NGUYỄN TÀI CHUNG

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP THÊM BIẾN

Mục lục

Lời nói đầu

Chương 1

Tên chương

1.1 Giải phương trình hàm bằng phương pháp thêm biến.

NGUYỄN TÀI CHUNG
Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Gia Lai.

Đây là một phương pháp mới xuất hiện trong thời gian gần đây. Ý tưởng rất đơn giản như sau : Khi gặp những phương trình hàm với cặp biến tự do x, y, bằng cách thêm biến mới z, ta sẽ tính một biểu thức nào đó chứa x, y, z theo hai cách khác nhau, từ đây ta thu được một phương trình hàm theo ba biến x, y, z, sau đó chọn z bằng những giá trị đặc biệt để thu được những phương trình hàm mới, hướng tới kết quả bài toán.

1.1.1 Một số bài toán

Lời giải của các bài toán sau đây sẽ minh hoạ cho phương pháp đã nói ở trên. Ta sẽ sử dụng một số kết quả rất cơ bản của phương trình hàm, được thể hiện thông qua các bài toán sẽ trình bày ở mục 1.1.2 ở trang 21 : Một số kết quả đã sử dụng.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện*

$$f\left(x+f(y)\right)=2y+f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới z như sau : Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$, sử dụng (1) ta được

$$f\left(x+y+f(z)\right)=2z+f(x+y),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Mặt khác cũng với mọi số thực x,y,z thì

$$f\left(x+y+f(z)\right)=f\left(x+f\left(z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right)=2\left[z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right]+f(x). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} &2z + f(x+y) = 2\left[z + f\left(\frac{y}{2}\right)\right] + f(x),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(x+y) = f(x) + 2f\left(\frac{y}{2}\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (4) cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Từ (4) cho $x = 0$ và sử dụng $f(0) = 0$ ta được $f(y) = 2f\left(\frac{y}{2}\right)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Vậy (4) trở thành

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán **19** ở trang 22 ta được $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, với a là hằng số thực. Thay vào (1) ta được

$$a(x + ay) = 2y + ax,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (6) cho $x = y = 1$ ta được $a(1+a) = 2 + a \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$. Vậy

$$f(x) = \sqrt{2}x,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ; f(x) = -\sqrt{2}x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hai hàm số này thoả mãn các yêu cầu bài toán.

Bài toán 2. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(f(x) + y) = x + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới z như sau : Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{Q}$, sử dụng (1) ta được

$$f(f(x) + y + z) = x + f(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$

Mặt khác cũng với mọi số hữu tỉ x, y, z thì $f(f(z) + x) = z + f(x)$, do đó

$$f(y + (z + f(x))) = f(y + f(f(z) + x)) = f(z) + x + f(y). \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(y+z) = f(y) + f(z),\ \forall y, z \in \mathbb{Q}. \quad (4)$$

Tương tự như bài toán **19** ở trang 22, suy ra $f(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Thay vào (1) ta rút ra $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. Thử lại thấy $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -x$ thoả mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 3 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004). *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải. Giả sử f là hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$. Ta thêm biến mới z như sau : Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$, sử dụng (1) ta có $f(xyf(z)) = zf(xy)$, mặt khác

$$f(xyf(z)) = f(xf(zf(y))) = zf(y)f(x).$$

Do đó $zf(xy) = zf(y)f(x),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Từ đây cho $z = 1$ ta được

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) lấy $y = 1$ được

$$f(x)[1 - f(1)] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Nếu $f(1) \neq 1$ thì từ (3) suy ra $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm $f(x) \equiv 0$ thoả đề bài. Tiếp theo xét $f(1) = 1$. Từ (1) cho $x = 1$ được

$$f(f(y)) = y,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra f là đơn ánh, kết hợp giả thiết f liên tục suy ra f đơn điệu thực sự. Từ $f(0) = 0 < 1 = f(1)$ suy ra f là hàm tăng thực sự. Nếu $f(y) < y$ thì do f tăng thực sự nên $f(f(y)) < f(y) \Rightarrow y < f(y)$, mâu thuẫn. Nếu $f(y) > y$ thì $y = f(f(y)) > f(y)$, mâu thuẫn. Vậy $f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận : có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 4 (Đề chính thức Olympic 30/04/2011). *Tìm tất cả các hàm số* $f : [1; +\infty) \to [1; +\infty)$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(xf(y)) = yf(x),\ \forall x, y \in [1; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới $z \geq 1$ như sau : Với mọi x, y, z thuộc $[1; +\infty)$, sử dụng (1) ta có $f(xyf(z)) = zf(xy)$, mặt khác $f(xyf(z)) = f(xf(zf(y))) = zf(y)f(x)$. Do đó

$$zf(xy) = zf(y)f(x),\ \forall x, y, z \in [1; +\infty).$$

Từ đây cho $z = 1$ ta được

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in [1; +\infty). \tag{2}$$

Trong (2) cho $x = y = 1$ ta được $f(1) = f^2(1) \overset{\text{do } f(1) \geq 1}{\Rightarrow} f(1) = 1$. Trong (1) cho $x = 1$ được

$$f(f(y)) = y,\ \forall y \in [1; +\infty). \tag{3}$$

Vì $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ nên nếu $f(y)=1$ thì

$$y=f\left(f(y)\right)=f(1)=1\Rightarrow y=1.$$

Suy ra $f(y)>1$ với mọi $y>1$. Cho $x>y\geq 1$ thì từ (2) ta được

$$f(x)=f\left(\frac{x}{y}.y\right)\overset{\text{do }(2)}{\Rightarrow}=f(y).f\left(\frac{x}{y}\right)>f(y),$$

suy ra hàm f đồng biến trên $[1;+\infty)$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x)=x,\forall x\in[1;+\infty).$$

Giả sử có $x_0\in[1;+\infty)$ sao cho $f(x_0)\neq x_0$. Nếu $f(x_0)>x_0$ thì

$$f\left(f(x_0)\right)>f(x_0)\Rightarrow x_0>f(x_0),\ \text{mâu thuẫn với } f(x_0)>x_0.$$

Nếu $f(x_0)<x_0$ thì

$$f\left(f(x_0)\right)<f(x_0)\Rightarrow x_0<f(x_0),\ \text{mâu thuẫn với } f(x_0)<x_0.$$

Vậy $f(x)=x,\forall x\in[1;+\infty)$. Thử lại thấy thoả mãn.

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta sẽ thêm biến mới z như sau : Với mọi số thực x, y, z, theo (1) ta có

$$\begin{aligned}f(x+y+z)&=f(x+y)\cos z+f(z)\cos(x+y)\\&=[f(x)\cos y+f(y)\cos x]\cos z+f(z)\cos(x+y)\\&=[f(x)\cos y+f(y)\cos x]\cos z+f(z)\left(\cos x\cos y-\sin x\sin y\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}f(x+y+z)&=f(x)\cos(y+z)+f(y+z)\cos x\\&=f(x)\cos(y+z)+[f(y)\cos z+f(z)\cos y]\cos x\\&=f(x)\left(\cos y\cos z-\sin y\sin z\right)+[f(y)\cos z+f(z)\cos y]\cos x.\end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) thu được

$$\begin{aligned}&[f(x)\cos y+f(y)\cos x]\cos z+f(z)\left(\cos x\cos y-\sin x\sin y\right)\\=&f(x)\left(\cos y\cos z-\sin y\sin z\right)+[f(y)\cos z+f(z)\cos y]\cos x\end{aligned}$$

Dễ dàng rút gọn được

$$f(z)\sin x\sin y = f(x)\sin y\sin z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) lấy $y=\dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$\begin{aligned}&f(z)\sin x = f(x)\sin z,\ \forall x,z\in\mathbb{R} && (5)\\ \Rightarrow&\frac{f(x)}{\sin x}=\frac{f(z)}{\sin z},\ \forall x\neq m\pi,\ z\neq n\pi\ \ (m,n\in\mathbb{Z})\\ \Rightarrow&\frac{f(x)}{\sin x}\equiv c\Rightarrow f(x)\equiv c\sin x.\end{aligned}$$

Vậy $f(x)=c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại thấy thoả mãn.
Lưu ý. Đến (5) ta có thể lí luận như sau : Từ (5) lấy $z=\dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$f(x)=c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ c=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

và cũng được kết quả tương tự. Từ lời giải bằng phương pháp thêm biến như trên ta suy ra một lời giải khác, rất ngắn gọn như sau : Trong (1) lấy $y=\dfrac{\pi}{2}$, ta được

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Đặt $x+\dfrac{\pi}{2}=t$, thay vào (6) ta được

$$f(t)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

và cũng được kết quả tương tự.

Bài toán 6 (Chọn đội tuyển Ấn Độ năm 2004). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x+y)=f(x)f(y)-c\sin x\sin y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó c là hằng số lớn hơn 1.

Giải. Bằng cách thêm biến mới z ta có

$$\begin{aligned}&f(x+y+z)=f(x)f(y+z)-c\sin x\sin(y+z)\\ =&f(x)\left[f(y)f(z)-c\sin y\sin z\right]-c\sin x(\sin y\cos z+\cos y\sin z)\\ =&f(x)f(y)f(z)-cf(x)\sin y\sin z-c\sin x\sin y\cos z-c\sin x\cos y\sin z.\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}&f(y+x+z)\\=&f(x)f(y)f(z)-cf(y)\sin x\sin z-c\sin y\sin x\cos z-c\sin y\cos x\sin z.\end{aligned}$$

Mà $f(x+y+z)=f(y+x+z)$ nên

$$\begin{aligned}&cf(x)\sin y\sin z+c\sin x\sin y\cos z+c\sin x\cos y\sin z\\=&cf(y)\sin x\sin z+c\sin y\sin x\cos z+c\sin y\cos x\sin z.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sin z\left[f(x)\sin y-f(y)\sin x\right]=\sin z\left(\sin y\cos x-\cos y\sin x\right).$$

Thế $z=\dfrac{\pi}{2}$, ta nhận được

$$f(x)\sin y-f(y)\sin x=\sin y\cos x-\cos y\sin x. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x=\pi$, ta được

$$f(\pi)\sin y=-\sin y. \tag{3}$$

Trong (3), lấy $y=\dfrac{\pi}{4}$, ta được $f(\pi)\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow f(\pi)=-1$. Trong (1), lấy $x=y=\dfrac{\pi}{2}$, ta được

$$f(\pi)=f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\Leftrightarrow f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=c-1\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pm\sqrt{c-1}.$$

Trong (1), lấy $y=\pi$, ta được

$$f(x+\pi)=f(x)f(\pi)\Rightarrow f(x+\pi)=-f(x). \tag{4}$$

Từ (4) và (1) ta có

$$\begin{aligned}-f(x)&=f(x+\pi)=f\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\&=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}\\&=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\cos x=\left[f(x)f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\sin x\right]f\left(\frac{\pi}{2}\right)-c\cos x.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&f(x)\left[f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right]=cf\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x+c\cos x\\\Rightarrow&cf(x)=cf\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x+c\cos x\Rightarrow f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x+\cos x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm\sqrt{c-1}\sin x + \cos x.$$

Sau khi thử lại, ta kết luận : Có hai hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài là $f(x) = \sqrt{c-1}\sin x + \cos x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$; $f(x) = -\sqrt{c-1}\sin x + \cos x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài toán 7 (Đề nghị Olympic 30/04/2009). *Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn*

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1+f(2x)} + \dfrac{1}{1+f(4x)} + \dfrac{1}{1-f(6x)} > 2.$

Giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x)f(y) - \sin x \sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tiến hành tương tự như bài toán **6** ở trang 7 ta thu được

$$\sin z\left[f(x)\sin y - f(y)\sin x\right] = \sin z\left(\sin y\cos x - \cos y\sin x\right),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Thế $z = \dfrac{\pi}{2}$, ta nhận được

$$\begin{aligned} & f(x)\sin y - f(y)\sin x = \sin y\cos x - \cos y\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \left[f(x) - \cos x\right]\sin y = \left[f(y) - \cos y\right]\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Trong (2) cho $y = \dfrac{\pi}{2}$ ta được $f(x) - \cos x = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng $f(x) = \cos x + a\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & \cos(x+y) + a\sin(x+y) \\ = & \left(\cos x + a\sin x\right)\left(\cos y + a\sin y\right) - \sin x\sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Từ (2) cho $x = y = \dfrac{\pi}{4}$, ta được

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(a+1)^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy $f(x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thoả mãn (1). Ta có

$$\begin{aligned} & 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 - \cos 6x = 3 + \cos 4x + \cos 2x - \cos 6x \\ = & 4 - 2\sin^2 2x + 2\sin 4x\sin 2x \\ = & \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(\sin 4x - 2\sin 2x)^2 - \frac{1}{2}\cos^2 4x \le \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\frac{1}{1+f(2x)}+\frac{1}{1+f(4x)}+\frac{1}{1-f(6x)}=\frac{1}{1+\cos 2x}+\frac{1}{1+\cos 4x}+\frac{1}{1-\cos 6x}$$
$$\geq\frac{9}{3+\cos 2x+\cos 4x-\cos 6x}\geq\frac{9}{\frac{9}{2}}=2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}1+\cos 2x=1+\cos 4x=1-\cos 6x\\ \sin 4x=2\sin 2x\\ \cos 4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=\cos 4x=-\cos 6x\\ \sin 4x=2\sin 2x\\ \cos 4x=0.\end{cases}$$

Dễ thấy hệ này vô nghiệm, do đó dấu bằng không xảy ra được, từ đó suy ra

$$\frac{1}{1+f(2x)}+\frac{1}{1+f(4x)}+\frac{1}{1-f(6x)}>2.$$

Lưu ý. Giả thiết hàm số f liên tục trong bài toán này là không cần thiết.

Bài toán 8. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn $f(0)\neq 0$ và*

$$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-\sin^2 y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x=y$ ta được

$$f(2x)f(0)=f^2(x)-\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $b=f(0)\neq 0$. Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}f(x+y)f(x-y)&=f(2x)f(0)+\sin^2 x-\sin^2 y\\&=bf(2x)+\sin(x+y)\sin(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Đặt $u=x+y$, $v=x-y$, thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned}&f(u)f(v)=bf(u+v)+\sin u\sin v,\ \forall u,v\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&bf(u+v)=f(u)f(v)-\sin u\sin v,\ \forall u,v\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4}$$

Với mọi u, v, $w\in\mathbb{R}$, sử dụng (4) ta được

$$\begin{aligned}&bf(u+v+w)=f(u+v)f(w)-\sin(u+v)\sin w\\ =&\frac{1}{b}\left[f(u)f(v)-\sin u\sin v\right]f(w)-(\sin u\cos v+\cos u\sin v)\sin w\\ =&\frac{1}{b}f(u)f(v)f(w)-\frac{1}{b}f(w)\sin u\sin v-\sin u\cos v\sin w-\cos u\sin v\sin w.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}&bf(u+v+w)=f(u)f(v+w)-\sin u\sin(v+w)\\=&\frac{1}{b}\left[f(v)f(w)-\sin v\sin w\right]f(u)-(\sin v\cos w+\cos v\sin w)\sin u\\=&\frac{1}{b}f(u)f(v)f(w)-\frac{1}{b}f(u)\sin v\sin w-\sin u\sin v\cos w-\sin u\cos v\sin w.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b}f(w)\sin u\sin v+\cos u\sin v\sin w\\=&\frac{1}{b}f(u)\sin v\sin w+\sin u\sin v\cos w,\ \forall u,v,w\in\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{5}$$

Từ (5) cho $v=\frac{\pi}{2}$ ta được

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b}f(w)\sin u+\cos u\sin w=\frac{1}{b}f(u)\sin w+\sin u\cos w,\ \forall u,w\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&\left[\frac{1}{b}f(w)-\cos w\right]\sin u=\left[\frac{1}{b}f(u)-\cos u\right]\sin w,\ \forall u,w\in\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{6}$$

Trong (6) cho $u=\frac{\pi}{2}$ ta được

$$\frac{1}{b}f(w)-\cos w=\frac{1}{b}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin w,\ \forall w\in\mathbb{R}.$$

Vậy hàm f có dạng $f(x)=b\cos x+c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&\left[b\cos(x+y)+c\sin(x+y)\right]\left[b\cos(x-y)+c\sin(x-y)\right]\\=&(b\cos x+c\sin x)^2-\sin^2y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{7}$$

Trong (7) cho $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$ ta được $-c^2=b^2-1\Leftrightarrow b^2+c^2=1$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=b\cos x+c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với a, b là các hằng số, $b\neq 0$ và $b^2+c^2=1$ thoả mãn các yêu cầu đề bài.

Bài toán 9. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn*

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\tag{1}$$

Giải. Ta thêm biến mới z như sau : Theo (1) ta có

$$xf(x)-zf(z)=(x-z)f(x+z),\forall x,z\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

$$xf(x)-zf(z)=\left[xf(x)-yf(y)\right]+\left[yf(y)-zf(z)\right]$$

$$= (x-y)f(x+y) + (y-z)f(y+z), \forall x,y,z \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$(x-z)f(x+z) = (x-y)f(x+y) + (y-z)f(y+z), \forall x,y,z \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Với mọi $u \in \mathbb{R}$, xét hệ $\begin{cases} x+z=u \\ x+y=1 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) = \left(\dfrac{u+1}{2}; \dfrac{1-u}{2}; \dfrac{u-1}{2}\right)$. Do đó (4) trở thành $f(u) = f(1)u + f(0)(1-u),\ \forall u \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = ax+b,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) thấy thoả mãn.

Bài toán 10 (Đề nghị Olympic Toán Quốc tế-2005). *Tìm tất cả các hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x)f(y) = 2f\left(x + yf(x)\right),\ \forall x,y > 0. \qquad (1)$$

Giải. Giả sử hàm f thoả mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ thêm biến mới $z > 0$ như sau : Với mọi số dương x, y, z, sử dụng (1) nhiều lần ta được

$$\begin{aligned} f(x)f(y)f(z) &= 2f(z)f\left(x+yf(x)\right) = 4f\left(z + (x+yf(x))f(z)\right) \\ &= 4f\left(z + xf(z) + yf(z)f(x)\right) \\ &= 4f\left(z + xf(z) + 2yf(z+xf(z))\right) \\ &= 2f\left(z + xf(z)\right)f(2y) = f(z)f(x)f(2y). \end{aligned} \qquad (2)$$

Do $f(x) > 0,\ f(z) > 0$ nên từ (2) thu được

$$f(y) = f(2y),\ \forall y > 0. \qquad (3)$$

Nếu tồn tại hai số dương x_1, x_2 sao cho $x_1 > x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta xét số dương $y = \dfrac{x_1 - x_2}{f(x_2) - f(x_1)}$. Khi đó

$$yf(x_2) - yf(x_1) = x_1 - x_2 \Rightarrow yf(x_2) + x_2 = yf(x_1) + x_1$$

$$\Rightarrow f\left(x_2 + yf(x_2)\right) = f\left(x_1 + yf(x_1)\right) \overset{\text{do }(1)}{\Rightarrow} f(x_2)f(y) = f(x_1)f(y).$$

Do $f(y) > 0$ nên suy ra $f(x_2) = f(x_1)$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Do đó với mọi số dương x_1, x_2 sao cho $x_1 > x_2$ ta luôn có $f(x_1) \geq f(x_2)$, kết hợp với (3) ta sẽ chứng minh f là hàm hằng. Giả sử x_1, x_2 là hai phần tử bất kì của khoảng $(0;+\infty)$ và $x_1 < x_2$. Do $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n x_1 = +\infty$ nên tồn tại số tự nhiên n đủ lớn sao cho $2^n x_1 > x_2$. Vì thế, do (3) và do f là hàm tăng trên khoảng $(0;+\infty)$ nên f là hàm hằng trên đoạn $[x_1; 2^n x_1]$, lại do $x_2 \in [x_1; 2^n x_1]$ nên $f(x_1) = f(x_2)$, suy ra suy ra f là hàm hằng trên khoảng $(0; +\infty) : f(y) = C, \forall y > 0$. Thay vào (1) được $C = 2$. Vậy có duy nhất một hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 2, \forall x > 0.$$

Bài toán 11. *Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện : g là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm f đơn điệu thực sự trên $\mathbb{R}$ và*

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hai hàm f và g thoả mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ thêm biến mới z như sau : Với mọi x, y, z, sử dụng (1) ta được

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x+y)g(z) + f(z) = [f(x)g(y) + f(y)]\, g(z) + f(z) \\ &= f(x)g(y)g(z) + f(y)g(z) + f(z). \end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác cũng theo (1) ta có

$$f(x+y+z) = f(x)g(y+z) + f(y+z) = f(x)g(y+z) + f(y)g(z) + f(z). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi số thực x, y, z ta có

$$f(x)g(y)g(z) + f(y)g(z) + f(z) = f(x)g(y+z) + f(y)g(z) + f(z).$$

Hay

$$f(x)g(y)g(z) = f(x)g(y+z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dễ thấy $f(x) \not\equiv 0$, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (4) lấy $x = x_0$ ta được

$$g(y+z) = g(y)g(z),\ \forall y, z \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán **20** ở trang 23 ta được

$$g(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv a^x\ (a \text{ là hằng số dương}).$$

• Nếu $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì từ (1) ta được $f(x+y) = f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây lấy $y = 1$ suy ra f là hàm hằng, gặp mâu thuẫn.
• Nếu $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì từ (1) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Do f đơn điệu thực sự nên từ (6), sử dụng bài toán **22** ở trang 24 ta được

$$f(x) = kx,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \big(k \text{ là hằng số khác } 0\big)\,.$$

• Nếu $g(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số, $0 < a \neq 1$). Thế vào (1) được

$$f(x+y) = f(x)a^y + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$f(y+x)=f(y)a^x+f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (7) và (8) dẫn đến

$$\begin{aligned}&f(x)a^y+f(y)=f(y)a^x+f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&f(x)\left[a^y-1\right]=f(y)\left[a^x-1\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{9}$$

Từ (7) lấy $y=0$ được $f(0)=0$. Từ (9) suy ra

$$\frac{f(x)}{a^x-1}=\frac{f(y)}{a^y-1},\ \forall x\neq 0,y\neq 0.$$

Vậy $\dfrac{f(x)}{a^x-1}$ là hàm hằng, kết hợp với $f(0)=0$ ta được

$$f(x)=b\left(a^x-1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\ (\text{với } b \text{ là hằng số khác không}).$$

Sau khi thử lại ta kết luận : Các cặp hàm f và g thoả mãn yêu cầu đề bài là :

$$g(x)\equiv 1 \text{ và } f(x)=kx\ \ \big(k \text{ là hằng số}\big)$$
$$g(x)\equiv a^x \text{ và } f(x)\equiv b\left(a^x-1\right)\ \ \big(a,b \text{ là hằng số } 0<a\neq 1, b\neq 0\big).$$

Bài toán 12. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thoả mãn*

$$f(x+y)=f(x)f(y)f(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thoả mãn các yêu cầu đề bài. Sử dụng (1), ta thêm biến mới z như sau :

$$\begin{aligned}f(x+y+z)&=f(x)f(y+z)f(xy+xz)\\&=f(x)f(y)f(z)f(yz)f(xy)f(xz)f(x^2yz),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}f(x+y+z)&=f(y)f(x+z)f(xy+yz)\\&=f(x)f(y)f(z)f(xz)f(xy)f(yz)f(xy^2z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(x^2yz)=f(xy^2z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Với $x\neq 0$, $y\neq 0$, từ (4) lấy $z=\dfrac{1}{xy}$ ta được $f(x)=f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, hay f là hàm hằng trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Giả sử $f(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (c là hằng số). Từ (1) lấy $x=y=1$ ta được $c=c^3\Leftrightarrow c\in\{0,1,-1\}$. Từ (1) lấy $y=-x\neq 0$ ta được $f(0)=c^3=c$. Vậy $f(x)\equiv c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó tất cả các hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài là $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 1$, $f(x)\equiv -1$.

Bài toán 13. *Tìm các hàm số $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn : g là đơn ánh và*

$$f\left(g(x) + y\right) = g\left(f(y) + x\right), \ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Ta thêm biến mới z như sau :

$$\begin{aligned}
& f\left(g(x) + y\right) = g\left(f(y) + x\right), \ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \\
\Leftrightarrow & f\left(g(x) + y\right) + z = g\left(f(y) + x\right) + z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow & g\left(f\left(g(x) + y\right) + z\right) = g\left(g\left(f(y) + x\right) + z\right), \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow & f\left(g(z) + g(x) + y\right) = g\left(g\left(f(y) + x\right) + z\right), \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow & f\left(g(x) + g(z) + y\right) = g\left(g\left(f(y) + x\right) + z\right), \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow & g\left(f\left(g(z) + y\right) + x\right) = g\left(g\left(f(y) + x\right) + z\right), \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow & f\left(g(z) + y\right) + x = g\left(f(y) + x\right) + z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow & g\left(f(y) + z\right) + x = g\left(f(y) + x\right) + z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (2) cho $z = -f(y)$ ta được

$$\begin{aligned}
& g(0) + x = g\left(f(y) + x\right) - f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow & g(0) + x + f(y) = g\left(f(y) + x\right), \ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Từ (3) cho $x = -f(y) + t$ ta được $g(0) + t = g(t), \ \forall t \in \mathbb{Z}$. Vậy

$$g(x) = x + c, \ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Thay vào (1) ta được

$$f\left(x + y + c\right) = f(y) + x + c, \ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Từ (4) lấy $x = -y - c$ ta được $f(y) = y + d, \ \forall y \in \mathbb{Z}$ $\big($với $d = f(0)\big)$. Vậy

$$g(x) = x + c, \ \forall x \in \mathbb{Z} \text{ và } f(x) = x + d, \ \forall x \in \mathbb{Z},$$

với c và d là những hằng số nguyên tuỳ ý. Thử lại thấy đúng.

Bài toán 14. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x = y = 0$ ta được

$$f^2(0) - 2f(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow [f(0) - 1]^2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Ta thêm biến mới z như sau : Với mọi số thực x, y, z ta có

$$f(xyz) = f(x)f(yz) - f(x + yz) + 1$$

$$\begin{aligned} &= f(x)\left[f(y)f(z) - f(y+z) + 1\right] - f(x+yz) + 1 \\ &= f(x)f(y)f(z) - f(x)f(y+z) + f(x) - f(x+yz) + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f(xyz) &= f(z)f(xy) - f(z+xy) + 1 \\ &= f(z)\left[f(x)f(y) - f(x+y) + 1\right] - f(z+xy) + 1 \\ &= f(x)f(y)f(z) - f(z)f(x+y) + f(z) - f(z+xy) + 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi số thực x, y, z ta có

$$f(x)f(y+z) - f(x) + f(x+yz) = f(z)f(x+y) - f(z) + f(z+xy). \tag{4}$$

Từ (1) cho $x = 1$ và $y = -1$ được

$$f(-1) = f(1)f(-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1. \end{array}\right.$$

• Trường hợp $f(-1) = 0$. Từ (4) cho $z = -1$ và $x = 1$ được

$$f(1)f(y-1) - f(1) + f(1-y) = f(y-1),\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5) cho $y = 2$ được

$$f^2(1) - f(1) = f(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = 2. \end{array}\right.$$

∘ Xét $f(1) = 0$. Khi đó (5) trở thành $f(1-y) = f(y-1),\ \forall y \in \mathbb{R}$. Từ đây thay y bởi $y+1$ ta được

$$f(-y) = f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (1) thay y bởi $-y$ và sử dụng (6) được

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x-y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) và (1) suy ra $f(x+y) = f(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây cho $x = y$ và lưu ý $f(0) = 1$ được $f(2x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, từ đây lấy $x = 0,5$ được $f(1) = 1$, mâu thuẫn với $f(1) = 0$.

∘ Xét $f(1) = 2$. Khi đó (5) trở thành

$$\begin{aligned} &2f(y-1) - 2 + f(1-y) = f(y-1),\ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &f(y-1) = 2 - f(1-y),\ \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Từ (8) thay y bởi $y+1$ được

$$f(y) = 2 - f(-y),\ \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 - f(y) = -[1 - f(-y)],\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Đặt $1 - f(x) = g(x)$. Từ (9) suy ra hàm số g thoả mãn $g(-x) = -g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ và (1) trở thành

$$1 - g(xy) = [1 - g(x)][1 - g(y)] - 1 + g(x + y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(xy) = g(x) + g(y) - g(x)g(y) - g(x + y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Từ (10) thay y bởi $-y$ được

$$-g(xy) = g(x) - g(y) + g(x)g(y) - g(x - y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Cộng (10) và (11) ta được

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Từ (12) cho $y = x$ được $g(2x) = 2g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (do $g(0) = 0$), (12) trở thành

$$g(x + y) + g(x - y) = g(2x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Với mọi số thực u và v, đặt $\dfrac{u + v}{2} = x,\ \dfrac{u - v}{2} = y$. Khi đó theo (13) ta được

$$g(u) + g(v) = g(u + v),\ \forall u, v \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x + y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Từ (10) và (14) suy ra

$$g(xy) = -g(x)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Từ (14), tiến hành tương tự như ở lời giải bài toán **19** ở trang 22 ta chứng minh được :

$$g(rx) = rg(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}. \tag{16}$$

Từ (15) cho $y = x$ ta được $g(x^2) = -[g(x)]^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \leq 0,\ \forall x \geq 0$. Từ (15) và (16) ta được

$$rg(x) = g(rx) = -g(r)g(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}. \tag{17}$$

Dễ thấy $g(x) \equiv 0$ thoả mãn (10). Xét $g(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x_0) \neq 0$. Từ (17) cho $x = x_0$, ta được

$$g(r) = -r,\ \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{18}$$

Tiếp theo ta chứng minh g là hàm nghịch biến. Giả sử $x < y$. Khi đó $y - x > 0$, suy ra $g(y - x) \leq 0$. Sử dụng (14) ta được

$$g(y) = g((y - x) + x) = g(y - x) + g(x) \leq g(x) \Rightarrow g(x) \geq g(y).$$

Vậy hàm g nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \le x \le v_n, \forall n = 1, 2, \dots; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

Vì g là hàm giảm nên kết hợp với (18) ta có

$$g(u_n) \ge g(x) \ge g(v_n) \Rightarrow -u_n \ge g(x) \ge -v_n (\forall n = 1, 2, \dots).$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$-x \ge g(x) \ge -x \Rightarrow g(x) = -x.$$

Do đó $f(x) \equiv 1 + x$.
• Trường hợp $f(1) = 1$. Từ (4) cho $z = 1$ được

$$f(x)f(y+1) - f(x) + f(x+y) = f(x+y) - 1 + f(1+xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f(x)f(y+1) - f(x) = -1 + f(1+xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Từ (19) lấy $y = -1$ được $f(1-x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận : Các hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv 1, \ f(x) \equiv x + 1.$$

Lưu ý. Nếu đặt $f(x) - 1 = g(x)$ thì ta thu được

$$1 + g(xy) = [1 + g(x)][1 + g(y)] - 1 - g(x+y) + 1, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(xy) = g(x) + g(y) + g(x)g(y) - g(x+y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Cũng tương tự như trên ta chứng minh được

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ g(xy) = g(x)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Từ đây, sử dụng bài toán **23** ở trang 25 ta được $g(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv x$.

Bài toán 15. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x+y) - g(xy) = h(x) + h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử (f, g, h) là một bộ ba hàm thoả mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $y = 0$ ta được $f(x) = h(x) + h(0) + g(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Vì thế

$$(1) \Leftrightarrow h(x+y) + h(0) + g(0) - g(xy) = h(x) + h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow h(x+y) = h(x) + h(y) + k(xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

với k là hàm số : $k(x) = g(x) - g(0) - h(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sử dụng (2), ta thêm biến mới z như sau :

$$\begin{aligned} h(x+y+z) &= h(x+y) + h(z) + k(xz+yz) \\ &= h(x) + h(y) + h(z) + k(xy) + k(yz+zx),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tương tự ta được

$$h(x+y+z) = k(yz) + k(zx+xy) = k(zx) + k(xy+yz),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, với mọi số thực x, y, z ta có

$$k(xy) + k(yz+zx) = k(yz) + k(zx+xy) = k(zx) + k(xy+yz). \tag{3}$$

Giả sử a, b là hai số thực bất kì.

• Trường hợp $a > 0$ và $b > 0$. Xét $c > 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}},\ y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được

$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b),\ \forall a, b, c > 0. \tag{4}$$

Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (4) cho $c \to 0^+$ ta được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a > 0, b > 0. \tag{5}$$

• Trường hợp $a < 0$ và $b < 0$. Xét $c > 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}},\ y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được

$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b),\ \forall a < 0, b < 0, c > 0. \tag{6}$$

Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (6) cho $c \to 0^+$ ta được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a < 0, b < 0. \tag{7}$$

• Trường hợp $a < 0$ và $b > 0$. Xét $c < 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}},\ y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được

$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b),\ \forall a < 0, b > 0, c < 0. \tag{8}$$

Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (8) cho $c \to 0^-$ ta được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a < 0, b > 0. \tag{9}$$

• Trường hợp $a > 0$ và $b < 0$, tương tự ta cũng thu được

$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0),\ \forall a > 0, b < 0. \tag{10}$$

• Nếu ít nhất một trong hai số a, b bằng 0 thì $k(a)+k(b)=k(a+b)+k(0)$ cũng đúng, do đó từ (5), (7), (9), (10) ta có

$$k(a)+k(b)=k(a+b)+k(0),\ \forall a,b\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

Xét hàm số $t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ như sau : $t(x)=k(x)-k(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Từ (11) ta có

$$t(x+y)=t(x)+t(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Do hàm số t liên tục nên từ (12), sử dụng kết quả bài toán **19** ở trang 22 ta được $t(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}$, với a là hằng số thực. Vì thế hàm số k có dạng $k(x)=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm g có dạng $g(x)=ax+\alpha,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&h(x+y)=h(x)+h(y)+axy+\alpha,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&h(x+y)-\frac{a}{2}(x+y)^2=\left[h(x)-\frac{a}{2}x^2\right]+\left[h(y)-\frac{a}{2}y^2\right]+\alpha=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&h(x)-\frac{a}{2}x^2=mx+n,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy hàm số h có dạng $h(x)=\dfrac{a}{2}x^2+mx+n,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tóm lại :

$$f(x)\equiv\frac{a}{2}x^2+mx+p, g(x)\equiv ax+b, h(x)\equiv\frac{a}{2}x^2+mx+m.$$

Thay vào (1) ta được

$$\frac{a}{2}(x+y)^2+m(x+y)+p-axy-b=\frac{a}{2}x^2+mx+n+\frac{a}{2}y^2+my+n,\forall x,y\in\mathbb{R},$$

hay $p-b=2n$. Vậy các hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)\equiv\frac{a}{2}x^2+mx+b+2n,\ g(x)\equiv ax+b,\ h(x)\equiv\frac{a}{2}x^2+mx+n.$$

Bài toán 16. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(xy+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thoả mãn các yêu cầu đề bài. Xét hàm số g như sau : $g(x)=f(x+1)-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó g liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) trở thành

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+g(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Sử dụng (2), ta thêm biến mới z tương tự như bài toán **15**, thu được kết quả : Hàm g có dạng $g(x)=2ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2axy+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f(x+y)-a(x+y)^2=\left[h(x)-ax^2\right]+\left[h(y)-ay^2\right]+b=0,\forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(x)-ax^2=mx+n,\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thay $f(x)=ax^2+mx+n,\forall x\in\mathbb{R}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a(x+y)^2+m(x+y)+n+ax^2y^2+mxy+n\\=&ax^2+mx+n+ay^2+my+n+a(xy+1)^2+m(xy+1)+n,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Rút gọn ta được $a+m+n=0\Leftrightarrow n=-a-m$. Vậy hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x)=ax^2+mx-a-m,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với a, m là những hằng số tuỳ ý.

Bài toán 17. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x+y)+f(xy)+1=f(x)+f(y)+f(xy+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\qquad(1)$$

Hướng dẫn. Xét hàm số $g(x)=f(x+1)-f(x)-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)+g(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\qquad(2)$$

Vậy ta thêm biến mới z tương tự như bài toán **15**, thu được kết quả : Hàm g có dạng $g(x)=2ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&f(x+y)=f(x)+f(y)+2axy+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Leftrightarrow f(x+y)-a(x+y)^2=\left[h(x)-ax^2\right]+\left[h(y)-ay^2\right]+b=0,\forall x,y\in\mathbb{R}\\&\Rightarrow f(x)-ax^2=mx+n,\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Thay $f(x)=ax^2+mx+n,\forall x\in\mathbb{R}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a(x+y)^2+m(x+y)+n+ax^2y^2+mxy+n+1\\=&ax^2+mx+n+ay^2+my+n+a(xy+1)^2+m(xy+1)+n,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Rút gọn ta được $a+m+n=1\Leftrightarrow n=1-a-m$. Vậy hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x)=ax^2+mx+1-a-m,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với a, m là những hằng số tuỳ ý.

Bài toán 18. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x+y)+f(xy-1)=f(x)+f(y)+f(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

1.1.2 Một số kết quả đã sử dụng

Trong mục này ta sẽ phát biểu và chứng minh một số kết quả (thông qua các bài toán) đã sử dụng ở mục 1.1.1. Lưu ý rằng đây là những bài toán rất cơ bản, cần thiết cho những ai muốn tìm hiểu về phương trình hàm (cả kết quả và lời giải), chẳng hạn như bài toán **19**, **20**, khi đi thi học sinh giỏi là được phép sử dụng mà không cần chứng minh lại.

Bài toán 19 (Phương trình hàm Cauchy). *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *liên tục trên* $\mathbb{R}$ *và thỏa mãn*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1) lấy $y=x$ ta được

$$f(2x)=2f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x=0$ ta được $f(0)=0$. Từ (1) và (2) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(nx)=nf(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Trong (1) lấy $y=-x$ và sử dụng $f(0)=0$ ta được

$$f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Bởi vậy khi $n=-1,-2,\ldots,$ sử dụng (3) và (4) ta có

$$f(nx)=f(-n(-x))=-nf(-x)=nf(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (3) và (5) suy ra

$$f(nx)=nf(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{Z}. \tag{6}$$

Với mọi $n=1,2,\ldots,$ sử dụng (3) ta có

$$f(x)=f\left(n.\frac{1}{n}x\right)=nf\left(\frac{1}{n}x\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Với mọi $m,n\in\mathbb{Z}$ và $n>0$, sử dụng (7) và (6) ta có

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=f\left(m.\frac{1}{n}x\right)=mf\left(\frac{1}{n}x\right)=m.\frac{1}{n}f(x)=\frac{m}{n}f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bởi vậy

$$f(rx)=rf(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall r\in\mathbb{Q}. \tag{8}$$

Trong (8) lấy $x=1$ ta được

$$f(r)=rf(1),\forall r\in\mathbb{Q}. \tag{9}$$

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. Vì f liên tục nên

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} f(r_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} r_n f(1) = f(1)\lim_{n\to+\infty} r_n = f(1)x. \end{aligned}$$

Vậy

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } C \text{ là hằng số tùy ý).} \tag{10}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy ta kết luận : Tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng như ở (10).

Bài toán 20. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Dễ thấy hàm $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của (1). Tiếp theo xét $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Theo (1) ta có

$$f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x).f(x_0 - x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy đặt $\ln f(x) = g(x)$ $\left(f(x) = e^{g(x)}\right)$. Khi đó hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} & e^{g(x+y)} = e^{g(x)}.e^{g(y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & e^{g(x+y)} = e^{g(x)+g(y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & g(x+y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Theo kết quả bài toán **19** suy ra

$$g(x) = bx, \forall x \in \mathbb{R} \ \big(b \text{ là hằng số}\big).$$

Vậy $f(x) = e^{bx} = a^x$, với $a > 0$ tuỳ ý. Có hai hàm số thoả mãn đề bài là

$$f(x) \equiv 0, \ f(x) \equiv a^x \ (a \text{ là hằng số dương}).$$

Bài toán 21. *Cho hàm số f là đơn ánh và liên tục trên một khoảng nào. Chứng minh rằng hàm số f đơn điệu thực sự trên khoảng đó.*

Giải. Giả sử f đơn ánh và liên tục trên khoảng $(a;b)$. Lấy hai giá trị cố định $\alpha, \beta \in (a;b)$ mà $\alpha < \beta$. Với mọi $x, y \in (a;b), x < y$ ta xét hàm số $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$g(t) = f((1-t)\beta + ty) - f((1-t)\alpha + tx), \forall t \in [0;1].$$

Khi đó g là hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và

$$g(0) = f(\beta) - f(\alpha),\ g(1) = f(y) - f(x).$$

Nếu $g(0).g(1) = [f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] < 0$ thì tồn tại $\gamma \in (0;1)$ sao cho $g(\gamma) = 0$. Nghĩa là

$$\begin{aligned} & f((1-\gamma)\beta + \gamma y) - f((1-\gamma)\alpha + \gamma x) = 0 \\ \Rightarrow & f((1-\gamma)\beta + \gamma y) = f((1-\gamma)\alpha + \gamma x). \end{aligned}$$

Vì f là đơn ánh nên

$$(1-\gamma)\beta + \gamma y = (1-\gamma)\alpha + \gamma x \Leftrightarrow (1-\gamma)(\beta - \alpha) = \gamma(x - y).$$

Điều này là vô lí vì vế phải âm còn vế trái dương. Bởi vậy

$$g(0).g(1) = [f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] \geq 0$$

Nhưng nếu $[f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] = 0$ thì $f(\beta) = f(\alpha)$ hoặc là $f(y) = f(x)$. Điều này mâu thuẫn với f là đơn ánh. Bởi vậy

$$[f(\beta) - f(\alpha)][f(y) - f(x)] > 0.$$

Suy ra $f(\beta) - f(\alpha)$ luôn cùng dấu với $f(y) - f(x)$. Do đó f đơn điệu thực sự.

Bài toán 22. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử f là hàm tăng. Tương tự như bài toán **19** ở trang 22 ta chứng minh được

$$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (2) ta có

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow ku_n \leq f(x) \leq kv_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$kx \leq f(x) \leq kx \Rightarrow f(x) = kx.$$

Vậy $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 23. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau :*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giải. Từ (1), tiến hành tương tự như ở lời giải bài toán **19** ở trang 22 ta chứng minh được các kết quả sau :

$$\begin{cases} f(rx) = rf(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q} & (3) \\ f(0) = 0,\ f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. & (4) \end{cases}$$

Từ (2) cho $y = x$ ta được $f(x^2) = [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \geq 0.$$

Từ (2) và (3) ta được

$$rf(x) = f(rx) = f(r)f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}. \tag{5}$$

Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thoả mãn yêu cầu đề bài. Xét $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (5) cho $x = x_0$, ta được

$$f(r) = r,\ \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{6}$$

Tiếp theo ta chứng minh f là hàm đồng biến. Giả sử $x < y$. Khi đó $y - x > 0$, suy ra $f(y-x) \geq 0$. Sử dụng (1) ta được

$$f(y) = f((y-x)+x) = f(y-x) + f(x) \geq f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Vậy hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \ldots ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (6) ta có

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow u_n \leq f(x) \leq v_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$x \leq f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x.$$

Sau khi thử lại ta kết luận : Có hai hàm số thoả mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$