

PHẦN II: LƯỢNG GIÁC ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1 : PHƯƠNG TRÌNH HÀM LƯỢNG GIÁC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ SỞ:

a. Đặc trưng hàm của hàm lượng giác:

-Hàm $f(x) = \sin x$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Quy ước: } f^3(x) = [f(x)]^3$$

-Hàm $f(x) = \cos x$ có tính chất

$$f(2x) = 2f^2(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{và } f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y); \forall x, y \in \mathbb{R}$$

-Cặp hàm $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ có tính chất

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x); \forall x, y \in \mathbb{R} \\ g(x+y) = g(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot f(y); \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

-Hàm $f(x) = \tan x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) \cdot f(y)}$$

Với $x, y, x+y \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

-Hàm $f(x) = \cot x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y) - 1}{f(x) + f(y)}$$

Với $x, y, x+y \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z}), x \neq k\pi; y \neq k\pi$

b. Đặc trưng hàm của hàm lượng giác ngược:

-Hàm $f(x) = \arcsin x$ có tính chất

$$f(x) + f(y) = f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right); \forall x, y \in [-1;1]$$

-Hàm $g(x) = \arccos x$ có tính chất

$$g(x) + g(y) = g\left(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}\right); \forall x, y \in [-1;1]$$

-Hàm $h(x) = \text{arctg} x$ có tính chất

$$h(x) + h(y) = h\left(\frac{x+y}{1-xy}\right); \forall x, y, xy \neq 1$$

-Hàm $p(x) = \text{arc cot } g$ có tính chất

$$p(x) + p(y) = p\left(\frac{xy-1}{x+y}\right); \forall x, y, x+y \neq 0$$

c. Phương trình hàm Cauchy:

Phương trình này cũng như cách chứng minh nó sẽ được sử dụng rất nhiều trong phần này.

*Phát biểu:

Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên tập số thực và thỏa:

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \forall x, y \in \mathbb{R}$$

thì $f(x) = ax$, với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý.

*Chứng minh:

Từ (1) suy ra $f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$

Và với $y = x$ thì $f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Giả sử với k nguyên dương, $f(kx) = kf(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Khi đó: $f((k+1)x) = f(kx+x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$

Từ đó theo nguyên lý quy nạp, ta có:

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Ta kết hợp tính chất $f(-x) = -f(x)$ thu được:

$$f(mx) = mf(x), \forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Từ (2) ta có:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = 2^2 f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \dots = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} f(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4)

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n} \cdot f(1), \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+$$

Sử dụng giả thiết liên tục của hàm $f(x) \Rightarrow f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, a = f(1)$

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = ax$ thỏa (1). Suy ra đpcm.

Tiếp đến ta sẽ xét các bài toán liên quan đến phương pháp này.

II. Các bài toán chọn lọc:

Bài 1: Xác định α, β để hàm số $f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, ta luôn luôn giả thiết $a \geq b \geq c$

Nhận xét rằng, phép nghịch đảo $g(x) = \frac{1}{x}$ không có tính chất $g(a), g(b), g(c)$ Là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC. Thật vậy, xét tam giác cân với $a = b = 2, c = 1$ thì ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có $f(a) > 0, f(b) > 0, f(c) > 0, \forall ABC$

Suy ra

$$\alpha a + \beta > 0, \alpha b + \beta > 0, \alpha c + \beta > 0, \forall ABC \quad (3)$$

Từ (3) ta thu được $\alpha \geq 0$. Thật vậy, nếu $\alpha < 0, \beta$ tùy ý cho trước thì ta chọn tam giác ABC có độ dài cạnh a đủ lớn, theo tính chất về dấu của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$

Tương tự, cũng từ (3) ta suy ra $\beta \geq 0$. Thật vậy, nếu $\beta < 0$ ta chọn tam giác ABC

Có độ dài cạnh a đủ nhỏ thì theo tính chất về dấu của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\alpha = 0, \beta = 0$ $f(x)$ không xác định. Với $\alpha = 0, \beta > 0$ ta thu được hàm hằng dương nên $f(a) = f(b) = f(c) > 0$ và $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác đều.

Xét trường hợp $\alpha > 0, \beta > 0$. Khi đó

$$f(a) \leq f(b) \leq f(c)$$

Vậy ta cần xác định các số dương α, β sao cho luôn có

$$f(a) + f(b) > f(c), \forall ABC, a \geq b \geq c$$

$$\text{Hay} \quad \frac{1}{\alpha a + \beta} + \frac{1}{\alpha b + \beta} > \frac{1}{\alpha c + \beta}, \forall ABC, a \geq b \geq c \quad (4)$$

Xét các tam giác ABC cân đồng dạng với tam giác cạnh 3,3,1, tức $a = b = 3d, c = d$ với $d > 0$ tùy ý. Khi đó, (4) có dạng

$$\frac{1}{3d\alpha + \beta} + \frac{1}{3d\alpha + \beta} > \frac{1}{d\alpha + \beta}, \forall d > 0$$

Hay

$$\frac{2}{3d\alpha + \beta} > \frac{1}{d\alpha + \beta} \Leftrightarrow \frac{3d\alpha + \beta}{2} < d\alpha + \beta \Leftrightarrow \beta > d\alpha, \forall d > 0$$

Điều này không xảy ra khi d đủ lớn.

Vậy với $\alpha = 0, \beta > 0$ thì hàm số $f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bài 2: Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0, \pi)$ sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải:

Ta cần xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ có đạo hàm trong $(0, \pi)$ sao cho

$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in (0, \pi) \\ f(0) = 0 \\ f(A) + f(B) + f(C) = \pi \end{cases}$$

Theo giả thiết thì $f(0) = 0$ nên $f(\pi) = \pi$ $C = \pi - (A + B)$

Suy ra

$$f(A) + f(B) + f(\pi - A - B) = \pi, \forall A, B, A + B \in [0, \pi]$$

Hay

$$f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \forall x, y, x + y \in [0, \pi]$$

Lấy đạo hàm trong $(0, \pi)$ theo biến x , ta thu được

$$f'(x) - f'(\pi - x - y) = 0, \forall x, y, x + y \in [0, \pi] \quad (5)$$

Từ (5) suy ra là hàm hằng trong $(0, \pi)$ và vì vậy $f(x) = px + q$. Do $f(0) = 0$ nên $q = 0$ và vì vậy $f(x) = px$. Do $f(\pi) = \pi$ nên $p = 1$ và ta thu được $f(x) = x$

Vậy hàm số $f(x) = x$ là hàm số liên tục trong $[0, \pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0, \pi)$ thỏa mãn $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bài 3: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ sao cho

$f(0) = 0, f(x) > 0, \forall x \in (0, \pi)$ và $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải:

Ta phát biểu bài toán đã cho dưới dạng

Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$, $f(0) = 0, f(x) > 0, \forall x \in (0, \pi)$ và

$$f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leq \pi \quad (6)$$

Do $f(0) = 0$ nên với $y = 0$, ta thu được

$$f(x) + f(0) + f(\pi - x) = \pi, \forall x \in [0, \pi]$$

Đặt $f(x) = x + g(x)$ thì $g(0) = 0$ $g(x)$ là hàm liên tục trong $[0, \pi]$

Ta có

$$(6) \Leftrightarrow x + g(x) + (\pi - x) + g(\pi - x) = \pi$$

$$\Leftrightarrow g(x) + g(\pi - x) = 0, \forall x \in [0, \pi]$$

$$\text{Hay} \quad g(\pi - x) = -g(x), \forall x \in [0, \pi] \quad (7)$$

Thế $f(x) = x + g(x)$ vào (6) và sử dụng (7), ta thu được

$$x + g(x) + y + g(y) + \pi - (x + y) + g(\pi - (x + y)) = \pi, \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leq \pi$$

Hay

$$g(x) + g(y) - g(x + y) = 0, \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leq \pi$$

Tức là

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leq \pi \quad (8)$$

Do $g(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ nên (8) là phương trình hàm Cauchy và $g(x) = \alpha x$ với

α là hằng số, $f(x) = (1 + \alpha)x$. Để $f(x) > 0, \forall x \in (0, \pi)$ ta cần có $1 + \alpha > 0$ và để

$$f(A) + f(B) + f(C) = \pi \quad \text{ta cần có } 1 + \alpha = 1. \text{ suy ra } \alpha = 0 \quad f(x) \equiv x$$

Bài 4: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ sao cho $f(x) > 0, \forall x \in (0, \pi)$ và

$f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải:

Ta thấy có hai hàm số hiển nhiên thỏa mãn bài toán, đó là $f(x) = x$ và $f(x) = \frac{\pi}{3}$

Ta phát biểu bài toán đã cho dưới dạng

Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ sao cho $f(x) > 0$ và

$$f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leq \pi \quad (9)$$

Cho $y = 0$, ta thu được

$$f(x) + f(0) + f(\pi - x) = \pi, \forall x \in [0, \pi]$$

Hay

$$f(\pi - x) = \pi - f(0) - f(x), \forall x \in [0, \pi]$$

Thế vào (9), ta thu được

$$f(x) + f(y) + [\pi - f(0) - f(x+y)] = \pi, \forall x, y \in [0, \pi], x+y \leq \pi$$

Tức là

$$f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y), \forall x, y \in [0, \pi], x+y \leq \pi \quad (10)$$

Đặt $f(x) = f(0) + g(x)$. Khi đó $g(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ và có dạng

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in [0, \pi], x+y \leq \pi \quad (11)$$

Do $g(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ nên (11) là phương trình hàm Cauchy và $g(x) = \alpha x$ và

$f(x) = \alpha x + \beta$. Ta cần xác định α, β để $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$ và để

$$f(A) + f(B) + f(C) = \pi$$

Tức là

$$\begin{cases} \alpha x + \beta > 0, \forall x \in (0, \pi) \\ \alpha(A+B+C) + 3\beta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta > 0, \forall x \in (0, \pi) \\ \alpha\pi + 3\beta = \pi \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = \alpha x + \frac{(1-\alpha)\pi}{3} > 0, \forall x \in (0, \pi) \quad (12)$

Cho $x \rightarrow 0$ và $x \rightarrow \pi$, từ (12) ta thu được

$$-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

Với $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$ thì hiển nhiên (12) thỏa mãn.

Xét $\alpha = -\frac{1}{2}$ thì $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Thật vậy, với $0 < x < \pi$ thì $f(x) > f(\pi) = 0$

Xét $\alpha = 1$ thì $f(x) = x$ hiển nhiên thỏa mãn điều kiện bài ra.

Vậy, các hàm cần tìm đều có dạng

$$f(x) = \alpha x + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

Nhận xét

Sau đây, ta sẽ xét một số bài toán sử dụng kiến thức lượng giác đơn giản để giải các bài toán liên quan đến phương trình hàm.

Các hàm này thường sử dụng 3 thủ thuật:

- Chọn các giá trị phù hợp với đối số
- Đổi biến số (đặt biến mới)
- Đổi hàm số (đặt hàm số mới)

Bài 4: Tìm hàm $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = 1999, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2000 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \forall x, y \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Nhận xét: Ta cần định hướng sẽ thay x, y như thế nào sao cho đơn giản nhất, hơn nữa phải sử dụng được

$$\begin{cases} f(0) = 1999 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2000 \end{cases}$$

Ta xét cách thế sau

Lời giải:

Thay $x = t - \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$ ta thu được

$$f(t) + f(t - \pi) = 2f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (1)$$

Tương tự, với $x = \frac{\pi}{2}, y = t - \frac{\pi}{2}$ rồi sau đó $x = 0, y = t - \pi$ ta được

$$f(t) + f(x - t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2.2000\sin t \quad (2)$$

$$f(t - \pi) + f(\pi - t) = 2f(0)\cos(t - \pi) = -2.1999\cos t \quad (3)$$

Nhân (3) với (-1) rồi cộng (1) với (2)

$$2f(t) = 2.2000\sin t + 2.1999\cos t$$

$$\Rightarrow f(x) = 1999\cos x + 2000\sin x, \forall x$$

Thử lại thấy đúng.

Bài 5: Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{I}$ và

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{I} \quad (*)$$

Lời giải:

Với dạng này ta chỉ cần xem xét quá trình sau

-Tìm $f(0)$

-Ứng với giá trị $f(0)$ tìm được dùng phép thế thích hợp tìm thêm một số giá trị.

-Tìm $f(x)$

Thật vậy

$$\text{Với } x = y = 0, \text{ ta thu được: } f^2(0) - f(0) = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

-Nếu $f(0) = 0$ thì với $y = 0$ ta có $-f(x) = 0$

Từ đó $f(x) \equiv 0, \forall x$

Nhưng nếu thay $x = y = \frac{\pi}{2}$ ta thấy mâu thuẫn.

-Nếu $f(0) = 1$ thay $y = -x$ ta có

$$f(x)f(-x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

Thay $x = \frac{\pi}{2}$ ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

+Nếu $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, thay $y = \frac{\pi}{2}$ vào

$$\text{Ta có } f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \cos x, \forall x$$

+Nếu $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ thay $y = -\frac{\pi}{2}$ vào ta được

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \cos x, \forall x$$

Vậy $f(x) = \cos x$. Thử lại thấy đúng.

Nhận xét: Hóa ra điều kiện liên tục để cho là thừa. Không biết hàm ý của tác giả là gì khi cho thêm giả thiết nhưng rõ ràng bài toán có thể giải bằng phép thế đơn giản.

Bài 6: Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trong $[-1, 1]$ và thỏa mãn

$$f(2x^2 - 1) = 2xf(x), \forall x \in [-1, 1]$$

Nhận xét:

Thoạt nhìn chúng ta liên tưởng $2x^2 - 1 \rightarrow 2\cos^2 x - 1$.

Đây là điều đã đề cập ở bài “Dãy số..”

Lời giải:

Ta sẽ sử dụng thuật chuyển ẩn $x = \cos t$

Ta được $f(\cos 2t) = 2\cos t \cdot f(\cos t)$

$$\text{Vậy } \frac{f(\cos 2t)}{\sin 2t} = \frac{f(\cos t)}{\sin t}, t \notin \pi\mathbb{Z} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Xét hàm $f(t) = \frac{f(\cos t)}{\sin t}$

Như vậy $f(t)$ xác định và liên tục với $t \notin \pi\mathbb{Z}$

Rõ ràng $f(t) = f(2t)$, từ đó $f(t) = f(2^m t), \forall m \in \mathbb{Z}$ (1)

Mặt khác $f(t) = f(t + 2\pi) \Rightarrow f(t) = f(t + 2n\pi), \forall n \in \mathbb{Z}$ (2)

$$f(1) = f(2^{m+1}) = f(2^{m+1} + 2n\pi) = f\left(1 + \frac{n\pi}{2^m}\right)$$

Tập các điểm $\left\{1 + \frac{n\pi}{2^m}, m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ là trù mật trong $\mathbb{R}$, vậy $f(x)$ là hằng số trên mỗi khoảng $(n\pi, (n+1)\pi)$

Để thấy $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-1, 1]$

Vậy $f(t + \pi) = \frac{f(-\cos t)}{-\sin t} = f(t)$

Từ đó các hằng số trên mỗi khoảng mở là như nhau.

Lại có $f(-t) = -f(t) \Rightarrow f(t) = 0$ có thể trừ ra những điểm của $n\pi$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$$

Mà $f(x)$ liên tục vậy $f(x) = 0, \forall x \in [-1, 1]$

Sau đây ta sẽ đến các bài toán sử dụng đặc trưng hàm đã được đề cập ở phần kiến thức cơ sở.

Đây là dạng bài hay và khó, thường xuất hiện trong các bài thi học sinh giỏi dưới dạng các bài khó.

Bài 7: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trong $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) = f(x) + f(y), \forall x, y \in [-1, 1]$$

Lời giải:

Đặt $x = \sin u, y = \sin v$ với $u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó, $\cos u \geq 0, \cos v \geq 0$ và

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin(u+v), \forall u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Phương trình hàm đã cho có thể viết dưới dạng

$$f(\sin u) + f(\sin v) = f(\sin(u+v)), \forall u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Đặt $f(\sin u) = g(u)$ ta được

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \forall u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Do vậy, $g(u) = au, a = \text{const}$ và $f(x) = a \arcsin x$. Thử lại, ta thấy hàm số

$f(x) = a \arcsin x$ thỏa mãn bài ra

Nhận xét :

Bài toán đã sử dụng một phép biến đổi cơ bản

$$\begin{cases} \sin u \cos v + \sin v \cos u = \sin(u+v) \\ \sin v \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sin v \cos u \end{cases}$$

Việc phát hiện phép biến đổi này xem như mẫu chốt bài toán.

Chú ý: chúng ta đã sử dụng phương trình hàm Cauchy ở cách giải trên.

Với cùng tư tưởng tương tự ta xét bài toán

Bài 8: Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}) = f(x) + f(y), \forall x, y \in [-1, 1]$$

Lời giải:

Đặt $x = \cos u, y = \cos v, \forall u, v \in [0, \pi]$. Khi đó $\sin u \geq 0, \sin v \geq 0$

$$xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2} = \cos(u+v), \forall u, v \in [0, \pi]$$

Phương trình hàm đã cho có thể viết dưới dạng

$$f(\cos u) + f(\cos v) = f(\cos(u+v)), \forall u, v \in [0, \pi]$$

Đặt $f(\cos u) = g(u)$ ta được

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \forall u, v \in [0, \pi]$$

Do vậy, $g(u) = au, a = \text{const}$ và $f(x) = a \arccos x$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn bài toán.

Bài 9: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{I}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{I} \\ f(0) = 1, \exists x_0 \in \mathbb{I} : |f(x_0)| < 1 \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải:

Vì $f(0) = 1$ và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{I}$ nên $\exists \varepsilon > 0$ sao cho $f(x) > 0, \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (2)

Khi đó theo (2) với $n_0 \in \mathbb{N}$ đủ lớn thì