PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

I. Các khái niệm cơ bản

- Đa thức $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ .... + a_1 x + a_0$$

(Trong đó $n \in \mathbb{N}^*; x \in \mathbb{R}; a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{R}$ và $a_n \neq 0$)

- Số tự nhiên n gọi là bậc của $f(x)$ kí hiệu là $\deg f = n$
- Đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ .... + a_1 x + a_0$ bằng không khi và chỉ khi $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_0$
- Mỗi đa thức $f(x)$ khác không có duy nhất 1 cách biểu diễn.
- Hai đa thức khác không mà bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng bậc và các hạng tử bằng nhau.
- Tất cả các hệ số thực có kí hiệu là $\mathbb{R}[x]$ tương tự $\mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}[x]$, ...

II. Phép chia đa thức

- Với hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ luôn tồn tại duy nhất hai đa thức $q(x), r(x)$ sao cho $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$
  Nếu $r(x) = 0$ thì khi ấy $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ kí hiệu là $f(x) \vdots g(x)$
- Số α là nghiệm của $f(x)$ khi $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} f(\alpha) = 0 \\ f(x) \vdots (x-\alpha) \end{array}\right.$
- Ta nói α là nghiệm bội k $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ của đa thức $f(x)$ nếu tồn tại đa thức $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ sao cho $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$

III. Phương trình hàm đa thức

- Gỉa sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các nghiệm của đa thức $f(x)$ với các bội tương ứng là $k_1, k_2, ..., k_n$ khi đó tồn tại đa thức $g(x)$ sao cho:

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \ ..... (x-\alpha_n)^{k_n} g(x)$$

(Với $g(x) \neq 0$ và $\deg f = k_1 + k_2 + \ .... + k_n + \deg g$)

- Mọi đa thức $n \geq 1$ đều có không quá n nghiệm.
- Đa thức bậc lẻ luôn có ít nhất 1 nghiệm.
- Nếu đa thức $f(x)$ có bậc n mà tồn tại $n+1$ nghiệm phân biệt $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_{n+1}$ sao cho $f(x_i) = c$ thì $f(x) = c$
- Đa thức có dạng $f(x) = f(x+a)$ là 1 đa thức hằng

<u>Bài 1:</u> Tìm tất cả các đa thức thỏa: $(x-1)f(x+1) = (x+2)f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ (1)

<u>Giải:</u>

Chọn $x = 1$ thì (1) trở thành $f(1) = 0$ suy ra $x = 1$ là nghiệm của $f(x)$

Chọn $x = -2$ thì (1) trở thành $f(3) = 0$ suy ra $x = 3$ là nghiệm của $f(x)$

Chọn $x = 0$ thì (1) trở thành $f(0) = 0$ suy ra $x = 0$ là nghiệm của $f(x)$

Khi ấy ta có: $f(x) = x(x-1)(x+2)g(x)$

Thay vào (1) thì ta có:

$$(x-1)(x+1)(x^2+2x)g(x+1) = x(x+2)(x-1)(x+1)g(x)$$

$$\Leftrightarrow g(x+1) = g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = const = c$$

Khi đó: $f(x) = x(x-1)(x+2)c$

Thử lại ta thấy thỏa.

<u>Bài 2:</u> Tìm tất cả các đa thức $xf(x-1) = (x-5)f(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (1)

<u>Giải:</u>

Chọn $x = 5$ thì (1) trở thành $f(4) = 0$ suy ra $x = 4$ là nghiệm của $f(x)$

Chọn $x = 4$ thì (1) trở thành $f(3) = 0$ suy ra $x = 3$ là nghiệm của $f(x)$

Chọn $x = 3$ thì (1) trở thành $f(2) = 0$ suy ra $x = 2$ là nghiệm của $f(x)$

Chọn $x = 2$ thì (1) trở thành $f(1) = 0$ suy ra $x = 1$ là nghiệm của $f(x)$

Chọn $x = 1$ thì (1) trở thành $f(0) = 0$ suy ra $x = 0$ là nghiện của $f(x)$

Khi ấy: $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)g(x)$

Thay vào (1) thì ta có:

$$g(x-1) = g(x) \Rightarrow g(x) = const = c$$

Suy ra: $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)c$

Thử lại ta thấy thỏa.

Bài 3: Tìm tất cả các đa thức $f[(x+1)^2] = f(x^2) + 2x + 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ (1)$

Giải:

Ta có:

$$(3) \Leftrightarrow f[(x+1)^2] - (x+1)^2 = f(x^2) - x^2$$

Đặt: $h(x) = f(x) - x$

Thay vào thì ta có:

$$g[(x+1)^2] = g(x^2) \Rightarrow g(x) = const = c$$

Khi ấy: $f(x) = x + c$

Thử lại ta thây thỏa.

Bài 4: Tỉm tất cả các đa thức thỏa $(x-1)^2 f(x) = (x-3)^2 f(x+2)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ (1)$

Giải:

Chọn $x = 3$ thì (1) trở thành $f(3) = 0$ suy ra $x = 3$ là nghiện của $f(x)$

Chọn $x = 1$ thì (1) trở thành $f(3) = 0$ suy ra $x = 3$ là nghiệm của $f(x)$

Khi ấy $f(x) = (x-3)^2 g(x)$

Thay vào (1) thì ta có:

$$g(x) = g(x+2) \Rightarrow g(x) = const = c$$

Khi ấy: $f(x) = (x-3)^2 c$

Thử lại ta thấy thỏa.

Bài 5: Tìm tất cả các đa thức thỏa:

$$(x-8)P(2x) = 8(x-1)P(x)$$

Giải:

Thay $x = 8$ thì ta có $P(8) = 0$ nên $x = 8$ là nghiệm của $P(x)$

Thay $x = 4$ thì ta có $P(4) = 0$ nên $x = 4$ là nghiệm của $P(x)$

Thay $x = 1$ thì ta có $P(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm của $P(x)$

Khi ấy $P(x) = (x-2)(x-4)(x-8)G(x)$

Thay vào thì ta có:

$$G(x) = G(2x) \Rightarrow G(x) = const = c$$

Vậy: $P(x) = (x-2)(x-4)(x-8).c$

Bài này có thể tổng quát ra bài sau:

Tìm tất cả các đa thức thỏa:

$$(x - m^k)P(mx) = m^k(x-1)P(x) \ \forall m, k \in \mathbb{N}^*$$

Bài 6: Tìm tất cả các đa thức thoả:

$$(x+1)P(x) = (x-2010)P(x+1) \ (1)$$

Giải:

Xét bài toán sau: tìm tất cả các đa thức thoả:

$$(x-a)Q(x) = (x-b)Q(x+1) \ (2)$$

Chọn $x = a$ thì ta có $Q(a+1) = 0$ suy ra $(a+1)$ là nghiệm của $Q(x)$

Chọn $x = b$ thì ta có $Q(b) = 0$ suy ra b là nghiệm của $Q(x)$

Nên $Q(x) = [x-(a+1)](x-b)H(x)$

Thay vào (2) thì ta có:

$$[x-(a+1)]H(x) = [x-(b-1)]H(x+1)$$

Chứng minh tương tự thì ta luôn có $(a+1); b$ là nghiệm của (2).

Áp dụng thì ta có:

$$P(x) = [x(x-2010)][(x-1)(x-2009)]\ \ldots.[(x-1004)(x-1006)]G(x)$$

Thay vào (1) thì:

$$(x-1004)G(x) = (x-1005)G(x+1)$$

Chọn $x = 1005$ thì $G(1005) = 0$ suy ra $x = 1005$ là nghiệm của $G(x)$

Suy ra $G(x) = (x-1005)R(x)$

Thay vào (2) ta được:

$$R(x) = R(x+1) \Rightarrow R(x) = const = c$$

Vậy: $P(x) = c.\prod_{k=1}^{2010}(x-k)$

<u>Bài 7:</u> Tìm tất cả các đa thức f và g thỏa:

$$(x^2+x+1)f(x^2-x+1) = (x^2-x+1)g(x^2+x+1)\ (1)$$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$g(x^2+x+1) \vdots (x^2+x+1)$ nên $g(x) = xg_1(x)$

$f(x^2-x+1) \vdots (x^2-x+1)$ nên $f(x) = xf_1(x)$

Thay vào (1) thì ta có:

$$f_1(x^2-x+1) = g_1(x^2+x+1)$$

Thay $x = -1-x$ thì ta được:

$$f_1(x^2+3x+3) = g_1(x^2+x+1) = f(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow f_1(x^2+3x+3) = f_1(x^2-x+1) \Rightarrow f_1\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] = f_1\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

Đặt: $h(x) = f_1\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$ thì ta có $h(x+2) = h(x) \Rightarrow h(x) = const = c$

Vậy: $f_1(x) = c \Rightarrow g_1(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) = cx$

PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG P(f)P(g)=P(h)

Gỉa sử $f(x),\ g(x),\ h(x)$ đã cho thỏa mãn điều kiện: $\deg f + \deg g = \deg h$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa:

$$P[f(x)]P[g(x)] = P[h(x)]\ (1)$$

- Định lý 1: Nếu P, Q là nghiệm của (1) thì $P.Q$ cũng là nghiệm của (1).
  Suy ra hệ quả: Nếu $P(x)$ là 1 nghiệm của (1) thì $P^n(x)$ cũng là nghiệm của (1)
- Định lý 2: Nếu f, g, h là các đa thức với hệ số thực thỏa điều kiện $\deg f + \deg g = \deg h$ và thỏa mạn 1 trong các điều kiện sau:
  - $\deg f \neq \deg g$
  - $\deg f = \deg g$ và tổng hai hệ số cao nhất của 2 đa thức khác không.

  Khi đó với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ có bậc n và thỏa (1)

Áp dụng cả 2 định lý trên thì ta thấy $P_0(x)$ là đa thức bậc nhất thỏa (1) với f, g, h là các đa thức thỏa định lý 2 thì tất cả nghiệm của (1) sẽ là $P(x) \equiv 0; P(x) \equiv 1$ và $P(x) = [P_0(x)]^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$

<u>Bài 1:</u> Tìm tất cả các đa thức thỏa $P(x^2) = P^2(x)$ (Khá quan trọng)

<u>Giải:</u>

Ta có: $f(x) = x; g(x) = x; h(x) = x^2$ thỏa mãn định lý 2 và có $P(x) = x$ thỏa phương trình trên nên ta có các đa thức thỏa là: $P(x) \equiv 0; P(x) \equiv 1; P(x) = x^n$

<u>Bài 2 (Bulgaria 1976):</u>

Tìm tất cả các đa thức thỏa $P(x^2 - 2x) = P^2(x - 2)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

<u>Giải:</u>

Ta có: $f(x) = x - 2; g(x) = x - 2;\ h(x) = x^2 - 2x$ thỏa định lý 2 và có $P(x) = x + 1$ thỏa phương trình nên ta sẽ có tất cả các đa thức là:

$$P(x) \equiv 0; P(x) \equiv 1; P(x) = (x+1)^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$$

<u>Bài 3 (Việt Nam 2006):</u> Tìm tất cả các đa thức thỏa:

$$P(x^2) + x[3P(x) + P(-x)] = P^2(x) + 2x^2\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ (1)$$

<u>Giải:</u>

Thay $x = -x$ thì ta có (1) trở thành $P(x^2) - x[3P(-x) + P(x)] = P^2(-x) + 2x^2\ (2)$

Lấy $(1) - (2)$ thì ta có:

$$4x[P(x) + P(-x)] = P^2(x) - P^2(-x)$$

$$\Leftrightarrow [P(x) + P(-x)][P(x) - P(-x) - 4x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} P(x) + P(-x) = 0 \\ P(x) - P(-x) - 4x = 0 \end{array}\right. \text{ đúng với vô số giá trị } x$$

Do $P(x)$ là đa thức nên:

$$\left[\begin{array}{c} P(x) + P(-x) = 0\ (3) \\ P(x) - P(-x) - 4x = 0\ (4) \end{array}\right. \text{ đúng với mọi giá trị } x$$

- Từ (3) thì ta có $P(-x) = -P(x)$ thay vào (1) thì ta có:

$$P(x^2) + 2xP(x) = P^2(x) + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x^2) - x^2 = [P(x) - x^2]$$

Đặt $H(x) = P(x) - x$ thì ta có: $H(x^2) = H^2(x)$. Theo bài 1 thì $H(x) \equiv 0$; $H(x) \equiv 1$ và $H(x) = x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra $P(x) = x; P(x) = x + 1; P(x) = x^n + x$

Thử lại thì ta nhận được: $P(x) = x; P(x) = x^{2n+1} + x$

- Giải tương tự như (3) thì từ (4) ta sẽ tìm ra nghiệm $P(x) = 2x + 1$ và $P(x) = x^{2n} + 2x\ (n \in \mathbb{N}^*)$

Vậy các đa thức cần tìm là:

$$P(x) = x; P(x) = x + 1; P(x) = 2x + 1; P(x) = x^n + x;; P(x) = x^{2n} + 2x\ (n \in \mathbb{N}^*)$$

SỬ DỤNG BẬC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM:

Ta có 2 công thức sau:

$$\deg[fg] = \deg f + \deg g$$

$$\deg f_0 g = \deg f \,.\deg g$$

<u>Bài 1:</u> Tìm tất cả các đa thức thỏa:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = P^2(x)$$

<u>Giải:</u>

Đặt: $d = \deg P(x)$ thì ta có:

$$4 = d^2 \Leftrightarrow d = 2$$

Suy ra: $P(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

Trong đó hệ số cao nhất của vế trái là 1 nên $a = 1$. Ta thay vào và thu gọn 2 vế:

$$x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = x^4 + bx^3 + (4 + c)x^2 + 4bx + 4c$$

Tiến hành đồng nhất thì ta được:

$$\begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Suy ra: $P(x) = x^2 - 2x + 2$

<u>Bài 2:</u> Tìm tất cả các đa thức thỏa:

$$P(x-1).P(x+1) = P[P(x)]\ (1)$$

<u>Giải:</u>

Đặt $d = \deg P(x)$ thì ta có:

$$2d = d^2 \Leftrightarrow d = 0 \text{ v } d = 2$$

- Khi $d = 0$ thì ta có $P(x) = const = c$ thay vào (1) thì:

$$c^2 = c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(x) \equiv 0 \\ P(x) \equiv 1 \end{array}\right.$$

- Khi $d = 2$ thì ta có $P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$
  Thay vào (1) và thu gọn 2 vế thì ta được:

$$a^2x^4 + 2abx^2 - (2a^2 - 2ac - b^2)x^2 - 2(ab - bc)x + a^2 + 2ac + c^2 - b^2$$

$$= a^4x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b)x + bc + ac^2$$

  Tiến hành đồng nhất hệ số thì ta được: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$

  Suy ra $P(x) = (x - 1)^2$

Vậy ta có: $P(x) \equiv 0; P(x) \equiv 1$ và $P(x) = (x - 1)^2$

<u>Bài 3:</u> Tìm tất cả các đa thức thỏa:

$$Q^2(2x) = 4[Q(x^2) - xQ(2x)] \ \forall \ x \in \mathbb{R} \ (1)$$

(Đề thi chọn đội tuyển TP.HCM năm 2006-2007)

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow [Q(2x) + 2x]^2 = 4[Q(x^2) + x^2]$$

Đặt: $P(x) = Q(x) + x$

(1) trở thành:

$$P^2(2x) = 4P(x^2)$$

Đặt: $d = \deg P(x)$ thì ta có:

$$d^2 = d \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

- Khi $d = 0$ thì $P(x) = const = c$ thay vào (1) thì:

$$c^2 = 4c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(x) \equiv 0 \\ P(x) \equiv 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q(x) = x \\ Q(x) = 4 - x \end{array}\right.$$

- Khi $d = 1$ thì $P(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ thay vào phương trình và thu gọn 2 vế:

  $$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ax^2 + 4b$$

  Đồng nhất hệ số ta được:

  $$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

  Nên $P(x) = x \Leftrightarrow Q(x) \equiv 0$

Vậy: $Q(x) \equiv 0; Q(x) = x;\ Q(x) = 4 - x$

Bài 4: Tìm tất cả các đa thức thỏa:

$$P[P(x) + x] = P(x).P(x-1)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ (1)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30/4/2010)

Giải:

Đặt: $d = \deg P(x)$ thì ta có:

$$d^2 = 2d \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = 2 \end{array}\right.$$

- Khi $d = 0$ thì $P(x) = const = c$ thay vào (1) ta có:

  $$c = c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(x) \equiv 0 \\ P(x) \equiv 1 \end{array}\right.$$

- Khi $d = 2$ thì $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

  Trước hết ta đồng nhất hệ số cao nhất của 2 vế là $a^3 = a \Leftrightarrow a = 1$

  Suy ra $P(x) = x^2 + bx + c$. Ta sẽ chứng minh $P(x) = x^2 + bx + c$ với mọi $b, c \in \mathbb{R}$ đều thỏa (1). Phần này dành cho mọi người.

Vậy các đa thức cần tìm là: $P(x) \equiv 0; P(x) \equiv 1; P(x) = x^2 + bx + c$ $(\forall\, b, c \in \mathbb{R})$

Các nguồn tài liệu tham khảo:

- Chuyên đề phương trình hàm đa thức-Trần Nam Dũng.
- Chủ đề đa thức-Đỗ Thanh Hân.
- Polynomial Equations-Dusan Djukic.
- Polynomials in One Variable- Dusan Djukic.
- 100 Nice Polynomial Problems With Solutions -Amir Hossein Parvardi
- Diễn đàn mathlinks.ro
- Diễn đàn mathscope.org