phương trình hàm đó về lại hàm thỏa mãn hai tính chất trên.

2. Bài toán trên được sử dụng lại trong **Indian 2003** và trong rất nhiều kỳ thi chọn đội tuyển của các tỉnh nước ta. Nếu trong (33) thay $f(x)=g(x)-1$ thì ta có bài toán dưới đây:

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)f(y)+1,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Và đối chiếu với trên ta có hai hàm số thỏa mãn là $f(x)\equiv 1$ và $f(x)=1+x,\forall x\in\mathbb{R}$.

10 Bất đẳng thức hàm

Ví dụ 10.1. (**VMO 1994**). Hãy xác định các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x).f(yz) \geq \frac{1}{4}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) Tính $f(0)$. Thay $x = y = z = 0$ ta được

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4} \to \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \to f(0) = \frac{1}{2}.$$

b) Tính $f(1)$. Tương tự như trên bằng cách thay $x = y = z = 1$ ta được $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

c) Chứng tỏ $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$. Thay $y = z = 0$ và sử dụng $f(0) = \dfrac{1}{2}$ ta được

$$f(x) \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d) Chứng tỏ $f(x) \geq \dfrac{1}{2}$. Thay $y = z = 1$ và sử dụng $f(1) = \dfrac{1}{2}$ ta được

$$f(x) \geq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Kiểm tra lại thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 10.2. (Russian 2000) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Giải

Thay $y = z = 0$ ta được

$$2f(x) + f(0) \geq 3f(x), \forall x \in \mathbb{R} \to f(x) \leq f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lại thay $x = y = \dfrac{x}{2}, z = -\dfrac{x}{2}$ ta được

$$f(x) + 2f(0) \geq 3f(0) \to f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ hai kết quả trên suy ra $f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) \equiv c$(c là hằng số). Kiểm tra lại thấy hàm số này thỏa mãn.

Ví dụ 10.3. (THTT T8/230) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$|f(x) - f(q)| \leq 5(x - q)^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Giải

Với mọi $x, x_0 \in \mathbb{R}(x \leq x_0)$, chọn số hữu tỉ q nằm giữa x và x_0 thì

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= |f(x)-f(q)+f(q)-f(x_0)| \\ &\leq |f(x)-f(q)|+|f(q)-f(x_0)| \text{ (bất đẳng thức trị tuyệt đối)} \\ &\leq 5(x-q)^2+5(q-x_0)^2 \text{ (giả thiết của bài toán)} \\ &\leq 5(x-x_0)^2+5(x-x_0)^2=10(x-x_0)^2.\end{aligned}$$

Vậy nên $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$ hay $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Suy ra $f(x)$ là hàm số liên tục tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Mặt khác, từ đánh giá trên ta nhận được

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq 10|x-x_0| \to \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=0,$$

hay $f'(x_0)=0$ với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Do $f(x)$ liên tục và có $f'(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta suy ra $f(x) \equiv c, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn.

Ví dụ 10.4. (Nhận Bản 2007). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện dưới đây:

(i) $f(x)+f(y) \leq \dfrac{f(x+y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(y)}{y} \geq \dfrac{f(x+y)}{x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Giải

Ta lần lượt khẳng định các dữ kiện dưới đây liên quan đến hàm số này. Trước tiên ta đặt hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ thì từ điều kiện (ii) ta có

$$g(x)+g(y) \geq g(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

a) $g(nx) \leq ng(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+$. Điều này dễ dàng chứng minh bằng quy nạp dựa vào tính chất của hàm g. Từ đây ta có

$$f(nx) \leq n^2 f(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+.$$

b) $f(2^n x)=4^n f(x)$. Thật vậy, trong (i) cho $y=x$ ta được

$$4f(x) \leq f(2x).$$

Tuy nhiên theo phần (a) thì $f(2x) \leq 4f(x)$. Do đó $f(2x)=4f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$. Từ đây ta thu được một đặc điểm của $g(x)$ là

$$g(2^n x)=2^n g(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+.$$

c) $g(nx) = ng(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+$. Thật vậy giả sử tồn tại một $n_0 \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{R}^+$ sao cho $g(n_0x_0) < n_0g(x_0)$. Khi đó chọn $r \in \mathbb{N}$ sao cho $2^r > n_0$ thì

$$\begin{aligned}
2^r g(x_0) &= g\left(2^r x_0\right) \\
&= g\left(2^r x_0 + n_0x_0 - n_0x_0\right) \\
&\leq g\left(n_0x_0\right) + g\left(\left(2^r - n_0\right)x_0\right) \text{ (tính chất của hàm } g) \\
&< n_0 g\left(x_0\right) + g\left(\left(2^r - n_0\right)x_0\right) \\
&< n_0 g\left(x_0\right) + \left(2^r - n_0\right) g(x_0) \text{ (tính chất của hàm } g \text{ trong phần (a))} \\
&= 2^r g\left(x_0\right) \text{ (mâu thuẫn).}
\end{aligned}$$

d) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Thật vậy,

$$10f(x) = 2\left(f(x) + f(2x)\right) \leq f(3x) \leq 9f(x) texttheophn(a).$$

Do đó $f(x) \leq 0$, kéo theo
$$g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

e) g là hàm đơn điệu giảm, vì $g(x+y) \leq g(x) + g(y) \leq g(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

f) $g(x) = ax$, vì kết hợp phần (c) thì có ngay $g(q) = g(1).q, \forall q \in \mathbb{Q}^+$ và g là hàm đơn điệu giảm nên có $g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Từ đó ta suy ra $f(x) = ax^2, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Thử lại hàm số này thấy thỏa mãn.

Ví dụ 10.5. (Eotvos - Kurschak 1979). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) \leq x \quad \text{và} \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

Ta có $f(0+0) \leq f(0) + f(0) \to f(0) \geq 0$. Ngoài ra $f(0) \leq 0$ nên ta có $f(0) = 0$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$0 = f\left(x + (-x)\right) \leq f(x) + f(-x) \leq x + (-x) = 0,$$

do đó
$$f(x) + f(-x) = 0 \to -f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$
Mặt khác $f(-x) \leq -x$ nên $x \leq -f(-x) = f(x) \leq x$. Khi đó $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 10.6. (Crux 2003). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^3 + x\right) \leq x \leq \left(f(x)\right)^3 + f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải

Xét hàm số $g(x) = x^3 + x$, thì hàm g liên tục và tăng ngặt trên $\mathbb{R}$, ngoài ra $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, do đó g là một song ánh trên $\mathbb{R}$. Vì vậy tồn tại hàm ngược g^{-1} cũng liên tục và tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Từ điều kiện bài toán, có thể viết lại dưới dạng

$$f\left(g(x)\right) \leq x \leq g\left(f(x)\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $g^{-1}(x)$ vào bất đẳng thức $f\left(g(x)\right) \leq x$ ta được

$$f(x) \leq g^{-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tác động hàm g^{-1} vào bất đẳng thức $x \leq g\left(f(x)\right)$, với chú ý là g^{-1} đồng biến

$$g^{-1}(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được

$$f(x) = g^{-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dễ dàng kiểm tra hàm này thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 10.7. Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y) \geq f(x)f(y) \geq 2002^{x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) Tính $f(0)$, thay $x = y = 0$ ta có

$$f(0) \geq \left(f(0)\right)^2 \geq 1 \to f(0) = 1.$$

b) Thế $y = -x$ và sử dụng $f(0)$ ta được

$$1 \geq f(x).f(-x) \geq 1 \to f(x)f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Thay $y = 0$ ta được

$$f(x) \geq 2002^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhưng khi đó thì

$$f(x).f(-x) \geq 2002^x.2002^{-x} \geq 1,$$

đối chiếu với $f(x).f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ta phải có $f(x) = 2002^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại thấy $f(x) = 2002^x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 10.8. (Bulgarian 1997) Tìm hàm số $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ thỏa mãn bất đẳng thức hàm

$$\left(f(x)\right)^2 \geq f(x+y)f\left(f(x)+y\right), \forall x, y > 0.$$

Giải

Ta chứng minh f là hàm giảm.
Thật vậy, với $x > y > 0$ thì tồn tại số $t > 0$ sao cho $x = y + t$. Khi đó

$$f(y+t) \le \frac{(f(y))^2}{f(y)+t}.$$

Do đó

$$f(y) - f(x) = f(y) - f(y+t) \ge f(y) - \frac{(f(y))^2}{f(y)+t} = \frac{tf(y)}{f(y)+t} > 0 \tag{34}$$

hay $f(x) < f(y)$. Vậy f là hàm giảm. Cố định $x > 0$, và ta chọn số $n \in \mathbb{N}$ sao $nf(x+1) \ge 1$. Theo (34) và kết hợp với f là hàm giảm ta có

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f\left(x+\frac{k+1}{n}\right) \ge \frac{\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}} = \frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{nf\left(x+\frac{k}{n}\right)+1} > \frac{1}{2n}(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$$f(x) - f(x+1) > \frac{1}{2} \text{ hay } f(x+1) < f(x) - \frac{1}{2}.$$

Từ đây bằng quy nạp ta được

$$f(x+2m) < f(x) - m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Lấy $m > f(x)$(x cố định) thì $f(x+2m) < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $f(x) > 0, \forall x > 0$. Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Ý tưởng của bài toán loại này là cố gắng chứng minh $f(y) < 0$ với một giá trị $y > 0$, để dẫn đến mâu thuẫn. Rõ ràng chúng ta chỉ cần chứng minh là $f(x) - f(x+1) \ge c > 0$ với mọi x bởi vì nó sẽ dẫn đến $f(x) - f(x+m) \ge mc$. Khi đó với m đủ lớn thì $f(x+m) < 0$. Lời giải trên trình bày cụ thể tư tưởng này.

Ví dụ 10.9. (VMO 2003) Gọi F là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$f(3x) \ge f(f(2x)) + x, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Tìm số thực α lớn nhất sao cho với mọi $f \in F$ thì $f(x) \ge \alpha.x, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Giải

Rõ dàng hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2} \in F$, do đó $\alpha \le \dfrac{1}{2}$. Hơn nữa với mọi hàm $f \in F$ ta có $f(x) \ge \dfrac{x}{3}$. Ý tưởng giải quyết như sau: Ký hiệu $\dfrac{1}{3} = \alpha_1$ và tạo một dãy $\{\alpha_n\}$ để $f(x) \ge \alpha_n x$ và mong muốn dãy này tiến tới $\dfrac{1}{2}$. Điều này sẽ suy ra $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$, và do đó $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Bây giờ chúng ta sẽ xây dựng quan hệ hồi quy cho α_k. Giả sử rằng $f(x) \ge \alpha_k x, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Thì từ điều kiện bất đẳng thức

$$f(3x) \ge f(f(2x)) + a \ge \alpha_k f(2x) + x \ge \alpha_k.\alpha_k.2x + x = \alpha_{k+1}.3x.$$

Điều này có nghĩa là $\alpha_{n+1} = \dfrac{2\alpha_n^2+1}{3}$. Bây giờ chúng ta phải chứng minh $\lim \alpha_n = \dfrac{1}{2}$. Nhưng đây là bài toán dễ dàng, vì dễ dàng chứng minh được dãy α_k là dãy tăng và bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$. Do đó phải hội tụ và giới hạn thỏa mãn $\alpha = \dfrac{2\alpha^2+1}{3}$ tức $\alpha = \dfrac{1}{2}$ (vì $\alpha < 1$).

11 Hàm tuần hoàn

Ví dụ 11.1. Tìm tất cả các giá trị $a \in \mathbb{R}$ sao cho tồn tại duy nhất hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x - f(y)\right) = a\left(f(x) - x\right) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Giả thiết của bài toán viết theo hàm g là

$$g\left(x - y - g(y)\right) = ag(x) - x, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giả sử $f(y) = g(y) + y$ không phải là hàm hằng. Lấy r, s là hai phần tử phân biệt trong miền giá trị của $f(y) = y + g(y)$. Khi đó với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thì

$$g(x - r) = ag(x) - x = g(r - s).$$

Điều này suy ra $g(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = |r - s| > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} ag(x) - x &= g\left(x - y - g(y)\right) \\ &= g\left(x + T - y - g(y)\right) \\ &= ag\left(x + T\right) - (x + T) \\ &= ag(x) - x - T \end{aligned}$$

Từ điều này suy ra $T = 0$, mâu thuẫn. Do vậy f là hàm hằng. Tức là $f(y) = c, \forall c \in \mathbb{R}$. Thay vào quan hệ hàm ta được

$$a = 0, c = 0.$$

12 Một số chuyên đề phương trình hàm

12.1 Phương trình hàm giải nhờ tính giá trị hàm số theo hai cách khác nhau

Ví dụ 12.1. (THTT 11/394) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)+y\right)=f(x+y)+xf(y)-xy-x+1.$$

Giải

Thay $y=0$ vào quan hệ hàm ta được

$$f\left(f(x)\right)=f(x)+xf(0)-x+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Và thay $x=0$ vào đẳng thức trên ta được

$$f\left(f(0)\right)=f(0)+1.$$

Thay y bởi $f(y)$ vào quan hệ hàm ban đầu ta được

$$\begin{aligned}f\left(f(x)+f(y)\right)&=f\left(x+f(y)\right)+xf\left(f(y)\right)-xf(y)-x+1\\&=\left[f(x+y)+yf(x)-xy-y+1\right]+x\left[f(y)+yf(0)-y+1\right]-xf(y)-x+1\\&=f(x+y)+yf(x)+xyf(0)-2xy-y+2.\end{aligned}$$

Hoán chuyển vài trò x và y trong kết quả trên ta được

$$f\left(f(x)+f(y)\right)=f(x+y)+xf(y)+xyf(0)-2xy-x+2.$$

Từ đây ta nhận được

$$yf(x)-y=xf(y)-x,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thay $x=0,y=1$ ta được $f(0)=1$, do đó $f\left(f(0)\right)=2$. Lại thay $y=1$ và sử dụng kết quả $f\left(f(0)\right)=2,f(0)=1$ ta được

$$f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 12.2. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ thỏa mãn hai điều kiện:
1. $f(x+1)=f(x)+1,\forall x\in\mathbb{Q}^+$
2. $f(x^3)=f^3(x),\forall x\in\mathbb{Q}^+$

Giải
Quy nạp ta chứng minh được $f(x+n)=f(x)+n,\forall x\in\mathbb{Q}^+,\forall n\in\mathbb{N}$ (*).
Với mỗi số thực $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^+$.
- Tính theo cách (*) được: $f(r+q^2)^3=f^3(r)+3p^2+3pq^3+q^6$
- Tính theo điều kiện (b) được: $f(r+q^2)^3=f^3(r)+3f^2(r)q^2+3f(r)q^4+q^6$
Từ hai điều kiện trên ta được:

$$q^2f^2(r)+q^4f(r)-(p^2+pq^3)=0$$

Giải phương trình này ta tìm được: $f(r) = r, \forall r \in \mathbb{Q}^+$

Nhưng từ kết quả của hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}^+$ thì ta thay điều kiện (b) cho hai ẩn:

$$f(x^3 + y) = x^3 + y = f^3(x) + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

và điều kiện cũng được mở rộng từ $\mathbb{Q}^+$ thành $\mathbb{R}^+$ vậy ta được bài toán:

Bài tập tương tự: Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x^3 + y) = f^3(x) + \frac{f(xy)}{f(x)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Vấn đề gian nan nhất của mở rộng này là tính được $f(1)$.
Cho $y = 1$ ta được:

$$f(x + 1) = f^3(x) + 1(1)$$

Cho $x = 1$ ta được:

$$f(y + 1) = f^3(1) + \frac{f(y)}{f(1)}(2)$$

Đặt $f(1) = a$ thì sử dụng (1) ta tính được:

$$f(2) = a^3 + 1, f(9) = (a^3 + 1)^3 + 1$$

Sử dụng (2) ta tính được:

$$f(9) = a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^7}$$

Giải phương trình:

$$(a^3 + 1)^3 + 1a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^7}$$

ta được: a=1. Vậy ta được:

$$f(x + 1) = f(x) + 1 \text{ và } f(x^3) = f^3(x)$$

Tức là ta có được bài toán ban đầu. Còn vấn đề sử lý trên $\mathbb{R}^+$ ta sử dụng tính trù mật của tập số thực với chú ý f là hàm tăng.

13 Giải phương trình hàm bằng cách thêm biến

Ví dụ 13.1. (Indian TST 2004) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)f(y) - c\sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

trong đó c là hằng số lớn hơn 1.

Giải

Bằng cách thêm biến mới z ta có

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x)f(y+z) - c\sin x \sin(y+z) \\ &= f(x)\left[f(y)f(z) - c\sin y \sin z\right] - c\sin x[siny \cos z + \sin z \cos y] \\ &= f(x)f(y)f(z) - cf(x)\sin y \sin z - c\sin x \sin y \cos z - c\sin x \cos y \sin z. \end{aligned}$$

Nhưng rõ ràng $f(x+y+z) = f(y+x+z)$, do đó ta có

$$\sin z\left[f(x)\sin y - f(y)\sin x\right] = \sin z\left[\cos x \sin y - \cos y \sin x\right].$$

Thế $z = \frac{\pi}{2}$ ta nhận được

$$f(x)\sin y - f(y)\sin x = \cos x \sin y - \cos y \sin x.$$

Với $x = \pi$ và y không phải là bội nguyên của π, ta nhận được $\sin y\left[f(\pi)+1\right] = 0$, và do đó $f(\pi) = -1$. Lại thay $x = y = \frac{\pi}{2}$ vào điều kiện ban đầu ta có

$$f(\pi) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 - c,$$

dẫn đến $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\sqrt{c-1}$. Lại thế $y = \pi$ vào điều kiện ban đầu ta được $f(x+\pi) = -f(x)$. Khi đó thì

$$\begin{aligned} -f(x) = f(x+\pi) &= f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right) - c\cos x \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[f(x)f\left(\frac{\pi}{2}\right) - c\sin x\right] - c\cos x, \end{aligned} \tag{35}$$

suy ra

$$f(x)\left[\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - 1\right] = cf\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x - c\cos x.$$

Từ điều này suy ra $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x + \cos x$. Dễ dàng thử lại hai hàm sau thỏa mãn điều kiện bài toán

$$f(x) = \sqrt{c-1}\sin x + \cos x \quad \text{và} \quad f(x) = -\sqrt{c-1}\sin x + \cos x.$$

14 LUYỆN TẬP PHƯƠNG TRÌNH HÀM

14.1 Phương pháp thế biến

Ví dụ 14.1. Giải các phương trình hàm sau

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x+1) = x^2 + 2x + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = x + 3, \quad \forall x \neq 1$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f(\cos x) = \sin^2 x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}, \quad \forall x \neq 0$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x, \quad \forall x \neq 0, x \neq 1$.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right) = x, \quad \forall x \neq \pm 1$.

14.2 Bất đẳng thức hàm

Ví dụ 14.2. Giải các bất phương trình hàm sau

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $[f(x) - f(y)]^2 \leq |x - y|^3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x^3 + x) \leq x \leq [f(x)]^3 + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện sau

(i) $f(0) = f(1) = 0$.

(ii) $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in [0, 1]$.

Ví dụ 14.3. Ký hiệu $X = \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, cho hàm số $f : X \to X$ và bị chặn trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$f(x)f(y) \leq x^2 f\left(\frac{y}{2}\right) + y^2 f\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall x, y \in X.$$

Chứng minh rằng $f(x) \geq x^2, \quad \forall x \in X$.