ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN TRUNG NGHĨA

PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG LỚP CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu

Phương trình hàm là một chuyên đề quan trọng trong giải tích, đặc biệt là chương trình chuyên toán bậc THPT. Các đề thi học sinh giỏi cấp Quốc gia, thi Olympic khu vực, Olympic Quốc tế thường xuất hiện bài toán về phương trình hàm, đó là những bài toán khó và mới mẻ đối với học sinh THPT. Những cuốn sách tham khảo dành cho học sinh về lĩnh vực này là không nhiều. Đặc biệt trong các tài liệu sách giáo khoa dành cho học sinh THPT thì phương trình hàm trong lớp các hàm số lượng giác chưa được trình bày một cách hệ thống và đầy đủ.

Xuất phát từ thực tế đó, mục tiêu chính của luận văn là cung cấp thêm cho các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh khá, giỏi, có năng khiếu và yêu thích môn toán một tài liệu tham khảo, ngoài những kiến thức lý thuyết cơ bản luận văn còn có thêm một hệ thống các bài tập về phương trình hàm xuất phát từ các công thức biến đổi lượng giác và lời giải cho từng bài. Ngoài ra, đây cũng là những kết quả mà bản thân tác giả sẽ tiếp tục nghiên cứu và hoàn thiện trong quá trình giảng dạy toán tiếp theo ở trường phổ thông.

Ngoài mục lục, lời nói đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm ba chương.

Chương 1. Một số đặc trưng của hàm số lượng giác.

Trong chương này luận văn trình bày một số kiến thức chuẩn bị và chỉ ra các đặc trưng của hàm số lượng giác, hàm số lượng giác hyperbolic, hàm số lượng giác ngược.

Chương 2. Phương trình hàm trong lớp hàm số lượng giác, hàm lượng giác hyperbolic.

Trong chương này luận văn trình bày phương trình hàm d'Alembert trong lớp các hàm số liên tục, phương trình hàm d'Alembert trong lớp hàm không liên tục, phương trình hàm sinh bởi các đặc trưng của hàm sin và sin hypebolic, các phương trình hàm sinh bởi đặc trưng của hàm tang, tang hyperbolic và một số dạng khác.

Chương 3. Phương trình hàm trong lớp các hàm số lượng giác ngược và một số bài tập.

Trong chương này luận văn trình bày về phương trình hàm sinh bởi các đặc trưng của hàm số lượng giác ngược và một số bài tập về phương trình hàm sinh bởi các công thức biến đổi lượng giác.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Nhà giáo nhân dân, GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS - Người thầy rất nghiêm khắc, tận tâm trong công việc và đã truyền thụ nhiều kiến thức quý báu cũng như kinh nghiệm nghiên cứu khoa học cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo đã tham giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học toán K3A.

Tác giả xin chân thành cảm ơn UBND tỉnh, Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Yên Bái, Ban Giám hiệu và tập thể giáo viên trường THPT Chu Văn An tỉnh Yên Bái đã tạo điều kiện cho tác giả có cơ hội học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin được cảm ơn sự quan tâm giúp đỡ nhiệt tình của các anh chị em học viên lớp cao học toán K2, K3 Trường Đại học Khoa học đối với tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã tập trung học tập và nghiên cứu trong suốt khóa học. Tuy nhiên, do điều kiện thời gian và hạn chế của bản thân nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý thầy cô và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2011

Người thực hiện

Nguyễn Trung Nghĩa

Chương 1

Một số đặc trưng hàm của hàm số lượng giác

Những công thức biến đổi lượng giác cơ bản đã được trình bày trong sách giáo khoa phổ thông cho ta các đặc trưng hàm của những hàm lượng giác tương ứng. Đó là cơ sở để ta thiết lập các phương trình hàm mà các ẩn hàm là một trong các hàm lượng giác đã biết. Trong chương này, luận văn trình bày một số kiến thức chuẩn bị, các đặc trưng hàm của các hàm lượng giác, lượng giác hyperbolic, lượng giác ngược. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu tham khảo [2] [4].

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D_f \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm chẵn trên M, $M \subset D_f$ (gọi tắt là hàm chẵn trên M) nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = f(x),\ \ \forall x \in M.$$

Định nghĩa 1.2. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M, $M \subset D_f$ (gọi tắt là hàm chẵn trên M) nếu

$$\forall x \in M \Rightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = -f(x),\ \ \forall x \in M.$$

Định nghĩa 1.3. Cho hàm số $f(x)$ và tập $M(M \subset D_f)$. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn trên M nếu tồn tại số dương α sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm \alpha \in M, \\ f(x+\alpha) = f(x),\ \ \forall x \in M; \end{cases} \tag{1.1}$$

số α dương nhỏ nhất thỏa mãn (1.1) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Ví dụ 1.1. Hàm $f(x) = \cos x$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $x \pm 2\pi \in \mathbb{R}$ và

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.4. Cho hàm $f(x)$ và tập $M(M \subset D_f)$. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm số phản tuần hoàn trên tập M nếu tồn tại số dương α sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm \alpha \in M, \\ f(x + \alpha) = -f(x), \;\; \forall x \in M; \end{cases} \tag{1.2}$$

số α nhỏ nhất thỏa mãn (1.2) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$.

Ví dụ 1.2. Hàm $f(x) = \sin x$ là hàm phản tuần hoàn chu kỳ π trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $x \pm \pi \in \mathbb{R}$ và

$$f(x + \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = -f(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.5. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D_f$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow \alpha^{\pm 1} x \in M, \\ f(\alpha x) = f(x), \;\; \forall x \in M; \end{cases} \tag{1.3}$$

số α dương nhỏ nhất thỏa mãn (1.3) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn nhân tính $f(x)$.

Ví dụ 1.3. Hàm $f(x) = \sin(2\pi \log_2 x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2 trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $2^{\pm 1} x \in \mathbb{R}^+$ và

$$f(2x) = \sin[2\pi \log_2(2x)] = \sin[2\pi(1 + \log_2 x)] = \sin(2\pi \log_2 x) = f(x).$$

Định nghĩa 1.6. Hàm $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D_f$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow \alpha^{\pm 1} x \in \mathbb{R}, \\ f(\alpha x) = -f(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}; \end{cases} \tag{1.4}$$

số α nhỏ nhất thỏa mãn (1.4) được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn nhân tính.

Ví dụ 1.4. Hàm $f(x) = \cos(\pi \log_3 x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ 3 trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta có $\forall x \in \mathbb{R}^+$ thì $3^{\pm 1}x \in \mathbb{R}^+$ và

$$f(3x) = \cos[\pi \log_3(3x)] = \cos[\pi(1 + \log_3 x)] = -\cos(\pi \log_3 x) = -f(x).$$

Định nghĩa 1.7. Cho $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{B}$, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $y \in \mathcal{A}$, sao cho $|x - y| < \varepsilon$ thì $\mathcal{A}$ được gọi là tập trù mật trong $\mathcal{B}$, ký hiệu là $[\mathcal{A}] = \mathcal{B}$.

Mệnh đề 1.1. Nếu tập $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện với mọi $x, y \in R$, $(x < y)$ luôn tồn tại $\alpha \in \mathcal{A}$, sao cho $x < \alpha < y$ thì tập A trù mật trong $\mathbb{R}$ ký hiệu $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.2. Nếu tập $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện với mọi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại dãy số $(a_n) \subset A$, sao cho $a_n \longrightarrow x$ khi $n \longrightarrow \infty$ thì tập A trù mật trong $\mathbb{R}$ ký hiệu $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$.

Nhận xét 1.1. Mệnh đề (1.1) và mệnh đề (1.2) là tương đương.

Định lý 1.1. Nếu hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathcal{A}$ trong đó $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ thì $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta thường sử dụng một số tập trù mật trong $\mathbb{R}$ sau

1. Với $\mathbb{Q} :=$ tập các số hữu tỷ, ta có $[\mathbb{Q}] = \mathbb{R}$.
2. Với $\Im =$ tập các số vô tỷ, ta có $[\Im] = \mathbb{R}$.
3. Với $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ tập $\{\alpha + r \mid \alpha \in A,\ r = \text{const}\ , r \in \mathbb{R}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.
4. Với $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$ tập $\{\alpha r \mid \alpha \in \mathcal{A},\ r = \text{const}\ , r \neq 0, r \in \mathbb{R}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.
5. Tập $\{\dfrac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{Z}^+; m \in \mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.
6. Tập $\{m\alpha - n \mid a \in \Im;\ m, n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

Bài toán 1.1 (Phương trình hàm Cauchy)**.** Tìm hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} f(x) + f(y) = f(x + y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ f(x) \text{ liên tục tại } x = x_0 \in \mathbb{R}, \\ f(1) = \alpha, \ \ (\alpha \neq 0). \end{cases}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Cho $y = -x$ ta được $f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm $f(x)$ là hàm số lẻ nên ta chỉ cần xác định biểu thức của $f(x)$ với $x > 0$.

Cho $y = x$ suy ra $f(2x) = 2f(x)$. Giả sử $f(kx) = kf(x),\ (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta có

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x)$$

Theo nguyên lý quy nạp ta được $f(nx) = nf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n \in \mathbb{Z}^-$ suy ra $-n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$f(nx) = f((-n)(-x)) = -nf(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$ (do $f(x)$ là hàm số lẻ).

Suy ra $f(nx) = nf(x),\ \forall n \in \mathbb{Z}^-$. Kết hợp với $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$ ta được

$$f(nx) = nf(x),\ \forall x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{Z}.$$

Với $m \in Z^*$, ta có

$$f(x) = f\left(m\frac{x}{m}\right) = mf\left(\frac{x}{m}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}f(x).$$

Với $r \in \mathbb{Q}$, tồn tại $n \in \mathbb{Z};\ m \in \mathbb{Z}$ sao cho $r = \dfrac{n}{m}$. Từ các kết quả trên, ta có

$$f(rx) = f\left(\frac{n}{m}x\right) = nf\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}f(x) = rf(x),\ \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Cho $x = 1$ ta được $f(r) = rf(1) = \alpha r,\ \forall r \in \mathbb{Q}$. Với $\forall m \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x) = f(x + x_0 - m + m - x_0) = f(x - m + x_0) + f(m) - f(x_0).$$

Từ giả thiết hàm số liên tục tại $x = x_0$ ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to m} f(x) &= \lim_{x\to m}\left[f(x - m + x_0) + f(m) - f(x_0)\right]\\ &= \lim_{x\to m} f(x - m + x_0) + f(m) - f(x_0)\\ &= f(x_0) + f(m) - f(x_0) = f(m).\end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $m \in \mathbb{R}$. Nói cách khác $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, tồn tại dãy số $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, sao cho $r_n \to x$ khi $n \to +\infty$. Khi đó, vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \alpha r_n = \alpha x.$$

Thử lại, dễ thấy hàm số $f(x) = \alpha x$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài toán 1.2 (Phương trình hàm Cauchy dạng mũ)**.** Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Giải. Dễ thấy $f \equiv 0$ [1] là một nghiệm của (1.5).

Xét trường hợp $f \not\equiv 0$ [2], khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$.

Theo (1.5) thì $f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x)f(x_0 - x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra, $f(x) \neq 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, mặt khác

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $\ln f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = e^{g(x)}$. Khi đó $g(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f(x+y) = \ln[f(x)f(y)] \\ &= \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Theo bài toán 1.1 thì $g(x) = bx$, $b \in \mathbb{R}$ tùy ý, suy ra $f(x) = e^{bx} = a^x$ với $a > 0$.

Kết luận: Nghiệm của bài toán là $f \equiv 0$ hoặc $f(x) = a^x,\ \ a > 0$.

1.2. Đặc trưng hàm của các hàm lượng giác cơ bản

a) Hàm $f(x) = \sin x$ có tính chất

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2,\ \text{với}\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

và

$$f(3x) = 3f(x) - 4[f(x)]^3,\ \text{với}\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Hàm $f(x) = \cos x$ có các tính chất

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ \text{với}\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

và

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1,\ \text{với}\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cặp hàm $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos x$ có tính chất

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[1] Để đơn giản trong ký hiệu ta hiểu $f \equiv c$ nghĩa là $f(x) = c,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

[2] $f \not\equiv c$ được hiểu là $\exists\ x_0$, $(x_0 \in D_f)$ sao cho $f(x_0) \neq c$.

c) Hàm $\tan x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},\ \ x,y,x+y\neq \frac{(2k+1)\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z}).$$

d) Hàm $f(x) = \cot x$ có tính chất

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)-1}{f(x)+f(y)},\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},\ \ x,y,x+y\neq k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$$

1.3. Đặc trưng hàm của các hàm hyperbolic

a) Hàm sin hyperbolic $f(x) = \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) + 4[f(x)]^3,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

b) Hàm cosin hyperbolic $g(x) = \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ có tính chất

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

c) Hàm tan hyperbolic $h(x) = \tanh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ có tính chất

$$h(x+y) = \frac{h(x)+h(y)}{1+h(x)h(y)},\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

d) Hàm cotan hyperbolic $q(x) = \coth x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ có tính chất

$$q(x+y) = \frac{1+q(x)q(y)}{q(x)+q(y)},\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}, x+y\neq 0.$$

1.4. Đặc trưng hàm của các hàm lượng giác ngược

a) Hàm $f(x) = \arcsin x$ có các tính chất

$$f(x) + f(y) = f(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),\ \text{với}\ \forall x,y\in[-1;1].$$

b) Hàm $g(x) = \arccos x$ có tính chất

$$g(x) + g(y) = g(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}),\ \text{với}\ \forall x,y\in[-1,1].$$

c) Hàm $h(x) = \arctan\, x$ có tính chất

$$h(x) + h(y) = h\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big),\ \text{với}\ \forall x,y\in\mathbb{R}, xy\neq 1.$$

d) Hàm $p(x) = \text{arccot}\, x$ có tính chất

$$p(x) + p(y) = p\Big(\frac{xy-1}{x+y}\Big),\ \text{với}\ \forall x,y\in\mathbb{R}, x+y\neq 0.$$

Chương 2

Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác, lượng giác hyperbolic

Dựa trên cơ sở kiến thức chuẩn bị ở Chương 1, bằng cách thay thế các ẩn hàm cho các hàm chúng ta sẽ được các bài toán phương trình hàm. Chương 2 của luận văn sẽ giải quyết các bài toán dạng này, đó là các bài toán liên quan đến đặc trưng của hàm lượng giác, lượng giác hyperbolic trong lớp các hàm số liên tục và không liên tục. Các bài toán này được tổng hợp từ tài liệu tham khảo [4] và trên internet.

2.1. Phương trình d'Alembert trong lớp hàm số liên tục

Bằng cách thay hàm cos, cosh trong công thức biến đổi

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

$$\cosh(x+y)+\cosh(x-y)=2\cosh x\cosh y,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

bằng ẩn hàm f ta sẽ có hai bài toán sau.

Bài toán 2.1. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},\\ f(0)=1, \exists x_0\in\mathbb{R} \text{ sao cho } |f(x_0)|<1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Giải. Vì $f(0)=1$ và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$\exists\varepsilon>0 \text{ sao cho } f(x)>0,\ \ \forall x\in(-\varepsilon,\varepsilon). \tag{2.2}$$

Khi đó theo (2.2) với $n_0 \in \mathbb{N}$ đủ lớn thì $f\left(\dfrac{x_0}{2^{n_0}}\right) > 0$.

Nhận xét rằng $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) < 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, giả sử $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) \geq 1$ với n nguyên dương nào đó thì theo (2.1) ta có

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right]^2 - 1 \geq 1\\
\Rightarrow\ &f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\right]^2 - 1 \geq 1\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad \Rightarrow f(x_0) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 - 1 \geq 1 \text{ trái với giả thiết } |f(x_0)| < 1.
\end{aligned}$$

Vậy tồn tại $x_1 \neq 0$ sao cho $0 < f(x_1) < 1$ và $f(x) > 0,\ \ \forall x \in \Big(-|x_1|, |x_1|\Big)$ (chỉ cần chọn $x_1 = \dfrac{x_0}{2^{n_0}}$). Đặt $f(x_1) = \cos\alpha, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Từ (2.1) suy ra

$$f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha.$$

Giả sử, $f(kx_1) = \cos k\alpha,\ \ \forall k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+$, khi đó

$$\begin{aligned}
f((n+1)x_1) &= f(nx_1 + x_1) = 2f(nx_1)f(x_1) - f((n-1)x_1)\\
&= 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha = \cos(n+1)\alpha.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(mx_1) = \cos m\alpha,\ \ \forall m \in \mathbb{N}^+$.

Mặt khác, đổi vai trò của x và y trong (2.1), ta có $f(x-y) = f(y-x),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$, do đó $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ và nhu vậy

$$f(mx_1) = \cos n\alpha,\ \ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Cho $x = y = \dfrac{x_1}{2}$ từ (2.1) ta nhận được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1 + f(x_1)}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2, \text{ do vậy } f\left(\frac{x_1}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Giả sử $f\left(\dfrac{x_1}{2^k}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2^k},\ \ \forall k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+$.

Khi đó cho $x = y = \dfrac{x_1}{2^{k+1}}$, từ (2.1) ta thu được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} + f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \frac{1 + \cos\dfrac{\alpha}{2^n}}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

Do vậy

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Từ (2.3) và (2.4) cho ta

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right) = \cos\frac{m\alpha}{2^n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^+,\ \ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Vì $f(x)$ và $\cos x$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (2.5) suy ra

$$f(x_1 t) = \cos\alpha t \Leftrightarrow f(x) = \cos ax,\ \ \Big(\text{ với } a = \frac{\alpha}{x_1},\ \ \forall x \in \mathbb{R}\Big).$$

Thử lại ta thấy $f(x) = \cos ax (a \neq 0)$ thỏa mãn các điều kiện bài toán.

Kết luận: $f(x) = \cos ax,\ \ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Bài toán 2.2. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1, \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ sao cho } f(x_0) > 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Giải. Vì $f(0) = 1$ và $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x) > 0,\ \ \forall x \in \big(-\varepsilon, \varepsilon\big). \tag{2.7}$$

Khi đó theo (2.7) với $n_0 \in \mathbb{N}$ đủ lớn thì $f\left(\dfrac{x_0}{2^{n_0}}\right) > 0$.

Nhận xét rằng $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) > 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}^+$ sao cho $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) \leq 1$ thì theo (2.6) ta có

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) = 2\Big[f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\Big]^2 - 1 \leq 1, \\
\Rightarrow &f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right) = 2\Big[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\Big]^2 - 1 \leq 1, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Rightarrow &f(x_0) = 2\Big[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\Big]^2 - 1 \leq 1, \text{ trái với giả thiết } f(x_0) > 1.
\end{aligned}$$

Do đó tồn tại $x_1 \neq 0$ sao cho $f(x_1) > 1$ và $f(x) > 0,\ \ \forall x \in -(|x_1|, |x_1|)$, (chỉ cần chọn $x_1 = \dfrac{x_0}{2^{n_0}}$).

Đặt $f(x_1) = \cosh\alpha, 0 < \alpha$, từ (2.6) suy ra

$$f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cosh^2\alpha - 1 = \cosh 2\alpha.$$

Giả sử $f(kx_1) = \cosh k\alpha,\ \ \forall k = 1, 2, .., m \in \mathbb{N}^+$, khi đó

$$f((m+1)x_1) = f(mx_1 + x_1) = 2f(mx_1)f(x_1) - f((m-1)x_1)$$

$$=2\cosh m\alpha\cosh\alpha - \cosh(m-1)\alpha = \cosh(m+1)\alpha.$$

Suy ra $f(mx_1) = \cosh m\alpha,\ \ \forall m \in \mathbb{N}^+$.

Mặt khác, đổi vai trò của x và y trong (2.6) ta có, $f(x-y) = f(y-x),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ và do đó

$$f(mx_1) = \cosh m\alpha,\ \ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Cho $x = y = \dfrac{x_1}{2}$, từ (2.6) ta nhận được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1+f(x_1)}{2} = \frac{1+\cosh\alpha}{2} = \cosh^2\frac{\alpha}{2}.$$

Do vậy

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) = \cosh\frac{\alpha}{2}$$

Giả sử $f\left(\dfrac{x_1}{2^k}\right) = \cosh\dfrac{\alpha}{2^k},\ \ \forall k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+$.

Khi đó cho $x = y = \dfrac{x_1}{2^{n+1}}$, từ (2.6) ta thu được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[1 + f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)\right] = \frac{1+\cosh\dfrac{\alpha}{2^n}}{2} = \cosh^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

Do vậy

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \cosh\frac{\alpha}{2^n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Từ (2.8) và (2.9) cho ta

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right) = \cosh\frac{m\alpha}{2^n},\ \ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

Vì $f(x)$ và $\cosh x$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (2.10) ta có

$$f(x_1 t) = \cosh\alpha$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \cosh ax,\ \text{với}\ a = \frac{\alpha}{x_1},\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy $f(x) = \cosh ax, (a \neq 0)$ rõ ràng thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Kết luận: $f(x) = \cosh ax$, trong đó $a \in \mathbb{R},\ \ a \neq 0$.

Nhận xét 2.1. Dễ kiểm tra thấy hàm $f \equiv 0$ và $f \equiv 1$ cũng thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó từ bài toán 2.1 và bài toán 2.2 ta có định lý về nghiệm của bài toán phương trình hàm d'Alembert.

Định lý 2.1 (Định lý nghiệm của phương trình hàm d'Alembert)**.** *Nếu hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, liên tục và thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \;\; x, y \in \mathbb{R},$$

thì hàm f *là một trong các hàm sau:*

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \\ &f(x) = 1, \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \\ &f(x) = \cosh(\alpha x), \\ &f(x) = \cos(\beta x), \end{aligned}$$

trong đó α, β *là các hằng số thực khác* 0.

Bài toán 2.3. Cho $a \in \mathbb{R}$, $(\alpha \neq 0)$ tìm các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-y+a) - f(x+y+a) = 2f(x)f(y), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Giải. Dễ kiểm tra thấy $f \equiv 0$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.
Xét $f \not\equiv 0$ khi đó, thay y bằng $-y$ vào (2.11), ta có

$$f(x+y+a) - f(x-y+a) = 2f(x)f(y). \tag{2.12}$$

Từ (2.11) và (2.12) ta có

$$f(x)f(y) = -f(x)f(y), \;\; x, y \in \mathbb{R}, \text{ suy ra } f(y) = -f(y), \;\; \forall y \in \mathbb{R} \text{ do } f \not\equiv 0.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lẻ.

Đổi vai trò của x và y cho nhau trong (2.11) ta có

$$f(y-x+a) - f(x+y+a) = 2f(x)f(y) \;\; x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Từ (2.11) và (2.13), ta có

$$f(x-y+a) = f(y-x+a) = f(-(x-y)+a) = -f(x-y-a) \text{ vì } f \text{ là hàm lẻ.}$$

Suy ra

$$f(x-y+a) = -f(x-y-a). \tag{2.14}$$

Cho $y = 0$ thay vào (2.14) ta có

$$\begin{aligned} & f(x+a) = -f(x-a), \\ \Rightarrow\ & f(x+2a) = -f(x), \\ \Rightarrow\ & f(x+3a) = -f(x+a), \\ \Rightarrow\ & f(x+4a) = -f(x+2a) = f(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ta thay x bằng $x+a$ và y bằng $y+a$ vào (2.11) ta được

$$\begin{aligned} & f(x-y+a) - f(x+y+3a) = 2f(x+a)f(y+a),\ \ x, y \in \mathbb{R}. \\ \Rightarrow & f(x-y+a) + f(x+y+a) = 2f(x+a)f(y+a),\ \ x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = f(x+a)$, suy ra $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y)$

Từ tính liên tục của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ suy ra hàm $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y),\ \ x, y \in \mathbb{R}$ ta có $g(x)$ là một trong bốn hàm sau

$$g \equiv 0,\ \ g \equiv 1,\ \ g(x) = \cosh(kx),\ \ g(x) = \cos(kx),\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 1: Nếu $g(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn (trái với giải thiết $f \not\equiv 0$).

Trường hợp 2: Nếu $g(x) = 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x) = 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn (2.11) nên không là nghiệm của bài toán.

Trường hợp 3: Nếu $g(x) = \cosh(kx),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x) = \cosh[k(x-a)]$ không thỏa mãn vì $\cosh[k(x-a)]$ không là hàm tuần hoàn.

Trường hợp 4: Nếu $g(x) = \cos(kx),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f(x) = \cos(k(x-a))$.

Mà ta đã chứng minh được $f(x+4a) = f(x)$ nên, ta có

$$\begin{aligned} f(x+4a) = \cos(k(x+4a-a)) = f(x) = \cos(k(x-a)), \\ \Rightarrow \cos(k(x+3a)) = \cos(k(x-a)),\ \ (\text{ chọn } x = x+a), \\ \text{suy ra } \cos(k(x+4a)) = \cos(kx) \Rightarrow 4ka = 2\pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{2a}. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2a}(x-a)\right),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2a}(x-a)\right),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết luận: $f \equiv 0$; $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2a}(x-a)\right),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 2.2. Từ kết quả và cách giải của bài toán 2.3 thì ta có các bài toán khi cho a các giá trị cụ thể khác nhau. Ví dụ khi cho $a = \frac{\pi}{2}$ ta có bài toán sau.

Tìm các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - y + \frac{\pi}{2}) - f(x + y + \frac{\pi}{2}) = 2f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng cách giải như bài toán 2.3 ta được nghiệm của bài toán $f(x) = \sin x$.

2.2. Phương trình d'Alembert trong lớp các hàm số không liên tục.

Xuất phát từ biểu diễn của các hàm lượng giác thông qua hàm mũ

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \ \ \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2};$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}; \ \ \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},$$

ta thấy nghiệm của bài toán phương trình hàm d'Alembert có thể biểu diễn thông qua hàm mũ. Tuy nhiên trong các bài toán trên ta phải sử dụng giả thiết rằng hàm cần tìm liên tục trên $\mathbb{R}$. Câu hỏi đặt ra là nếu bỏ giả thiết hàm cần tìm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nghiệm của các bài toán đó có tồn tại hay không và nếu có tồn tại thì nghiệm xác định như thế nào?

Để trả lời câu hỏi đó, chúng ta cần xây dựng một hàm mới để có thể biểu diễn nghiệm của bài toán: Tìm hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 2.1. Mọi hàm $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gọi là hàm exponential nếu E thỏa mãn phương trình

$$E(x + y) = E(x)E(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét 2.3. {Nếu E không đồng nhất bằng 0 và là hàm liên tục thì $E(x) = e^{\lambda x}$ ở đây $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nếu $E(x) \neq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ ta định nghĩa

$$E^{*}(x) = E(x)^{-1}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta sẽ đi chứng minh các tính chất sơ cấp của hàm $E(x)$ xác định như trên.

Tính chất 2.1. Nếu $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential và $E(0) = 0$ thì

$$E(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh: Vì $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm exponential nên

$$E(x + y) = E(x)E(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cho $y = 0$, ta có $E(x) = E(x)E(0), \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Theo giả thiết $E(0) = 0$ suy ra $E(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Hay $E(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính chất 2.2. Nếu $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm exponential và $E \not\equiv 0$ thì $E(0) = 1$.

Chứng minh: Vì $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential và $E(x)$ không đồng nhất bằng 0 nên từ

$$E(x + y) = E(x)E(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = y = 0 \Rightarrow E(0) = E(0)E(0) \Rightarrow E(0)(1 - E(0)) = 0$. Vậy $E(0) = 0$ hoặc $E(0) = 1$. Nếu $E(0) = 0 \Rightarrow E(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, trái giả thiết. Vậy $E(0) = 1$.

Tính chất 2.3. Nếu $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential và tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $E(x_0) = 0$ thì $E(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh: Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$E(x) = E((x - x_0) + x_0) = E(x - x_0)E(x_0) = 0.$$

Suy ra $E(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính chất 2.4. Nếu $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential và $E \not\equiv 0$ thì

$$E^*(-x) = E(x).$$

Chứng minh: Do $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm exponential, và từ $E \not\equiv 0$ nên từ tính chất (2.2) ta có $E(0) = 1$. Cho $y = -x$ thay vào $E(x + y) = E(x)E(y)$ ta được

$$E(0) = E(x)E(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ tính chất (2.2) ta có $E(x) \neq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $E(0) = 1$.
Suy ra $E(-x) = \dfrac{1}{E(x)} \Leftrightarrow E(-x) = E^{-1}(x)$
Hay

$$E(-x) = E^*(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = -x$ vào biểu thức trên ta có

$$E^*(-x) = E(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tính chất 2.5. Nếu $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential và $E \not\equiv 0$ thì

$$E^*(x+y) = E^*(x)E^*(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh: Do $E \not\equiv 0$ và từ tính chất (2.3) ta có $E(x) \neq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó

$$\begin{aligned} E^*(x+y) &= \frac{1}{E(x+y)} = \frac{1}{E(x)E(y)} \\ &= E^{-1}(x)E^{-1}(y) = E^*(x)E^*(y). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E^*(x+y) = E^*(x)E^*(y), \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Tính chất 2.6. Mọi hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \text{(DE)}$$

đều là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh: Dễ kiểm tra thấy $f \equiv 0$ thỏa mãn (DE) và hàm $f \equiv 0$ là hàm chẵn trên tập $\mathbb{R}$.

Nếu $f \not\equiv 0$ ta có, thay y bằng $-y$ vào phương trình (DE) ta có

$$\begin{aligned} &f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)f(-y) \\ &\Rightarrow 2f(x)f(y) = 2f(x)f(-y) \\ &\Rightarrow f(y) = f(-y), \ \ \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hay hàm f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

Định lý 2.2. Mọi hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (DE)$$

là hàm

$$f \equiv 0 \text{ hoặc } f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}.$$

Trong đó $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ là hàm exponential định nghĩa ở trên.

Chứng minh: Dễ thấy $f \equiv 0$ thỏa mãn (DE).

Xét $f \not\equiv 0$. Cho $x = 0 = y$ thay vào (DE) ta được

$$f(0)[1-f(0)]=0 \Rightarrow f(0)=0 \text{ hoặc } f(0)=1.$$

Nếu $f(0)=0$, đặt $u=x+y,\ \ v=x-y$ khi đó (DE) trở thành

$$f(u)+f(v)=2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right),\ \ \forall u,v\in\mathbb{R}.$$

Cho $u=v$ suy ra $2f(u)=2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f(0)=0,\ \ \forall u\in\mathbb{R}$ (trái giả thiết $f\not\equiv 0$).

suy ra $f(0)=1$.

Cho $y=x$ thay vào (DE), ta có

$f(2x)+f(0)=2[f(x)]^2 \Rightarrow f(2x)=2f(x)^2-1$ [1]

Thay x bằng $x+y$ và y bằng $x-y$ vào phương trình (DE) ta có

$$\begin{aligned} f(x+y+x-y)+f(x+y-x+y) &= 2f(x+y)f(x-y)\\ \Rightarrow f(2x)+f(2y) &= 2f(x+y)f(x-y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \Big[f(x+y)-f(x-y)\Big]^2 &= \Big[f(x+y)+f(x-y)\Big]^2-4f(x+y)f(x-y)\\ &= \Big[2f(x)f(y)\Big]^2-4f(x+y)f(x-y)\\ &= 4f(x)^2f(y)^2-2\Big[f(2x)+f(2y)\Big]\\ &= 4f(x)^2f(y)^2-2\Big[f(x)^2-1+f(y)^2-1\Big]\\ &= 4\Big[f(x)^2-1\Big]\Big[f(y)^2-1\Big] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+y)-f(x-y)=\pm 2\sqrt{\Big[f(x)^2-1\Big]\Big[f(y)^2-1\Big]},\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Cộng hai vế phương trình trên với phương trình (DE) ta có

$$f(x+y)=f(x)f(y)\pm\sqrt{[f(x)^2-1][f(y)^2-1]}$$
$$\text{suy ra } [f(x+y)-f(x)f(y)]^2=[f(x)^2-1][f(y)^2-1]. \tag{2.15}$$

Ta xét hai trường hợp. $f(x)\in\{-1;1\},\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và

$f(x)\notin\{-1;1\},$ với một vài giá trị $x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: Nếu $f(x)\in\{-1;1\},\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Kết hợp với (2.15) ta có:

$$f(x+y)=f(x)f(y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

[1]Để đơn giản trong ký hiệu từ đây ta hiểu $f(x)^2=[f(x)]^2$

Ở đây $f(x)$ nhận một trong hai giá trị 1 hoặc -1 nên ta có:

$$f(x) = f^*(x) \text{ và } f(x) = \frac{f(x) + f^*(x)}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $f(x) = \dfrac{E(x) + E^*(x)}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$ với $E(x) \in \{-1; 1\}$.
Trường hợp 2: $f(x) \notin \{-1; 1\}$, với một vài giá trị $x \in \mathbb{R}$.

Do đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)^2 - 1 \neq 0$.

Đặt $\alpha = f(x_0) \Rightarrow \alpha^2 - 1 \neq 0$, đặt $\beta^2 = \alpha^2 - 1$. Ta đặt

$$\begin{aligned}E(x) =& f(x) + \frac{1}{\beta}[f(x + x_0) - f(x)f(x_0)]\\ =& \frac{1}{\beta}\big[f(x + x_0) + (\beta - \alpha)f(x)\big], \ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh biểu thức $E(x)$ xác định như trên là một hàm số.
Thật vậy $x_1 = x_2$ và xét

$$\begin{aligned}E(x_1) =& \frac{1}{\beta}\big[f(x_1 + x_0) + (\beta - \alpha)f(x_1)\big]\\ =& \frac{1}{\beta}\big[f(x_2 + x_0) + (\beta - \alpha)f(x_2)\big] = E(x_2).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $E(x)$ xác định một hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.
Ta có:

$$\begin{aligned}[E(x) - f(x)]^2 =& \frac{1}{\beta^2}[f(x + x_0) - f(x)f(x_0)]^2\\ =& \frac{1}{\beta^2}[f(x)^2 - 1][f(x_0)^2 - 1] \text{theo } (2.15)\\ =& \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2}[f(x)^2 - 1] \text{vì } (\beta^2 = \alpha^2 - 1)\\ =& f(x)^2 - 1.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&E(x)^2 - 2E(x)f(x) + f(x)^2 = f(x)^2 - 1\\ &\Rightarrow E(x)^2 - 2E(x)f(x) + 1 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nếu $E(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ vô lý, suy ra $E(x) \neq 0$ và

$$f(x) = \frac{E(x)^2 + 1}{2E(x)} = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta sẽ chứng minh $E(x)$ thỏa mãn tính chất

$$E(x+y) = E(x)E(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&2[f(x_0+x)f(y) + f(x_0+y)f(x)] \\
&\qquad = f(x_0+x+y) + f(x_0+x-y) + f(x_0+y+x) + f(x_0+y-x) \ \text{ theo (DE)} \\
&\qquad = 2f(x_0+x+y) + f(x_0+x-y) + f(x_0+y-x) \\
&\qquad = 2f(x_0+x+y) + 2f(x_0)f(x-y) \\
&\qquad = 2\{f(x_0+x+y) + f(x_0)[2f(x)f(y) - f(x+y)]\} \\
&\qquad = 2\{f(x_0+x+y) + \alpha\big[2f(x)f(y) - f(x+y)\big]\}.
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
&2f(x_0+x)f(x_0+y) \\
&\quad = f(x_0+x+x_0+y) + f(x_0+x-x_0-y) \text{ theo (DE)} \\
&\quad = f(x_0+(x_0+x+y)) + f(x-y) \\
&\quad = [2f(x_0)f(x_0+x+y) - f(x_0+x+y-x_0)] + [2f(x)f(y) - f(x+y)] \text{ theo (DE)} \\
&\quad = 2f(x_0)f(x_0+x+y) - f(x+y) + 2f(x)f(y) - f(x+y) \\
&\quad = 2[f(x)f(y) + \alpha f(x_0+x+y) - f(x+y)].
\end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2}[f(x+x_0) + (\beta-\alpha)f(x)][f(y+x_0) + (\beta-\alpha)f(y)] \\
&= \frac{1}{\beta^2}\{f(x+x_0)f(y+x_0) + (\beta-\alpha)[f(x)f(x_0+y) + f(y)f(x_0+x) \\
&\quad + f(y)f(x_0+x)] + (\beta-\alpha)^2 f(x)f(y)\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\{f(x)f(y) + \alpha f(x_0+x+y) - f(x+y) \\
&\quad + (\beta-\alpha)[f(x_0+x+y) + 2\alpha f(x)f(y) - \alpha f(x+y)] \\
&\quad + (\beta-\alpha)^2 f(x)f(y)\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\{[(\beta-\alpha)^2 + 2\alpha(\beta-\alpha) + 1]f(x)f(y) + \beta f(x_0+x+y) \\
&\quad - [1 + (\beta-\alpha)\alpha]f(x+y)\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\{(\beta^2 - \alpha^2 + 1)f(x)f(y) + \beta f(x_0+x+y) - (\beta\alpha - \beta^2)f(x)f(y)\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\beta^2}[\beta f(x_0+x+y)+\beta(\beta-\alpha)f(x+y)] = E(x+y).$$

Suy ra: $E(x)$ là hàm exponential. Thử lại ta có:

$$\begin{aligned}
f(x+y)+f(x-y) =& \frac{E(x+y)+E^*(x+y)}{2}+\frac{E(x-y)+E^*(x-y)}{2}\\
=&\frac{E(x)E(y)+E^*(x)E^*(y)+E(x)E(-y)+E^*(x)E^*(-y)}{2}\\
=&\frac{E(x)E(y)+E^*(x)E^*(y)+E(x)E^*(y)+E^*(x)E(y)}{2}\\
=&\frac{E(x)[E(y)+E^*(y)]+E^*(x)[E^*(y)+E(y)]}{2}\\
=&2\frac{E(x)+E^*(x)}{2}\frac{E(y)+E^*(y)}{2} = 2f(x)f(y)
\end{aligned}$$

Vậy: $f(x) = \dfrac{E(x)+E^*(x)}{2}$ trong đó $E(x)$ là hàm exponential.

Từ các công thức biến đổi

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y,\ \ x, y \in \mathbb{R},$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y,\ \ x, y \in \mathbb{R},$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y \cos x,\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Nếu ta thay các hàm cos, sin ở cả hai vế của công thức bằng các ẩn hàm tương ứng thì sẽ được các bài toán sau.

Bài toán 2.4. Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Giải. Đổi vai trò của x và y cho nhau trong (2.16) ta có

$$f(y-x) = f(y)f(x) + g(y)g(x). \tag{2.17}$$

Kết hợp (2.16) và (2.17) ta được

$$f(x-y) = f(y-x),\ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Cho $y = 0$ thay vào (2.18) ta được

$$f(x) = f(-x),\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

suy ra $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.
Thay x bằng $-x$ và y bằng $-y$ vào (2.16) ta có

$$f(y-x) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y),$$

mặt khác do f là hàm chẵn nên

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(-x)g(-y). \tag{2.19}$$

Kết hợp (2.19) và (2.16) ta có:

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Xét hai trường hợp
Trường hợp1: $g(x)$ là hàm hằng, khi đó $g(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$ thì (2.16) trở thành

$$f(x-y) = f(x)f(y) + c^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay y bằng $-y$ và sử dụng tính chất hàm $f(x)$ là hàm chẵn, ta có

$$f(x+y) = f(x)f(y) + c^2 = f(x-y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

suy ra f là hàm hằng. Đặt $f(x) = b, \ \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó (2.16) trở thành

$$b = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 - b + c^2 = 0.$$

Suy ra $b = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c^2}}{2}$

Vậy nghiệm của bài toán trong trường hợp này là:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c^2}}{2}, \\ g(x) = c. \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ c = \text{const } \in \mathbb{C}$$

Trường hợp 2: $g(x)$ không là hàm hằng, ta chọn y_0 sao cho $g(y_0) \neq 0$, từ (2.20) thay $y = y_0$ ta có:

$$g(x) = cg(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.21}$$

ở đây c là hằng số khác 0. Suy ra

$$g(x) = c^2 g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

mặt khác do g không là hàm hằng nên $c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$.

Giả sử $c = 1$, thay vào (2.21) ta được

$$g(x) = g(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

suy ra $g(x)$ là hàm chẵn.
Thay y bằng $-y$ vào (2.16), ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(x)g(y) = f(x-y). \end{aligned}$$

Suy ra $f(u) = f(v), \ \forall u, v \in \mathbb{R}$, hay f là hàm hằng.
Đặt $f(u) = m, \ \forall u \in \mathbb{R}$, m là một hằng số khi đó (2.16) trở thành

$$m = m^2 + g(x)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

suy ra $g(x)$ là hàm hằng (trái giả thiết $g(x)$ không là hàm hằng) điều đó chứng tỏ rằng $c = -1$ hay $g(x)$ là hàm lẻ.
Thay y bằng $-y$ vào (2.16), ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \text{ (vì } f \text{ là hàm chẵn, } g \text{ là hàm lẻ),} \end{aligned}$$

suy ra

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y). \tag{2.22}$$

Cộng hai vế của (2.16) và (2.22), ta được

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hay hàm f thỏa mãn điều kiện của phương trình (DE) suy ra

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \ \ E(x) \text{ là hàm exponential.}$$

Thay hàm f vào (2.16), ta có

$$\begin{aligned} \frac{E(x-y) + E^*(x-y)}{2} &= \frac{E(x) + E^*(x)}{2}\frac{E(y) + E^*(y)}{2} + g(x)g(y) \\ \Rightarrow g(x)g(y) &= \frac{2[E(x)E^*(y) + E^*(x)E(y)]}{4} - \frac{E(x)E(y) + E^*(x)E(y)}{4} \\ &- \frac{E(x)E^*(y) + E^*(x)E^*(y)}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x)g(y) = -\frac{E(x) - E^*(x)}{2}\frac{E(y) - E^*(y)}{2}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

mà hàm $g(x)$ không là hàm hằng, suy ra

$$g(x) = i\frac{E(x) - E^*(x)}{2}.$$

Suy ra nghiệm của bài toán trong trường hợp này là:

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, g(x) = i\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

ở đây $E(x)$ là hàm exponential.

Kết luận:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4c^2}}{2}, \\ g(x) = c, \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ c = \text{const} \ \in \mathbb{C};$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{E(x) + E^*(x)}{2}, \\ g(x) = i\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2}, \end{cases} \qquad E(x) \text{ là hàm exponential.}$$

Chú ý 2.1. Nếu cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ($g(x)$ không là hàm hằng, $f \not\equiv 0$) và thỏa mãn

$$f(x - y) = f(x)f(y) + g(x)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

thì ta chứng minh được : $g(x)^2 + f(x)^2 = 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh: Thật vậy, từ lời giải của bài toán trên ta có $g(x)$ là hàm lẻ suy ra $g(0) = 0$. Cho $y = 0$ thay vào (2.16) ta có

$$f(x) = f(x)f(0) + g(x)g(0),$$

kết hợp với $g(0) = 0$ ta có

$$f(x) = f(x)f(0), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do hàm $f \not\equiv 0$ ta suy ra $f(0) = 1$.
Cho $x = y$ thay vào (2.16) và kết hợp với $f(0) = 1$ ta thu được

$$f(0) = f(x)^2 + g(x)^2$$

hay

$$f(x)^2 + g(x)^2 = 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.5. Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y), \ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Giải. Nếu $f(x)$ là hàm hằng.
Dễ thấy $f(x) = c$ và $g(x) = \sqrt{c(1-c)}$ ở đây $c = \text{const}$ là nghiệm của bài toán,
$f(x) = c$ và $g(x) = -\sqrt{c(1-c)}$ ở đây $c = \text{const}$ cũng là nghiệm của bài toán.
Nếu $f(x)$ không phải là hàm hằng thì. Đổi vai trò của x và y cho nhau trong (2.23) ta có

$$f(y-x) = f(y)f(x) + g(y)g(x). \tag{2.24}$$

Từ (2.23) và (2.24) ta được

$$f(x-y) = f(y-x), \ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Cho $y = 0$ thay vào (2.25) ta được

$$f(x) = f(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

suy ra $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.
Thay x bằng $-x$ và y bằng $-y$ vào (2.23) ta có

$$f(y-x) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y).$$

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên thay x bằng $-x$ và y bằng $-y$ vào (2.23) ta có

$$f(-x-y) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y) = f(x)f(y) + g(-x)g(-y). \tag{2.26}$$

Kết hợp (2.26) và (2.23) ta có:

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Giả sử $g(x)$ là hàm hằng, khi đó $g(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ thì (2.23) trở thành

$$f(x-y) = f(x)f(y) + c^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay y bằng $-y$ và sử dụng tính chất hàm $f(x)$ là hàm chẵn, ta có

$$f(x+y) = f(x)f(-y) + c^2 = f(x)f(y) + c^2 = f(x-y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

suy ra $f(x)$ là hàm hằng (trái giả thiết) từ đó chứng tỏ $g(x)$ không là hàm hằng.
Chọn y_0 sao cho $g(y_0) \neq 0$, từ (2.27) thay $y = y_0$ ta có:

$$g(x) = cg(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.28}$$

ở đây c là hằng số khác 0. Từ đó suy ra:

$$g(x) = c^2 g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác do $g(x)$ không là hàm hằng nên $c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$.

Giả sử $c = 1$, từ (2.28) suy ra

$$g(x) = g(-x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Suy ra $g(x)$ là hàm chẵn. Thay y bằng $-y$ vào (2.23), ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(x)g(y) = f(x-y), \end{aligned}$$

suy ra $f(u) = f(v), \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(u) = m, \ \ \forall u \in \mathbb{R}$, m là một hằng số hay $f(x)$ là hàm hằng (trái giả thiết) điều đó chứng tỏ rằng $c = -1$ hay $g(x)$ là hàm lẻ.

Thay y bằng $-y$ vào (2.23), ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \text{ (vì } f(x) \text{ là hàm chẵn, } g(x) \text{ là hàm lẻ),} \end{aligned}$$

suy ra,

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y). \tag{2.30}$$

Cộng hai vế của (2.23) và (2.30) , ta được

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm liên tục nên thỏa mãn điều kiện của phương trình d'Alembert và $f \not\equiv c$ thì $f(x)$ là một trong hai hàm sau

$$f(x) = \cos(\alpha x), \ \ f(x) = \cosh(\beta x), \ \ (\alpha \neq 0, \ \ \beta \neq 0).$$

Và theo chú ý 2.1 ta có $f(x)^2 + g(x)^2 = 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $f(x) = \cos(\alpha x)$ thì

$$g(x)^2 = 1 - \cos^2(\alpha x) \Rightarrow g(x) = \pm \sin(\alpha x).$$

Nếu $f(x) = \cosh(\beta x)$ khi đó $|f(x)| = |\cosh(\beta x)| \geq 1$ mà theo chú ý 2.1 thì ta có $|f(x)| \leq 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, từ đó suy ra $f(x) = \cosh(\beta x)$ không là nghiệm của bài toán.

Kết luận:

$$\begin{cases} f = c \\ g = \sqrt{c(1-c)} \end{cases} ; \begin{cases} f = c \\ g = -\sqrt{c(1-c)} \end{cases} ; \begin{cases} f(x) = \cos(\alpha x) \\ g(x) = \pm \sin(\alpha x) \end{cases} , (\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}).$$

Bài toán 2.6. Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.31}$$

Giải. Dễ kểm tra thấy $f \equiv 0$ và $g(x)$ là hàm số tùy ý là nghiệm của (2.31).

Xét $f \not\equiv 0$, ta có:

$$\begin{aligned} f(x+y+z) =& f(x)g(y+z) + f(y+z)g(x) \\ =& f(x)g(y+z) + f(y)g(z)g(x) + f(z)g(y)g(x) \end{aligned} \tag{2.32}$$

và

$$\begin{aligned} f(x+y+z) =& f(x+y)g(z) + f(z)g(x+y) \\ =& f(x)g(y)g(z) + f(y)g(x)g(z) + f(z)g(x+y) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Từ (2.32)và (2.33), ta có:

$$f(x)[g(y+z) - g(y)g(z)] = f(z)[g(x+y) - g(x)g(y)]. \tag{2.34}$$

Vì $f \not\equiv 0$ khi đó tồn tại $z_0 \neq 0$ sao cho $f(z_0) \neq 0$.
Thay $z = z_0$ vào (2.34) suy ra,

$$g(x+y) - g(x)g(y) = f(x)k(y), \tag{2.35}$$

trong đó $k(y) = \dfrac{g(y+z_0) + g(y)g(z_0)}{f(z_0)}$.
Đổi vai trò của x và y cho nhau trong (2.35), ta có

$$g(x+y) - g(x)g(y) = f(y)k(x). \tag{2.36}$$

Từ (2.35) và (2.36), ta có

$$f(x)k(y) = f(y)k(x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.37}$$

Thay $x = z_0$ vào (2.37) ta được,

$$f(z_0)k(y) = f(y)k(z_0) \Rightarrow k(y) = \frac{k(z_0)}{f(z_0)} f(y), \ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$k(x) = \alpha^2 f(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.38}$$

ở đây α là một hằng số nên từ (2.38) và (2.36) ta có:

$$g(x+y) = g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.39}$$

Trường hợp 1: Nếu $\alpha = 0$ thì từ (2.39), ta có

$$g(x+y) = g(x)g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

suy ra $g(x) = E(x)$ ở đây $E(x)$ là hàm exponential.

Mặt khác, từ $f \not\equiv 0$ ta có $E(x) \neq 0, \ \forall x \in R$.

Thay $g(x) = E(x)$ vào (2.31) ta có,

$$\begin{aligned} &f(x+y) = f(x)E(y) + f(y)E(x) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{f(x+y)}{E(x+y)} = \frac{f(x)}{E(x)} + \frac{f(y)}{E(y)}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Đặt $A(x) = \dfrac{f(x)}{E(x)}$ khi đó theo (2.40) ta có

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

suy ra $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm cộng tính.

Trong trường hợp này thì nghiệm của bài toán là:

$$f(x) = A(x)E(x), \ \ g(x) = E(x).$$

Trường hợp 2: Nếu $\alpha \neq 0$, ta nhân hai vế của (2.31) với α và cộng và trừ kết quả với (2.39), ta được

$$\begin{aligned} &\alpha f(x+y) + g(x+y) = \alpha f(x)g(y) + \alpha f(y)g(x) + g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y) \\ \Leftrightarrow &g(x+y) + \alpha f(x+y) = [g(x) + \alpha f(x)][g(y) + \alpha f(y)] \end{aligned} \tag{2.41}$$

và

$$g(x+y) - \alpha f(x+y) = [g(x) - \alpha f(x)][g(y) - \alpha f(y)]. \tag{2.42}$$

Đặt $\begin{cases} E_1(x) = g(x) + \alpha f(x), \\ E_2(x) = g(x) - \alpha f(x), \end{cases}$ thì (2.41) và (2.42) được viết lại là

$E_1(x+y) = E_1(x).E_1(y)$ và $E_2(x+y) = E_2(x).E_2(y)$ suy ra $E_1(x), E_2(x)$ là hàm exponential. Ta có,

$$\begin{cases} g(x) + \alpha f(x) = E_1(x) \\ g(x) - \alpha f(x) = E_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \\ g(x) = \dfrac{E_1(x) + E_2(x)}{2} \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của bài toán là các cặp hàm

$$\begin{cases} f \equiv 0 \\ g(x) \text{ là hàm tùy ý} \end{cases}, \begin{cases} f(x) = A(x)E(x) \\ g(x) = E(x) \end{cases}, \begin{cases} f(x) = \dfrac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \\ g(x) = \dfrac{E_1(x) + E_2(x)}{2} \end{cases}, (\alpha \neq 0)$$

ở đây $E, E_1, E_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm cộng tính.

Chú ý 2.2. Nếu bổ sung thêm điều kiện hàm $f(x)$ là hàm chẵn và $g(x)$ là hàm lẻ thì nghiệm của bài toán 2.6 là

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_1^*(x)}{2\alpha} \text{ và } g(x) = \frac{E_1(x) + E_1^*(x)}{2}.$$

Chứng minh: Thật vậy từ nghiệm của bài toán 2.6 suy ra

$$E_1^*(x) = E_1(-x) = g(-x) + \alpha f(-x) = g(x) - \alpha f(x) = E_2(x),$$

suy ra

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_1^*(x)}{2\alpha} \text{ và } g(x) = \frac{E_1(x) + E_1^*(x)}{2}.$$

2.3. Phương trình hàm sinh bởi hàm sin và sin hyperbolic

Ta có biến đổi lượng giác sau

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin^2 y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2y}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x) \\ &= \sin(x+y)\sin(x-y). \end{aligned}$$

Từ đó nếu $f(x) = \sin x$ thì ta có $f(x-y)f(x+y) = f(x)^2 - f(y)^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Xuất phát từ đặc trưng hàm này ta có bài toán.

Bài toán 2.7. Xác định các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x-y)f(x+y) = f(x)^2 - f(y)^2, \ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.43}$$

Giải. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $f \equiv 0$, dễ kiểm tra $f \equiv 0$ là nghiệm của (2.43)

Trường hợp 2: $f \not\equiv 0$, nên tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \neq 0$. Đặt

$$\phi(x) = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.44}$$

Từ (2.43) và (2.44) ta có

$$\begin{aligned}
2\phi(x)\phi(y) &= \frac{1}{2f(x_0)^2}[f(x+x_0) - f(x-x_0)][f(y+y_0) - f(y-y_0)] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}[f(x+x_0)f(y+y_0) - f(x-x_0)f(y+y_0) \\
&\qquad - f(x+x_0)f(y-y_0) + f(x-x_0)f(y-y_0)] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}\Big[f\Big(\frac{x+y}{2} + x_0 + \frac{x-y}{2}\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} + x_0 - \frac{x-y}{2}\Big) \\
&\qquad - f\Big(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} - y_0\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} + x_0\Big) \\
&\qquad - f\Big(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} + x_0\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} - x_0\Big) \\
&\qquad + f\Big(\frac{x+y}{2} - x_0 + \frac{x-y}{2}\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} - x_0 - \frac{x-y}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}\Big[f\Big(\frac{x+y}{2} + x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 \\
&\qquad + f\Big(\frac{x-y}{2} - x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2} + x_0\Big)^2 \\
&\qquad + f\Big(\frac{x+y}{2} - x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}\Big[f\Big(\frac{x+y}{2} + x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 + f\Big(\frac{x-y}{2} + x_0\Big)^2 \\
&\qquad - \Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 + f\Big(\frac{x+y}{2} - x_0\Big)^2 \\
&\qquad - f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2} - x_0\Big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}[f(x+y+x_0)f(x_0) + f(x-y+x_0)f(x_0) \\
&\qquad - f(x+y-x_0)f(x_0) - f(x-y-x_0)f(x_0)] \\
&= \phi(x+y) + \phi(x-y).
\end{aligned}$$

Suy ra hàm $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn phương trình (DE),

$$\phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x)\phi(y), \ \ x, y \in \mathbb{R},$$

theo bài toán phương trình (DE) ta có

$$\phi(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}.$$

Đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ thì (2.43) trở thành

$$f(u)f(v) = f\Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{u-v}{2}\Big), \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(y) \neq 0$, đặt $\alpha = x_0$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+y) - f(x-y)}{2f(y)} &= \frac{f(x+y)f(\alpha) - f(x-y)f(\alpha)}{2f(y)f(\alpha)} \\
&= \frac{f\left(\frac{x+y+\alpha}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x+y-\alpha}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-y+\alpha}{2}\right)^2 + f\left(\frac{x-y-\alpha}{2}\right)^2}{2f(y)f(\alpha)} \\
&= \frac{f\left(\frac{x+y+\alpha}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x+\alpha-y}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-\alpha+y}{2}\right)^2 + f\left(\frac{x-\alpha-y}{2}\right)^2}{2f(y)f(\alpha)} \\
&= \frac{f(x+\alpha)f(y) - f(x-\alpha)f(y)}{2f(y)f(\alpha)} \\
&= \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha)}{2f(\alpha)} \\
&= \phi(x).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\phi(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.45}$$

Mặt khác ta có $\phi(0) = 1$, suy ra $f(-y) = -f(y), \ \forall y \in \mathbb{R}$, suy ra (2.45) trở thành

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(y)\phi(x). \tag{2.46}$$

Đổi vai trò của x và y trong (2.46), ta có

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\phi(y). \tag{2.47}$$

Cộng hai vế của (2.46) và (2.47) ta có

$$f(x+y) = f(x)\phi(y) + f(y)\phi(x)$$

Mặt khác ở đây $f(x)$ là hàm lẻ và $\phi(x)$ là hàm chẵn nên theo chú ý 2.2 và bài toán 2.6 ta có

$$f(x) = A(x), \quad f(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}(\alpha \neq 0).$$

ở đây $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm cộng tính.
Thử lại ta thấy $f(x) = A(x), \ f(x) = \dfrac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Kết luận:

$$f \equiv 0, \ f(x) = A(x), \ f(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}, \text{ trong đó } (\alpha = \text{const } \neq 0),$$

$E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm cộng tính.

Nhận xét 2.4. Nếu bổ sung thêm điều kiện hàm cần tìm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì ta được bài toán

Xác định hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Và từ nghiệm của bài toán 2.7 ta có nghiệm của bài toán là

$$f(x) = k_1 x,$$
$$f(x) = k_2 \sin(k_3 x),$$
$$f(x) = k_4 \sinh(k_5 x),$$

trong đó k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 là các hằng số thực.

Từ công thức biến đổi

$$\cos(x+y)\sin(x-y) = \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2y) = \cos x \sin x - \cos y \sin y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nếu thay hàm $f(x) = \cos x$ và $g(x) = \sin x$ thì ta được

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y), \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đặc trưng hàm này ta có bài toán sau.

Bài toán 2.8. Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y), \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.48}$$

Giải. Nếu $f(x)$ là hàm hằng, giải sử $f(x) = k,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ khi đó (2.48) trở thành

$$kg(x-y) = kg(x) - kg(y),$$

suy ra

$$k[g(x-y) - g(x) + g(y)] = 0,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.49}$$

Nếu $k = 0$ thì hàm $g(x)$ là tùy ý vậy ta có nghiệm trong trường hợp này là: $f \equiv 0$ và g là hàm tùy ý.
Nếu $k \neq 0$ thì từ (2.49) ta có

$$g(x-y) = g(x) - g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

Cho $x = 0$ thay vào (2.50) ta được

$$g(-y) = g(0) - g(y),\ \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.51}$$

Ta lại có, thay y bằng $-y$ vào (2.50) thì được

$$g(x+y) = g(x) - g(-y).$$

Kết hợp với (2.51) ta được

$$g(x+y) = g(x) + g(y) - g(0),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.52}$$

Đặt $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cho bởi $A(x) = g(x) - g(0)$, khi đó (2.52) trở thành

$$A(x+y) = A(x) + A(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.53}$$

Suy ra $A(x)$ là hàm cộng tính, suy ra $g(x) = A(x) + \delta$ trong đó $\delta = g(0)$.

Vậy nghiệm bài toán trong trường hợp này là: $f(x) = k,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = A(x) + \delta$, trong đó $A(x)$ là hàm cộng tính và δ là hằng số tùy ý.
Nếu $g(x)$ là hàm hằng, giả sử $g(x) = k,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ khi đó (2.48) trở thành

$$k[f(x+y) - f(x) + f(y)] = 0,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.54}$$

Nếu $k = 0$ thì $f(x)$ là hàm tùy ý. Vậy nghiệm của bài toán trong trường hợp này là $f(x)$ là hàm tùy ý và $g(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Nếu $k \neq 0$ thì từ (2.54) ta có

$$f(x+y) = f(x) - f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.55}$$

Cho $x = 0$ thay vào (2.55) ta được

$$f(y) = f(0) - f(y) \Rightarrow 2f(y) = f(0), \ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

hay $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra, nghiệm của bài toán trong trường hợp này là $f \equiv 0$ và $g \equiv k$ với $k \neq 0$.

Xét hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ không là hàm hằng.

Đổi vai trò của x và y trong (2.48) ta có:

$$f(x+y)g(y-x) = f(y)g(y) - f(x)g(x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.56}$$

Từ (2.48) và (2.56) ta có

$$f(x+y)g(x-y) = -f(x+y)g(y-x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.57}$$

Đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ khi đó (2.57) trở thành

$$f(u)g(v) = -f(u)g(-v), \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{2.58}$$

Vì $f(x)$ không là hàm hằng nên tồn tại một $u_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(u_0) \neq 0$.
Cho $u = u_0$ thay vào (2.58) ta được

$$g(v) = -g(-v), \ \ \forall v \in \mathbb{R},$$

suy ra hàm $g(x)$ là hàm lẻ.

Đặt $\psi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ và $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, dễ thấy hàm $\psi(x)$ là hàm chẵn, hàm $\phi(x)$ là hàm lẻ và

$$f(x) = \psi(x) + \phi(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.59}$$

Thay (2.59) vào (2.48) ta có,

$$\begin{aligned}&\psi(x+y)g(x-y) + \phi(x+y)g(x-y)\\ &\qquad = \psi(x)g(x) - \psi(y)g(y) + \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.60}$$

Thay x bằng $-x$ và y bằng $-y$ và sử dụng tính chất $\psi(x)$ là hàm lẻ, $\phi(x)$ là hàm chẵn ta được

$$\begin{aligned}&-\psi(x+y)g(x-y) + \phi(x+y)g(x-y)\\ &\qquad = -\psi(x)g(x) + \psi(y)g(y) + \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Cộng vế với vế của (2.60) và (2.61) ta được,

$$\phi(x+y)g(x-y) = \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.62}$$

Từ (2.60) và (2.62) ta có

$$\psi(x+y)g(x-y) = \psi(x)g(x) - \psi(y)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.63}$$

Thay y bằng $-y$ vào (2.62) ta có,

$$\phi(x-y)g(x+y) = \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.64}$$

Từ (2.62) và (2.64) ta có

$$\phi(x+y)g(x-y) = \phi(x-y)g(x+y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.65}$$

Đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ thay vào (2.65) ta có

$$\phi(u)g(v) = \phi(v)g(u), \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{2.66}$$

Vì hàm $g(x)$ không là hàm hằng nên từ (2.66) ta có

$$\phi(x) = \alpha g(x) \text{ trong đó } \alpha = \text{const} \ , \ \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.67}$$

Trường hợp 1: Nếu $\alpha \neq 0$, thì thay (2.67) vào (2.62) ta có

$$\phi(x+y)\phi(x-y) = \phi(x)^2 - \phi(y)^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.68}$$

mà $g(x)$ không là hàm hằng suy ra hàm $\phi(x)$ cũng không là hàm hằng nên nghiệm của phương trình hàm (2.68) là:

$$\phi(x) = A(x) \text{ trong đó } A(x) \text{ hàm cộng tính,}$$

hoặc

$$\phi(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} \text{ trong đó } E(x) \text{ là hàm exponential,} b \neq 0.$$

Khi đó từ (2.67) ta có

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}A(x), \tag{2.69}$$

hoặc

$$g(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}. \tag{2.70}$$

Cho $y = -x$ thay vào (2.63) kết hợp với tính chất hàm $g(x)$ là hàm lẻ, hàm $\psi(x)$ là hàm chẵn, ta có

$$\psi(0)g(2x) = 2\psi(x)g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.71}$$

Nếu $\psi(0) = 0$ thì (2.71) trở thành

$$\psi(x)g(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.72}$$

Thay (2.72) vào (2.63) ta có

$$\psi(x+y)g(x-y) = 0, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

suy ra $\psi \equiv 0$ hoặc $g \equiv 0$. Mà $g(x)$ và $f(x)$ không là hàm hằng nên $\psi \equiv 0$. Mặt khác $\phi(x) = \alpha g(x)$ nên ϕ không là hàm hằng, mà $f(x) = \psi(x) + \phi(x)$ nên $\psi \not\equiv 0$. Suy ra $\psi(0) \neq 0$.

Vì $\psi(0) \neq 0$, đặt $\delta = \psi(0)$ thay vào (2.71) ta có

$$g(2x) = \frac{2}{\delta}\psi(x)g(x), \ \text{trong đó } \delta := \psi(0), \tag{2.73}$$

thay (2.69) vào (2.73) ta có

$$\psi(x) = \delta \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \text{suy ra } f(x) = \phi(x) + \psi(x) = A(x) + \delta,$$

và

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}A(x) = \beta A(x), \ \text{trong đó } \beta = \text{const }, \ \ \beta \neq 0.$$

Suy ra, nghiệm của bài toán trong trường hợp này là:

$$\begin{cases} f(x) & = A(x) + \delta \\ g(x) & = \beta A(x), \end{cases}$$

trong đó β là các hằng số khác 0, $A(x)$ là hàm cộng tính.

Thay (2.70) vào (2.73) ta được

$$\frac{1}{\alpha b}\frac{E(2x) - E^*(2x)}{2} = \frac{2}{\delta}\psi(x)\frac{1}{\alpha b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

suy ra

$$E(x) + E^*(x) = \frac{2}{\delta}\psi(x) \Leftrightarrow \psi(x) = \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2},$$

suy ra

$$\begin{aligned} f(x) =&\phi(x) + \psi(x)\\ =&\frac{E(x) - E^*(x)}{2b} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2}\\ =&\gamma\frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2} \end{aligned}$$

và

$$g(x) = \frac{1}{\delta b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2} = \beta\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

ở đây β là hàng số khác 0. Suy ra nghiệm của bài toán trong trường hợp này là:

$$\begin{cases} f(x) & = \gamma\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\dfrac{E(x) + E^*(x)}{2}\\ g(x) & = \beta\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 2: Nếu $\alpha = 0$ nên từ (2.67) ta có $\phi \equiv 0$ suy ra, $f = \psi$.

Khi đó phương trình (2.63) trở thành

$$\psi(x + y)g(x - y) = \psi(x)g(x) - \psi(y)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cho $y = -x$ ta được

$$\psi(0)g(2x) = 2\psi(x)g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Do $\psi(0) \neq 0$ nên ta có, đặt $\delta = \psi(0)$ khi đó

$$g(2x) = \frac{2}{\delta}\psi(x)g(x), \text{ ở đây } \delta := \psi(0).$$

Ta có

$$\begin{aligned} &g(x + y)g(x - y)\\ &=\frac{4}{\delta^2}\left[\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]\\ &=\frac{4}{\delta^2}\left[\psi\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{y}{2}\right)g\left(\frac{y}{2}\right)\right]\left[\psi\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{y}{2}\right)g\left(\frac{y}{2}\right)\right]\\ &=\frac{4}{\delta^2}\left[\psi\left(\frac{x}{2}\right)^2 g\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \psi\left(\frac{y}{2}\right)^2 g\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]\\ &=g(x)^2 - g(y)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$g(x + y)g(x - y) = g(x)^2 - g(y)^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.74}$$

khi đó hàm $g(x)$ là một trong hai hàm sau

$$g(x) = A(x) \tag{2.75}$$

hoặc

$$g(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} \tag{2.76}$$

ở đây $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm cộng tính , $E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là hàm exponential, $b \neq 0$ là các hằng số phức.

Từ (2.73) , (2.75) và (2.76) ta có

$$\psi(x) = \delta$$

hoặc

$$\psi(x) = \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

Suy ra, nghiệm của bài toán trong trường hợp này là

$$\begin{cases} f(x) = \delta\dfrac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ g(x) = \beta\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của bài toán là

$$f(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) \text{ hàm tùy ý},$$

$$f(x) \text{hàm tùy ý và } g(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = A(x) + \delta \text{ và } g(x) = \beta A(x),$$

$$\begin{cases} f(x) = \gamma\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\dfrac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ g(x) = \beta\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} \end{cases}$$

trong đó β, δ là các hàng số khác 0, γ là hằng số tùy ý, $E(x)$ là hàm exponential, $A(x)$ là hàm cộng tính.

Nhận xét 2.5. Nếu bổ sung thêm điều kiện hai hàm cần tìm f, g là hai hàm liên tục thì ta được bài toán.

Xác định các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và khác hàm hằng thỏa mãn

$$f(x + y)g(x - y) = f(x)g(x) - f(y)g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Và từ kết quả của bài toán 2.8 ta có nghiệm của bài toán là

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý},\\
&f(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý } \text{ và } g(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\\
&f(x) = k_1 x \text{ và } g(x) = k_2 x,\\
&f(x) = k_3 \sin(ax) + k_4 \cos(ax) \text{ và } g(x) = k_5 \sin(ax),\\
&f(x) = k_6 \sinh(ax) + k_7 \cosh(ax) \text{ và } g(x) = k_8 \sinh(ax),
\end{aligned}$$

trong đó $k_1, k_2, k_4, k_5, k_7, k_8, a$ là những hằng số khác 0, k_3, k_6 là hằng số tùy ý.

Bài toán 2.9. Chứng minh rằng nếu hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)f(x-y) \le f(x)^2 - f(y)^2,\ \ x, y \in \mathbb{R} \tag{2.77}$$

thì hàm f là nghiệm của phương trình hàm

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2.$$

Giải. Cho $x = y = 0$ thay vào (2.77) ta được $f(0)^2 \le 0$ suy ra $f(0) = 0$.
Cho $x = -y$ thay vào (2.77) ta có

$$0 \le f(-y)^2 - f(y)^2 \Leftrightarrow f(y)^2 \le f(-y)^2. \tag{2.78}$$

Thay y bằng $-y$ ta có

$$f(-y)^2 \le f(y)^2 \le f(-y)^2,$$

suy ra

$$f(-y)^2 = f(y)^2,\ \ \forall y \in \mathbb{R},$$

$$\text{hay } [f(-y) - f(y)][f(-y) + f(y)] = 0,\ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Giả sử có một vài điểm y_0 sao cho

$$f(y_0) = f(-y_0), \tag{2.79}$$

khi đó, cho $x = 0$ và $y = y_0$ thay vào (2.77) ta có

$$f(y_0)f(-y_0) \le -f(y_0)^2. \tag{2.80}$$

Từ (2.79) và (2.80), ta có

$$2f(y_0)^2 \le 0 \Rightarrow f(y_0) = 0 \Rightarrow f(-y_0) = 0. \tag{2.81}$$

Vì vậy ta có

$$f(-y) = -f(y), \ \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.82}$$

Từ (2.77) và (2.82), ta có

$$\begin{aligned} f(y)^2 \leq & f(x)^2 - f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 + f(x+y)f(y-x) \\ \leq & f(x)^2 + f(y)^2 - f(x^2) = f(y)^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2.4. Phương trình hàm sinh bởi hàm tang, tang hyperbolic

Bài toán 2.10. Cho $b > 0$. Tìm các hàm $f(x) \neq 0$ xác định và liên tục trong

$$D := \{x + 2bk \ \big| \ x \in (-b, b), k \in \mathbb{Z}\}$$

và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}, \ \ \forall x, y, x+y \in D. \tag{2.83}$$

Giải. Cho $y = 0$, Từ (2.83) ta có $f(0)\big([f(x)]^2 + 1\big) = 0, \forall x \in D$ nên $f(0) = 0$.
Do $f(0) = 0$ và do $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên tồn tại

$x_0 > 0$ sao cho $[-x_0, x_0] \subset (-b, b)$ và $|f(x)| < 1, \forall x \in [-x_0, x_0]$.

Chọn $x_1 \in [-x_0, x_0]$ và đặt $f(x_1) = \tan\alpha, \alpha \in \big(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big)$ khi đó

$$f(2x_1) = \frac{2f(x_1)}{1 - [f(x_1)]^2} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

Giả sử $f(kx_1) = \tan(k\alpha), \ \ \forall k = 1, 2, \ldots, m, m \in \mathbb{N}^+$. Khi đó

$$\begin{aligned} f((m+1)x_1) = & \frac{f(mx_1) + f(x_1)}{1 - f(mx_1)f(x_1)} \\ = & \frac{\tan m\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan m\alpha} \\ = & \tan(m+1)\alpha. \end{aligned}$$

Vậy $f(mx_1) = \tan m\alpha, \ \ \forall m \in \mathbb{N}^+$.
Thay $y = -x$ vào (2.83) và kết hợp với $f(0) = 0$ ta được $f(-x) = -f(x), \ \ \forall x \in D$.
Từ đó suy ra

$$f(mx_1) = \tan m\alpha, \ \ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.84}$$

Mặt khác, từ (2.83) ta được

$$f(x_1) = \frac{2f\left(\frac{x_1}{2}\right)}{1 - \left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2} = \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[f\left(\frac{x_1}{2}\right) - \tan\frac{\alpha}{2}\right]\left[1 + f\left(\frac{x_1}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}\right] = 0. \tag{2.85}$$

Do$\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right| < 1$ và $\left|f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right| < 1$ nên từ (2.85) suy ra

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) = \tan\frac{\alpha}{2}.$$

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \tan\frac{\alpha}{2^n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{2.86}$$

Khi đó từ (2.84) và (2.86) suy ra

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right) = \tan\frac{\alpha}{2^n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Kết hợp với giải thiết $f(x)$ là hàm liên tuc trên D, ta có

$$f(xx_1) = \tan(x\alpha),\ \ \forall x \in D.$$

Do đó

$$f(x) = \tan ax,\ \ a = \frac{\alpha}{x_1}$$

Để miền xác định của $f(x)$ trùng với D, cần chọn $a = \frac{\pi}{2b}$.
Kết luận

$$f(x) = \tan\frac{\pi}{2b}x, \forall x \in D.$$

Bài toán 2.11. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.87}$$

Giải. Thay $y = 0$ vào (2.87) ta được

$$f(0)\left[1 - (f(x))^2\right] = 0. \tag{2.88}$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ (2.88) ta được

$$f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ hoặc } f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(do $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$)

Thử lại, ta thấy các hàm số trên là các nghiệm của bài toán.

Xét trường hợp $f(0) = 0$. Ta chứng minh rằng $|f(x)| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Thật vậy, giả sử tồn tại $x_1 \neq 0$ để $|f(x_1)| \geq 1$ thì từ (2.87) suy ra các bất đẳng thức sau

$$|f(x_1)| = \frac{2\left|f\left(\dfrac{x_1}{2}\right)\right|}{1 + \left[f\left(\dfrac{x_1}{2}\right)\right]^2} \geq 1$$

suy ra,

$$1 + \left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 \leq 2\left|f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right|.$$

Do đó

$$\left|f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right| = 1.$$

Lập luận bằng phương pháp quy nạp, ta có

$$\left|f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)\right| = 1, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Từ tính liên tục của $f(x)$, suy ra $|f(0)| = 1$. Điều này trái với giả thiết $f(0) = 0$. Vậy $|f(x)| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Với $x_1 \neq 0$ đặt $f(x_1) = \tanh \alpha$. Khi đó

$$f(2x_1) = \frac{2f(x_1)}{1 + [f(x_1)]^2} = \frac{2\tanh \alpha}{1 + \tanh^2 \alpha} = 2\tanh 2\alpha$$

Giả sử $f(kx_1) = \tanh(k\alpha), \;\; \forall k = 1, 2, \ldots, m; m \in \mathbb{N}^+$. Khi đó

$$f((m+1)x_1) = \frac{f(mx_1) + f(x_1)}{1 - f(mx_1).f(x_1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tanh m\alpha + \tanh \alpha}{1 + \tanh \alpha . \tanh m\alpha} = \tanh(m+1)\alpha.$$

Vậy $f(mx_1) = \tanh m\alpha, \;\; \forall m \in \mathbb{N}^+$. Thay $y = -x$ vào (2.87) và sử dụng $f(0) = 0$ ta được $f(-x) = -f(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra

$$f(mx_1) = \tanh \alpha, \;\; \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.89}$$

Mặt khác, cũng từ (2.87) ta được

$$f(x_1) = \frac{2f\left(\dfrac{x_1}{2}\right)}{1 + \left[f\left(\dfrac{x_1}{2}\right)\right]^2} = \tanh \alpha = \frac{2\tanh \dfrac{\alpha}{2}}{1 + \tanh^2 \dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \big[f\big(\frac{x_1}{2}\big) - \tanh\frac{\alpha}{2}\big]\big[1 - f\big(\frac{x_1}{2}\big)\tanh\frac{\alpha}{2}\big] = 0. \tag{2.90}$$

Do $\left|\tanh\frac{\alpha}{2}\right| < 1$ và $\left|\tanh\frac{x_1}{2}\right| < 1$ nên

$$(2.90) \Leftrightarrow f\big(\frac{x_1}{2}\big) = \tanh\frac{\alpha}{2}$$

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp, dễ dàng chứng minh đẳng thức

$$f\big(\frac{x_1}{2^n}\big) = \tanh\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{2.91}$$

Từ (2.89) và (2.91) suy ra

$$f\big(\frac{mx_1}{2^n}\big) = \tanh\frac{m\alpha}{2^n}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

theo giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và do $\tanh x$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra

$$f(xx_1) = \tanh(x\alpha).$$

Vậy

$$f(x) = \tanh ax, \quad a = \frac{\alpha}{x_1}$$

Thử lại, ta được nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} &f \equiv 1,\\ &f \equiv -1,\\ &f(x) = \tanh ax, \quad a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

2.5. Một số dạng phương trình hàm sinh bởi đặc trưng hàm của cặp hàm sin và cosin

Xuất phát từ các tính chất của hàm sin và cos, nếu ta đặt $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos x$ thì ta có các đặc trưng hàm sau

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x), \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} f(x-y) = f(x)f(y) - f(y)g(x), \\ g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y), \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} \big[f(x) + g(x)\big]^2 = 1 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y) \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ những đặc trưng hàm này cho ta các bài toán sau.

Bài toán 2.12. Tìm các cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y) = & f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x+y) = & g(x)g(y) - f(x)f(y) \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.92}$$

Giải. Từ giả thiết(2.92) suy ra

$$\begin{aligned} [f(x+y)]^2 =& [f(x)g(y)]^2 + 2f(x)f(y)g(x)g(y) + [f(y)g(x)]^2, \\ [g(x+y)]^2 =& [g(x)g(y)]^2 - 2f(x)f(y)g(x)g(y) + [f(x)f(y)]^2 \\ \Rightarrow [f(x+y)]^2 + [g(x+y)]^2 =& [f(x)g(y)]^2 + [f(y)g(x)]^2 + [g(x)g(y)]^2 + [f(x)f(y)]^2 \\ =& \Big[[f(x)]^2 + [g(x)]^2\Big]\Big[[f(y)]^2 + [g(y)]^2\Big], \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$h(x+y) = h(x)h(y), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$h(x) = \big[f(x)\big]^2 + \big[g(x)\big]^2 \text{ và } h(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Khi đó, ta có $h \equiv 0$ hoặc $h(x) = a^x, a > 0$.

Xét trường hợp 1: $h \equiv 0$ ta có $f \equiv 0$ và $g \equiv 0$. Dễ kiểm tra thấy cặp hàm này thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Xét trường hợp 2: $h(x) = a^x$, tức là

$$\big[f(x)\big]^2 + \big[g(x)\big]^2 = a^x, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{a^{\frac{x}{2}}}\right]^2 + \left[\frac{g(x)}{a^{\frac{x}{2}}}\right]^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.93}$$

Kết hợp (2.92) và (2.93), ta được $f(0) = 0, g(0) = 1$ do các hàm $f(x)a^{-\frac{x}{2}}$ và $g(x)a^{-\frac{x}{2}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại x_0 sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{g(x)}{a^{\frac{x}{2}}} \le 1 \text{ và } \left|\frac{f(x)}{a^{\frac{x}{2}}}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \forall x \in [-x_0, x_0].$$

Đặt

$$\begin{cases} g(x_0) & = a^{\frac{x_0}{2}} \cos\alpha \\ f(x_0) & = a^{\frac{x_0}{2}} \sin\alpha, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

Thay $x = y = x_0$ vào (2.92), ta được

$$\begin{cases} g(2x_0) &= a^{\frac{2x_0}{2}} \cos 2\alpha \\ f(2x_0) &= a^{\frac{2x_0}{2}} \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Giả sử

$$\begin{cases} g(mx_0) &= a^{\frac{mx_0}{2}} \cos m\alpha, \\ f(mx_0) &= a^{\frac{mx_0}{2}} \sin m\alpha \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

Khi đó theo (2.92), ta được

$$\begin{cases} f((m+1)x_0) &= \big(a^{\frac{mx_0}{2}} \sin m\alpha\big)\big(a^{\frac{x_0}{2}} \cos \alpha\big) + \big(a^{\frac{x_0}{2}} \sin \alpha\big)\big(a^{\frac{mx_0}{2}} \cos m\alpha\big) \\ g((m+1)x_0) &= \big(a^{\frac{mx_0}{2}} \cos m\alpha\big)\big(a^{\frac{x_0}{2}} \cos \alpha\big) - \big(a^{\frac{mx_0}{2}} \sin m\alpha\big)\big(a^{\frac{x_0}{2}} \sin \alpha\big) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f((m+1)x_0) &= a^{\frac{(m+1)x_0}{2}} \cos(m+1)\alpha \\ g((m+1)x_0) &= a^{\frac{(m+1)x_0}{2}} \sin(m+1)\alpha, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}^+. \tag{2.94}$$

Tiếp theo, thay $x = x_0$ và $y = -mx_0$ vào (2.92), ta được

$$\begin{cases} f(mx_0)g(-mx_0) + f(-mx_0)g(mx_0) &= f(0) = 0, \\ g(mx_0)g(-mx_0) - f(mx_0)f(-mx_0) &= g(0) = 1. \end{cases}$$

Từ (2.94) suy ra

$$\begin{cases} g(mx_0) &= a^{\frac{mx_0}{2}} \cos m\alpha \\ f(mx_0) &= a^{\frac{mx_0}{2}} \sin m\alpha, \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.95}$$

Tiếp theo, thay $x = y = \dfrac{x_0}{2}$ vào (2.92) ta có

$$\begin{cases} f(x_0) &= 2f\big(\frac{x_0}{2}\big)g\big(\frac{x_0}{2}\big) = a^{\frac{x_0}{2}} \sin \alpha \\ g(x_0) &= \Big[g\big(\frac{x_0}{2}\big)\Big]^2 - \Big[f\big(\frac{x_0}{2}\big)\Big]^2 = a^{\frac{x_0}{2}} \cos \alpha \end{cases} \tag{2.96}$$

Giải (2.96) với lưu ý $g\big(\dfrac{x_0}{2}\big) > 0$, ta được

$$\begin{cases} f\big(\frac{x_0}{2}\big) &= a^{\frac{x_0}{4}} \sin \frac{\alpha}{2} \\ g\big(\frac{x_0}{2}\big) &= a^{\frac{x_0}{4}} \cos \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Giả sử

$$f\big(\frac{x_0}{2^k}\big) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}} \sin \frac{\alpha}{2^k} g\big(\frac{x_0}{2^k}\big) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}} \cos \frac{\alpha}{2^k}, \forall k = 1, 2, \dots, m \in \mathbb{N}^+.$$

Thay $x = y = \dfrac{x_0}{2^{k+1}}$ vào (2.92), ta được

$$\begin{cases} f\Big(\dfrac{x_0}{2^k}\Big) & = 2f\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}} \sin\dfrac{\alpha}{2^k} \\ g\Big(\dfrac{x_0}{2^k}\Big) & = \Big[g\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big)\Big]^2 - \Big[f\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big)\Big]^2 = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}} \cos\dfrac{\alpha}{2^k}. \end{cases}$$

Sử dụng lập luận đối với (2.96) ở trên, ta đi đến công thức

$$\begin{cases} f\Big(\dfrac{x_0}{2^k}\Big) & = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}} \sin\dfrac{\alpha}{2^k} \\ g\Big(\dfrac{x_0}{2^k}\Big) & = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}} \cos\dfrac{\alpha}{2^k}, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.97}$$

Từ các công thức (2.95) và (2.97) cho ta

$$\begin{cases} f\Big(\dfrac{mx_0}{2^k}\Big) & = a^{\frac{mx_0}{2^{k+1}}} \sin\dfrac{m\alpha}{2^k} \\ g\Big(\dfrac{mx_0}{2^k}\Big) & = a^{\frac{mx_0}{2^{k+1}}} \cos\dfrac{m\alpha}{2^k}, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.98}$$

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên (2.98) tương đương với

$$\begin{cases} f(tx_0) & = a^{\frac{tx_0}{2}} \sin t\alpha, \\ g(tx_0) & = a^{\frac{tx_0}{2}} \cos t\alpha, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

hay

$$\begin{cases} f(x) & = a^{\frac{x}{2}} \sin bx, \\ g(x) & = a^{\frac{x}{2}} \cos bx, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy cặp hàm trên thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Kết luận

$$\begin{cases} f & \equiv 0, \\ g & \equiv 0, \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} f(x) & = a^{\frac{x}{2}} \sin bx \\ g(x) & = a^{\frac{x}{2}} \cos bx, \end{cases} \quad a > 0, \forall b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}$$

Bài toán 2.13. Tìm các cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x-y) = & f(x)g(y) - f(y)g(x) \\ g(x-y) = & g(x)g(y) + f(x)f(y) \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.99}$$

Giải. Từ giả thiết suy ra

$$[f(x-y)]^2 = [f(x)g(y)]^2 - 2f(x)f(y)g(x)g(y) + [f(y)g(x)]^2,$$

$$\begin{aligned}
&[g(x-y)]^2 = [g(x)g(y)]^2 + 2f(x)f(y)g(x)g(y) + [f(x)f(y)]^2\\
\Rightarrow\ &[f(x-y)]^2 + [g(x-y)]^2 = [f(x)g(y)]^2 + [f(y)g(x)]^2 + [g(x)g(y)]^2 + [f(x)f(y)]^2\\
&\qquad = \big[[f(x)]^2 + [g(x)]^2\big]\big[[f(y)]^2 + [g(y)]^2\big], \forall x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$h(x-y) = h(x)h(y), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$h(x) = \big[f(x)\big]^2 + \big[g(x)\big]^2 \text{ và } h(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Ta có

$$\big[h(x)\big]^2 = h(x-x) = h(0).$$

Suy ra

$$h \equiv c \text{ với } c \in \mathbb{R} \text{ sao cho } c = c^2.$$

Vậy $h \equiv 0$ hoặc $h \equiv 1$.

Nếu $h \equiv 0$ thì

$$\big[f(x)\big]^2 + \big[g(x)\big]^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f \equiv & 0\\ g \equiv & 0.\end{cases}$$

Xét trường hợp $h \equiv 1$.
Khi đó thay $x = y = 0$ vào (2.99) ta được

$$\begin{cases} f(0) = 0\\ g(0) = 1\end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} f(-y) = -f(y)\\ g(-y) = g(y),\end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.100}$$

Thay y bởi $-y$ trong (2.99) và sử dụng (2.100), ta được

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)\\ g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(y),\end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.101}$$

Theo bài toán 2.12 thì

$$\begin{cases} f(x) = a^{\frac{x}{2}} \sin bx,\\ g(x) = a^{\frac{x}{2}} \cos bx.\end{cases}$$

Do $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$ nên $a = 1$.

Vậy $f(x), g(x)$ có dạng

$$\begin{cases} f(x) = \sin bx\\ g(x) = \cos bx,\end{cases} \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

Kết luận:

$$\begin{cases} f \equiv 0, \\ g \equiv 0, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f(x) = \sin bx \\ g(x) = \cos bx, \end{cases} \quad \forall b \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Bài toán 2.14. Tìm các cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} \big[f(x) + g(x)\big]^2 = 1 + f(2x), f(0) = 0, & \text{(i)} \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y), & \text{(ii)} \end{cases} \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2.102)$$

Giải. Cho $y = 0$, từ phương trình (ii) của (2.102), ta được

$$2f(x)[1 - g(0)] = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét trường hợp $g(0) \neq 1$ thì suy ra $f \equiv 0$.
Mặt khác theo (i) trong (2.102) ta có $g^2(x) = 1$ suy ra

$$g \equiv 1 \text{ hoặc } g \equiv -1.$$

Thử lại ta thấy cặp hàm này thỏa mãn bài toán.
Xét trường hợp $g(0) = 1$.
Thay $x = y$ vào (2.102) và sử dụng giả thiết $f(0) = 0, g(0) = 1$, ta được

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó và từ giả thiết $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ suy ra tồn tại $x_0 > 0$ sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < g(x) \leq 1, \ \ \forall x \in [-x_0, x_0]$$

$$|f(x)| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ \forall x \in [-x_0, x_0].$$

Đặt

$$f(x_0) = \sin\alpha, -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

Khi đó

$$g(x_0) = \sqrt{1 - [f(x_0)]^2} = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = |\cos\alpha| = \cos\alpha.$$

Cho $x = y = x_0$ khi đó từ (ii) suy ra

$$f(x_0 + x_0) + f(x_0 - x_0) = 2f(x_0)g(x_0) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

suy ra $f(2x_0) = \sin 2\alpha$.

Ta sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $f(mx_0) = \sin m\alpha,\ \ \forall m \in \mathbb{N}$. Giả sử

$$f(kx_0) = \sin(k\alpha),\ \ k = 1, 2, \ldots, m, m \in \mathbb{N}^+.$$

Khi đó theo (ii) ta có

$$f(kx_0 + x_0) + f(kx_0 - x_0) = 2f(kx_0)g(x_0)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f((k+1)x_0) &= 2f(kx_0)g(x_0) - f((k-1)x_0)\\ &= 2\sin k\alpha\cos\alpha - \sin(k-1)\alpha\\ &= \sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha - \sin(k-1)\alpha = \sin(k+1)\alpha.\end{aligned}$$

Vì vậy $f(kx_0) = \sin k\alpha, \forall k \in \mathbb{N}^+$.

Mặt khác, thay $x = 0$ vào (ii) thì $f(-y) = -f(y),\ \ \forall y \in \mathbb{R}$.

Do đó

$$f(kx_0) = \sin k\alpha,\ \ \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{iii}$$

Tiếp theo, thay $x = y = \dfrac{x_0}{2}$ vào (2.102), ta được

$$\begin{cases} \left[f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) + g\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right]^2 & = 1 + f\left(2\dfrac{x_0}{2}\right)\\ f\left(\dfrac{x_0}{2} + \dfrac{x_0}{2}\right) + f(0) & = 2f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)g\left(\dfrac{x_0}{2}\right), \end{cases}$$

$$\text{suy ra, } \begin{cases} f(x_0) = 2f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)g\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = \sin\alpha & = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\\ \left[f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right]^2 + \left[g\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right]^2 = 1 & = \sin^2\dfrac{x_0}{2} + \cos^2\dfrac{x_0}{2}. \end{cases} \tag{iv}$$

Giải (iv), ta được

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) & = \sin\dfrac{\alpha}{2},\\ g\left(\dfrac{x_0}{2}\right) & = \cos\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x_0}{2^m}\right) & = \sin\dfrac{\alpha}{2^m}\\ g\left(\dfrac{x_0}{2^m}\right) & = \cos\dfrac{\alpha}{2^m} \end{cases} \ \ \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

Giả sử

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x_0}{2^k}\right) & = \sin\dfrac{\alpha}{2^k}\\ g\left(\dfrac{x_0}{2^k}\right) & = \cos\dfrac{m\alpha}{2^k} \end{cases} \ \ \forall k = 1, 2, \cdots, n, n \in \mathbb{N}^+. \tag{v}$$

Thay $x = y = \dfrac{x_0}{2^{k+1}}$ vào (2.102) và sử dụng (v) ta được

$$\begin{cases} f\Big(\dfrac{x_0}{2^k}\Big) = 2f\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big)g\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big) = \sin\dfrac{\alpha}{2^k}, \\ \Big[f\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big)\Big]^2 + \Big[g\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big)\Big]^2 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} f\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big) & = \sin\dfrac{\alpha}{2^{k+1}}, \\ g\Big(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\Big) & = \cos\dfrac{\alpha}{2^{k+1}}. \end{cases}$$

Từ (iii) và (vi) suy ra

$$\begin{cases} f\Big(\dfrac{mx_0}{2^n}\Big) & = \sin\dfrac{m\alpha}{2^n} \\ g\Big(\dfrac{mx_0}{2^n}\Big) & = \cos\dfrac{m\alpha}{2^n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \ \ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{vii}$$

Sử dụng giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ ta được

$$\text{(vii)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0x) & = \sin\alpha x \\ g(x_0x) & = \cos\alpha x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0x) & = \sin ax \\ g(x_0x) & = \cos ax \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{viii}$$

Nếu $a = 0$ thì $f \equiv 0$ thay vào (2.102) và sử dụng giả thiết $g(0) = 1$ ta được $g \equiv 1$.
Khi $a \neq 0$ thì thay $y = x$ vào (ii) và sử dụng (viii), ta được

$$\begin{cases} f(x) = \sin ax, \\ g(x) = \cos ax, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy cặp hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.
Kết luận:

$$\begin{cases} f \equiv 0, \\ g \equiv -1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} f \equiv 0, \\ g \equiv 1, \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} f(x) = \sin ax, \\ g(x) = \cos ax, \end{cases} \text{với } a \neq 0.$$

Chương 3

Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác ngược và một số bài tập

3.1. Phương trình hàm sinh bởi hàm arcsin

Bài toán 3.1. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\big[-1,1\big]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f(y)=f\Big(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\Big),\ \ \forall x,y\in[-1,1]. \tag{3.1}$$

Giải. Đặt

$$x=\sin u,\ \ y=\sin v,\ \ u,v\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big],$$

thì

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin(u+v)$$

Khi đó có thể viết (3.1) dưới dạng

$$f(\sin u)+f(\sin v)=f(\sin(u+v))$$

hay

$$g(u+v)=g(u)+g(v),\ \ \forall u,v\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big],$$

trong đó $g(u)=f(\sin u)$ lặp lại trình tự cách giải phương trình Cauchy cho trường hợp này, ta được

$$g(u)=au,\ \ \forall u\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]$$

Suy ra

$$f(x)=a\arcsin x, x\in[-1,1], a\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định theo (3.2) thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Kết luận: $f(x)=a\arcsin x, a\in\mathbb{R}$ tùy ý.

3.2. Phương trình hàm sinh bởi hàm arccosin

Bài toán 3.2. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\big[-1,1\big]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f(y)=f\Big(xy-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}\Big),\ \ \forall x,y\in[-1,1]. \tag{3.3}$$

Giải. Đặt

$$x=\cos u,\ \ y=\cos v,\ \ u,v\in\big[0,\pi\big],$$

thì

$$xy-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}=\cos(u+v).$$

Khi đó có thể viết (3.3) dưới dạng

$$f(\cos u)+f(\cos v)=f(\cos(u+v))$$

hay

$$g(u+v)=g(u)+g(v),\ \ \forall u,v\in\big[0,\pi\big],$$

trong đó $g(u)=f(\cos u)$ lặp lại trình tự cách giải phương trình Cauchy cho trường hợp này, ta được

$$g(u)=au,\ \ \forall u\in\big[0,\pi\big],a\in\mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(x)=a\arccos x, x\in[-1,1],a\in\mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định theo (3.4) thỏa mãn các điều kiện của bài toán.
Kết luận: $f(x)=a\arccos x, a\in\mathbb{R}$ tùy ý , $\forall x\in[-1,1]$.

3.3. Phương trình hàm sinh bởi hàm arctang

Bài toán 3.3. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x)+f(y)=f\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},xy\neq 1. \tag{3.5}$$

Giải. Đặt $x=\tan u,\ \ y=\tan v,\ \ u,v\in\Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)$. Do $xy\neq 1$ nên ta có

$$\frac{x+y}{1-xy}=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}=\tan(u+v).$$

Vậy
$$-\frac{\pi}{2} < u + v < \frac{\pi}{2}.$$
Khi đó (3.5) có thể viết dưới dạng
$$f(\tan(u+v)) = f(\tan u) + f(\tan v),\ \ u, v \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big), u+v \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$
Do đó
$$g(u+v) = g(u) + g(v), \tag{3.6}$$
trong đó
$$g(u) = f(\tan u), u \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$
Lặp lại lập luận và trình tự giải của phương trình Cauchy đối với (3.6) ta được
a) $g(0) = 0$ và $g(u)$ là hàm lẻ
b) $g(u_0) = 2g\big(\frac{u_0}{2}\big))$ với $0 \neq u_0 \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$
c) Bằng phương pháp quy nạp, ta có
$$g\Big(\frac{mu_0}{2^n}\Big) = \frac{m}{2^n} g(u_0),$$
trong đó
$$n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{2^n} x_0 \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$
Từ đó suy ra
$$g(u) = au, a \in \mathbb{R}, u \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$
Vậy
$$f(x) = a\text{arctan } x, a \in R,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Thử lại ta thấy hàm $f(x) = \text{arctan } x$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.
Kết luận: $f(x) = a\text{arctan } x,\ \ a \in \mathbb{R}$ tùy ý .

3.4. Một số dạng phương trình hàm khác

Bài toán 3.4. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện
$$f(x) + f(y) = f\Big(\frac{xy-1}{x+y}\Big),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} :\ \ x + y \neq 0. \tag{3.7}$$

Giải. Đặt
$$x = \cot u,\ \ y = \cot v,\ \ u, v \in (0, \pi)$$

thì

$$\frac{xy-1}{x+y} = \cot(u+v).$$

Khi đó có thể viết (3.7) dưới dạng

$$f(\cot u) + f(\cot v) = f(\cot(u+v)),$$

hay

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \ \ \forall u, v \in (0, \pi),$$

trong đó $g(u) = f(\cot u)$.
Từ tính liên tục của hàm f và tính liên tục của hàm cot trên $(0, \pi)$ ta có hàm g cũng là hàm liên tục. Suy ra phương trình hàm $g(u+v) = g(u) + g(v)$ là phương trình hàm Cauchy. Vậy nên

$$g(u) = au, \ \ a \in \mathbb{R}, \ \ \forall u \in (0, \pi).$$

Suy ra

$$f(x) = a\text{arccot } x, \ \ a \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = a\text{arccot } x$ thỏa mãn các điều kiện của bài ra.
Kết luận $f(x) = a\text{arccot } x, \ \ a \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Bài toán 3.5. Xác định hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - f(y) = f(\frac{x-y}{1+xy}), \ \ x, y \in \mathbb{R}, \ \ |xy| < 1. \tag{3.8}$$

Giải. Đặt

$$x = \tan u, \ \ y = \tan v, \ \ u, v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Khi đó

$$\frac{x-y}{1+xy} = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \tan(u-v).$$

Khi đó (3.8) trở thành

$$f(\tan u) - f(\tan u) = f(\tan(u-v)).$$

Hay $g(u) - g(v) = g(u-v)$ trong đó $f(\tan u) = g(u), \ \ u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Từ tính liên tục của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và tính liên tục của hàm $\tan u$ trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

suy ra hàm $g(x)$ liên tục trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, thỏa mãn $g(u) - g(v) = g(u - v)$.
Suy ra, hàm $g(u) = au + b,\ \ a, b = const \in \mathbb{R}$ (theo phương trình hàm Cauchy)

$$\Rightarrow f(\tan u) = g(u) = au + b \Rightarrow f(x) = a\text{arctan } x + b,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = a\text{arctan } x$ $(b = 0)$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.
Kết luận $f(x) = a\text{arctan } x,\ \ a$tùy ý $\in \mathbb{R}$.

3.5. Một số bài tập

Xuất phát từ các công thức biến đổi lượng giác cơ bản được trình bày trong sách giáo khoa môn toán lớp 11, nếu ta thay các hàm cos, sin bằng các ẩn hàm f, g thì ta được các phương trình hàm mà công thức ban đầu là chính là gợi ý về nghiệm của bài toán. Trong chương 2, chúng tôi đã trình bày các bài toán khi ta thay toàn bộ các hàm sin, cos bằng các ẩn hàm. Ở phần này, khi lần lượt thay thế các hàm sin, cos trong các công thức biến đổi, chúng tôi đã tạo ra các bài toán mới với lời giải khá ngắn gọn và thú vị. Cách tạo ra các bài toán này là một gợi ý để ra các đề thi.

Từ công thức biến đổi

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2\cos x \cos y$$

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2\sin x \sin y$$

bằng việc thay hàm cos bên vế phải bằng các ẩn hàm f, g ta có được các bài toán.

Bài tập 3.1. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y) + f(x - y) = 2\cos x \cos y,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Giải. Thay $y = 0$ vào (3.9), ta có

$$2f(x) = 2\cos x \Leftrightarrow f(x) = \cos x.$$

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = \cos x$ thỏa mãn đề bài.

Kết luận: $f(x) = \cos x$.

Bài tập 3.2. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\sin x \sin y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Giải. Cho $y = 0$ thay vào (3.10), ta có

$$2f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay lại phương trình (3.10) ta thấy không thỏa mãn.

Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài tập 3.3. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + g(x-y) = 2\sin x \sin y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Giải. Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
&f(x+y) + g(x-y) = 2\sin x \sin y\\
\Leftrightarrow &f(x+y) + g(x-y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)\\
\Leftrightarrow &f(x+y) + \cos(x+y) = \cos(x-y) - g(x-y)\\
\Leftrightarrow &f(u) + \cos u = \cos v - g(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

trong đó $u = x + y$ và $v = x - y$.

Suy ra $f(x) = -\cos x + c$ và $g(x) = \cos x - c$, trong đó $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta có cặp hàm $f(x) = -\cos x + c$ và $g(x) = \cos x - c$ thỏa mãn đề bài.

Kết luận: $f(x) = -\cos x + c$ và $g(x) = \cos x - c$, trong đó $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.4. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) - f(x-y) = 2\sin x \sin y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Giải. Theo (3.12), ta có

$$\begin{aligned}
&f(x+y) - f(x-y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)\\
\Leftrightarrow &f(x+y) + \cos(x+y) = f(x-y) + \cos(x-y)\\
\Leftrightarrow &f(u) + \cos(u) = f(v) + \cos v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

trong đó $u = x + y; \;\; v = u - v$.

Suy ra $f(x) = -\cos x + c$ trong đó $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = -\cos x + c$ thỏa mãn điều kiện của bài toán

Kết luận: $f(x) = -\cos x + c$ trong đó $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.5. Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\cos 2x f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

Giải. Đặt $g(2t) = f(t)$ do hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên g cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (3.13) trở thành

$$\begin{aligned} g(2(x+y)) + g(2(x-y)) =& 2\cos 2x g(2y) \\ \Leftrightarrow g(2x+2y) + g(2x-2y) =& 2\cos 2x g(2y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

hay

$$g(u+v) + g(u-v) = 2\cos u g(v), \ \ \forall u, v \in \mathbb{R},$$

suy ra

$$g(x+y) + g(x-y) = 2\cos x g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Cho $y = 0$ thay vào (3.14) ta được

$$\begin{aligned} g(x) + g(x) = 2\cos x g(0) \\ \Leftrightarrow f(x) = \cos x g(0) \end{aligned}$$

Nếu $g(0) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Kiểm tra ta thấy hàm $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Nếu $g(0) \neq 0$ đặt $g(0) = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$, khi đó $g(x) = \alpha \cos x$
$\Rightarrow f(x) = \alpha \cos(2x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = \alpha cos(2x)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết luận:

$$f(x) = \alpha \cos(2x) \text{ trong đó } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét 3.1. Từ cách giải của Bài tập 3.5 ta có thể giải được bài toán. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\cos kx f(y), \ \ k \in \mathbb{N}^*, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ công thức

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$$

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$

Nếu ta thay hàm sin ở vế phải hoặc vế trái bằng các ẩn hàm f, g tương ứng thì được các bài toán.

Bài tập 3.6. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)+f(x-y)=2\cos x\sin y,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Giải. Cho $y = 0$ thay vào (3.15) ta được

$$2f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm $f \equiv 0$ không thỏa mãn đề bài.

Kết luận: Bài toán vô nghiệm.

Bài tập 3.7. Tìm hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)+g(x-y)=2\cos x\sin y,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Giải. Từ (3.16), ta có

$$\begin{aligned}
&f(x+y)+g(x+y)=2\cos x\sin y\\
\Leftrightarrow &f(x+y)+g(x+y)=\sin(x+y)-\sin(x-y)\\
\Leftrightarrow &f(x+y)-\sin(x+y)=-g(x-y)-\sin(x-y)\\
\Leftrightarrow &f(u)-\sin u=-g(v)-\sin v,\ \ \forall u,v\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

trong đó $u = x + y$ và $v = x - y$

Suy ra $f(x) = \sin x + c$ và $g(x) = -\sin x - c$ trong đó $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy $f(x) = \sin x + c$ và $g(x) = -\sin x - c$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Kết luận: $f(x) = \sin x + c$; $g(x) = -\sin x - c$ với $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.8. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)+f(x-y)=2\sin x\cos y,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Giải. Cho $x = y$ thay vào (3.17) ta được

$$f(2x)+f(0)=2\sin x\cos x=\sin 2x. \tag{3.18}$$

Cho $x = 0$ thay (3.18) ta được

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x.$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = \sin x$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Kết luận: $f(x) = \sin x$.

Bài tập 3.9. Tìm hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + g(x-y) = 2\sin x \cos y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Giải. Cho $y = 0$ thay vào (3.19) ta được

$$f(x) + g(x) = 2\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Thay y bởi $-y$ vào (3.19) ta có

$$\begin{aligned}
&f(x-y) + g(x+y) = 2\sin x \cos(-y) = 2\sin x \cos y \\
\Rightarrow &f(x+y) + g(x-y) = f(x-y) + g(x+y) \\
\Rightarrow &f(x+y) - g(x+y) = f(x-y) - g(x-y) \\
\Rightarrow &f(u) - g(u) = f(v) - g(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

trong đó $u = x + y$, $v = x - y$. Suy ra

$$f(u) - g(u) = f(v) - g(v) = c, \quad c = \text{const} \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Từ (3.20) và (3.21) ta có $\begin{cases} f(x) &= \sin x + \dfrac{c}{2} \\ g(x) &= \sin x - \dfrac{c}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy $f(x) = \sin x + \dfrac{c}{2}$, $g(x) = \sin x - \dfrac{c}{2}$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Kết luận $f(x) = \sin x + \dfrac{c}{2}$, $g(x) = \sin x - \dfrac{c}{2}$ với $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.10. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Giải. Cho $x = 0$ thay vào (3.22) ta có

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)\cos y = 2d\cos y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Đổi vai trò của x và y cho nhau trong (3.22) ta có

$$f(y+x)+f(y-x)=2f(y)\cos x. \tag{3.23}$$

Cộng hai vế của (3.22) và (3.23) ta được

$$\begin{aligned} & f(x+y)+f(x-y)+f(y+x)+f(y-x)=2f(x)\cos y+2f(y)\cos x \\ \Leftrightarrow & 2f(x+y)+f(x-y)+f(y-x)=2f(x)\cos y+2f(y)\cos x \end{aligned} \tag{3.24}$$

mà $f(y)+f(-y)=2d\cos y,\ \ \forall y\in\mathbb{R}$, nên (3.24) trở thành

$$\begin{aligned} & 2f(x+y)+2d\cos(x-y)=2f(x)\cos y+2f(y)\cos x \\ \Leftrightarrow & f(x+y)+d\cos(x-y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Đặt $g(x)=f(x)-d\cos x$ khi đó (3.25) trở thành

$$\begin{aligned} & g(x+y)+d\cos(x+y)+d\cos(x-y)=[g(x)+d\cos x]\cos y \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +[g(y)+d\cos y]\cos x \\ \Leftrightarrow & g(x+y)+2d\cos(x+y)=g(x)\cos y+g(y)\cos x+2d\cos(x+y) \\ \Leftrightarrow & g(x+y)=g(x)\cos y+g(y)\cos x,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} g(x+y+z) &= [g(x)\cos y+g(y)\cos x]\cos z+g(z)\cos(x+y) \\ &= g(x)\cos(y+z)+[g(y)\cos z+g(z)\cos y]\cos x. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & [g(x)\cos y+g(y)\cos x]\cos z+g(z)\cos(x+y) \\ & = g(x)\cos(y+z)+[g(y)\cos z+g(z)\cos y]\cos x, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ g(z)\sin x\sin y=g(x)\sin y\sin x,\ \ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Do đó khi chọn các giá trị y,z sao cho $\sin y\neq 0, \sin z\neq 0$ suy ra

$$g(x)=b\sin x,\quad \text{trong đó } b=\text{const }\ \in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $f(x)=d\cos x+b\sin x$ với $b,d=\text{const }\ \in\mathbb{R}$.
Thử lại ta thấy $f(x)=d\cos x+b\sin x$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Kết luận: $f(x)=d\cos x+b\sin x$ với $b,d=\text{const }\ \in\mathbb{R}$.

Bài tập 3.11. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-y) - f(x+y) = 2g(x)\sin y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Giải. Cho $x = 0$ thay vào (3.26) ta có,

$$f(-y) - f(y) = 2g(0)\sin y = 2d\sin y. \tag{3.27}$$

Đổi vai trò của x và y trong (3.26) ta được

$$f(x-y) - f(y+x) = 2g(y)\sin x. \tag{3.28}$$

Trừ vế với vế của (3.26) cho (3.28) ta được

$$f(x-y) - f(y-x) = 2g(x)\sin y - 2g(y)\sin x, \tag{3.29}$$

mà theo (3.27) ta có $f(x-y) - f(y-x) = -2d\sin(x-y)$ khi đó (3.29) trở thành

$$\begin{aligned} &-2d\sin(x-y) = 2g(x)\sin y - 2g(y)\sin x \\ \Leftrightarrow &[g(x) - d\cos x]\sin y = [g(y) - d\cos y]\sin x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chọn y_0 sao cho $\sin y_0 \neq 0$ khi đó

$$g(x) - d\cos x = \frac{g(y_0) - d\cos y_0}{\sin y_0}\sin x,$$

$$\Rightarrow g(x) = d\cos x + a\sin x,$$

trong đó $d, a = \text{const} \in \mathbb{R}$.
Thế $g(x) = d\cos x + a\sin x$ vào (3.26) ta có,

$$\begin{aligned} f(x-y) - f(x+y) &= 2(d\cos x + a\sin x)\sin y \\ &= 2d\cos x\sin y + 2a\sin x\sin y \\ &= d[\sin(x+y) - \sin(x-y)] + a[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+y) + d\sin(x+y) - a\cos(x+y) = f(x-y) + d\sin(x-y) - a\cos(x-y),$$

$$\Rightarrow f(u) + d\sin u - a\cos u = f(v) + d\sin v - a\cos v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},$$

trong đó $u = x + y$, $v = x - y$
Suy ra $f(x) = a\cos x - d\sin x + c$.
Thử lại ta thấy hàm $f(x) = a\cos x - d\sin x + c$ và $g(x) = d\cos x + a\sin x$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Kết luận: $\begin{cases} f(x) = a\cos x - d\sin x + c \\ g(x) = d\cos x + a\sin x \end{cases}$ trong đó $a, d, c = const \in \mathbb{R}$.

Từ công thức biến đổi

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nếu ta thay hàm sin, cos bằng các ẩn hàm f, g tương ứng ta tạo ra được các bài toán

Bài tập 3.12. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\sin(x+y) = f(x)\sin y + f(y)\sin x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Giải. Cho $y = \frac{\pi}{2}$ thay vào (3.30) ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x) + f(\frac{\pi}{2})\sin x,$$

$$\Rightarrow \cos x = f(x) + f(\frac{\pi}{2})\sin x.$$

Thay $x = \frac{\pi}{2}$ vào biểu thức trên, ta có

$$0 = 2f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Suy ra $f(x) = \cos x$.
Thử lại ta thấy hàm $f(x) = \cos x$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.
Kết luận: $f(x) = \cos x$.

Bài tập 3.13. Tìm hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\sin(x+y) = f(x)\sin y + g(y)\sin x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Giải. Thay $y = \frac{\pi}{2}$ vào (3.31) ta được

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x) + g\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos = f(x) + g\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x.$$

Suy ra

$$f(x) = \cos x + b\sin x, \text{ trong đó } b = \text{const } \in \mathbb{R}.$$

Thay $f(x) = \cos x + b\sin x$ vào (3.31) ta có

$$\sin(x+y) = [\cos x + b\sin x]\sin y + g(y)\sin x$$
$$\Rightarrow \sin x\cos y = b\sin x\sin y + g(y)\sin x$$
$$\Rightarrow g(y)\sin x = [\cos y - b\sin y]\sin x,\quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chọn x_0 sao cho $\sin x_0 \neq 0$ khi đó

$$g(y) = \cos y - b\sin y \text{ hay } g(x) = \cos x - b\sin x.$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = \cos x + b\sin x$ và $g(x) = \cos x - b\sin x$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Kết luận: $\begin{cases} f(x) = \cos x + b\sin x \\ g(x) = \cos x - b\sin x \end{cases}$ trong đó $b = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3.14. Tìm hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = g(x)\sin y + g(y)\sin x,\quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Giải. Thay $y = 0$ vào (3.32) ta có

$$f(x) = g(0)\sin x = a\sin x.$$

Thay $y = \dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(\frac{\pi}{2})\sin x + g(x)$$
$$\Rightarrow a\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(\frac{\pi}{2})\sin x + g(x)$$
$$\Rightarrow a\cos x = g(\frac{\pi}{2})\sin x + g(x)$$
$$\Rightarrow g(x) = a\cos x - g(\frac{\pi}{2})\sin x.$$

Cho $x = \dfrac{\pi}{2}$ thay vào biểu thức trên ta có

$$g(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow g(x) = a\cos x.$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = a\sin x$ và $g(x) = a\cos x$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Kết luận: $\begin{cases} f(x) = a\sin x \\ g(x) = a\cos x \end{cases}$ trong đó $a = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Từ công thức biến đổi

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nếu ta thay hàm sin ở vế trái bằng ẩn hàm $f(x)$ tưng ứng ta được các bài toán.

Bài tập 3.15. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)f(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

Giải. Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} f(x+y)f(x-y) &= \sin^2 x - \sin^2 y \\ &= \sin(x+y)\sin(x-y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(u)f(v) = \sin u \sin v, \ \ \forall u, v \in \mathbb{R},$$

trong đó $u = x + y$; $v = x - y$.
Nếu $f \equiv 0$ thì không thỏa mãn đề bài nên $f \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại v_0 sao cho $f(v_0) \neq 0$. Thay $v = v_0$ ta có

$$f(u) = \frac{\sin v_0}{f(v_0)} \sin u = k \sin u, \ \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Thay $f(x) = k \sin x$ vào biểu thức trên ta được $k^2 = 1$.
Thử lại ta thấy hàm $f(x) = k \sin x$, trong đó $k^2 = 1$ thỏa mãn yều cầu bài toán.
Kết luận: $f(x) = k \sin x$ với $k^2 = 1$.

Bài tập 3.16. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - \sin^2 y, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

Giải. Cho $x = y$ thay vào (3.34) ta được

$$f(2x)f(0) = f(x)^2 - \sin^2 x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(0) = 0$ thì $f(x)^2 = \sin^2 x \Rightarrow f(x) = \pm \sin x$.
Thử lại dễ thấy hàm $f(x) = \sin x$, $f(x) = -\sin x$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Nếu $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \forall x \in A, \\ -\sin x, & \forall x \in B, \end{cases}$ với A, B thỏa mãn $A \neq B, \ \ A \cap B = \{k\pi | \ k \in \mathbb{Z}\}$

Khi đó nếu $f(x)$ là nghiệm của bài toán thì hai tập A, B phải thỏa mãn

$$\begin{cases} x+y \in A \Leftrightarrow x-y \in A \\ x+y \in B \Leftrightarrow x-y \in B \end{cases}$$

Điều này vô lý do $f(x)$ là hàm liên tục vì vậy $f(x)$ xác định như trên không là nghiệm của bài toán.

Nếu $f(0) \neq 0$ thì đặt $b = f(0)$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(x+y)f(x-y) &= f(2x)f(0) + \sin^2 x - \sin^2 y \\ &= bf(2x) + \sin(x+y)\sin(x-y). \end{aligned}$$

Đặt $u = x + y,\;\; v = x - y \Rightarrow 2x = u + v$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} &f(u)f(v) = bf(u+v) + \sin u \sin v \\ \Rightarrow &bf(u+v) = f(u)f(v) - \sin u \sin v, \;\; \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Khi đó với $\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} bf(u+v+w) &= f(u+v)f(w) - \sin(u+v)\sin w \\ &= \frac{1}{b}\Big[f(u)f(v) - \sin u \sin v\Big]f(w) \\ &- (\sin u \cos v + \cos u \sin v)\sin w \\ &= \frac{1}{b}f(u)f(v)f(w) - \frac{1}{b}f(w)\sin u \sin v \\ &- \sin u \cos v \sin w - \cos u \sin v \sin w. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} bf(u+v+w) &= f(u)f(v+w) - \sin u \sin(v+w) \\ &= \frac{1}{b}f(u)\Big[f(v)f(w) - \sin v \sin w\Big] - \sin u(\sin v \cos w + \cos v \sin w) \\ &= \frac{1}{b}f(u)f(v)f(w) - \frac{1}{b}f(u)\sin v \sin w - \sin u \sin v \cos w - \sin u \cos v \sin w. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b}f(w)\sin u \sin v + \cos u \sin v \sin w \\ &= \frac{1}{b}f(u)\sin v \sin w + \sin u \sin v \cos w, \;\; \forall u, v, w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chọn v_0 sao cho $\sin v_0 \neq 0$, khi đó

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b}f(w)\sin u\sin v_0+\cos u\sin v_0\sin w\\&=\frac{1}{b}f(u)\sin v_0\sin w+\sin u\sin v_0\cos w,\quad \forall u,w\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}f(w)\sin u+\cos u\sin w=\frac{1}{b}f(u)\sin w+\sin u\cos w,\quad \forall u,w\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{b}f(w)-\cos w\right]\sin u=\left[\frac{1}{b}f(u)-\cos u\right]\sin w.$$

Nếu $\frac{1}{b}f(u)-\cos u=0,\ \forall u\in R\Rightarrow f(u)=b\cos u$

hay $f(x)=b\cos(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ thay vào (3.34) ta có

$$\begin{aligned}&b\cos(x+y)b\cos(x-y)=b^2\cos^2x-\sin^2y\\\Leftrightarrow&b^2(\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y)=b^2\cos^2x-\sin^2y\\\Leftrightarrow&b^2\big[\cos^2x\cos^2y-(1-\cos^2x)(1-\cos^2y)\big]=b^2\cos^2x-\sin^2y\\\Leftrightarrow&b^2(\cos^2x-\sin^2y)=b^2\cos^2x-\sin^2y\\\Leftrightarrow&b^2=1.\end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $f(x)=\pm\cos x$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Nếu tồn tại w_0 sao cho $\frac{1}{b}f(w_0)-\cos w_0\neq 0$. Khi đó chọn w_1 sao cho $\sin w_1\neq 0$ thì ta được

$$\frac{1}{b}f(u)-\cos u=\frac{\frac{1}{b}f(w_1)-\cos w_1}{\sin w_1}\sin u,$$

suy ra

$$\frac{1}{b}f(u)-\cos u=d\sin u\Rightarrow f(u)=b\cos u+bd\sin u.$$

Hay

$$f(x)=b\cos x+c\sin x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay lại (3.34) ta có

$$\begin{aligned}&\big[b\cos(x+y)+c\sin(x-y)\big]\big[b\cos(x-y)+c\sin(x-y)\big]\\&=\big[b\cos x+c\sin x\big]^2-\sin^2y\\&\Leftrightarrow\frac{b^2}{2}(\cos 2x+\cos 2y)+bc\sin 2x+\frac{b^2}{2}(\cos 2x+\cos 2y)\end{aligned}$$

$$= b^2\frac{1+\cos 2x}{2} + bc\sin 2x + c^2\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2y}{2}$$
$$\Leftrightarrow (b^2+c^2-1)\cos 2y + (b^2+c^2-1) = 0,\ \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow b^2+c^2 = 1.$$

Suy ra $f(x) = b\cos x + c\sin x$ trong đó $b^2+c^2 = 1,\ \ b, c \in \mathbb{R}$.
Thử lại ta thấy hàm $f(x) = b\cos x + c\sin x$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Nếu $c = 0$ thì $f(x) = \pm cosx$ trùng với trường hợp trên.

Kết luận:

$$f(x) = a\sin x,\ \text{trong đó } a^2 = 1,$$

hoặc

$$f(x) = b\cos x + c\sin x,\ \text{trong đó } b^2+c^2 = 1.$$

Bài tập 3.17. Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = a\ \ ;\ \ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = b \quad (a, b \text{ cho trước })\\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.35}$$

Giải.

Cho $y = \dfrac{\pi}{2};\ \ x \in \mathbb{R}$ thay vào (3.35) ta được:

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{3.36}$$

Cho $x = 0;\ \ y \in \mathbb{R}$ thay vào (3.35) ta được:

$$f(y) + f(-y) = 2a\cos y. \tag{3.37}$$

Cho $x = \dfrac{\pi}{2};\ \ y \in \mathbb{R}$ thay vào (3.35) ta được:

$$f\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = 2b\cos y. \tag{3.38}$$

Từ (3.36) ; (3.37) ; (3.38) ta có $\begin{cases} f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\\ f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = 2a\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = 2b\cos x \end{cases}$

Giải hệ trên ta được

$$f(x) = a\cos x + b\sin x$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = a\cos x + b\sin x$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Kết luận: $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Bài tập 3.18. Tìm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y)=f(x+y)+\sin x\sin y,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Giải.

Dễ thấy $f(x)=\cos x$ là một hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cho $x=y=0$ thay vào (3.39) ta được $[f(0)]^2=f(0)$ suy ra $f(0)=0$ hoặc $f(0)=1$.

Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $f(0)=0$

Cho $y=0,\ x\in\mathbb{R}$ thay vào (3.39) ta được $f(x)=-f(0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta có: $\sin x\sin y=0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, (vô lý). Vậy $f\equiv 0$ không là nghiệm của bài toán.

Trường hợp 2: $f(0)=1$

Cho $x=-y$ thay vào (3.39) ta được

$$f(x)f(-x)=1+(-\sin^2x)=\cos^2x,\ \text{suy ra}\ f(x)f(-x)=\cos^2x.$$

Cho $x=\dfrac{\pi}{2}$ khi đó $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ hoặc $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Nếu $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ thì cho $x=\dfrac{\pi}{2},\ \ y\in\mathbb{R}$ thay vào (3.39) ta có

$$f\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\sin y=0\ \text{suy ra}\ f(y)=\cos y,\ \ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy $f(x)=\cos x$ thảo mãn đề bài.

Nếu $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ tương tự như trên ta có $f(y)=\cos y,\ \ \forall y\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=\cos x$.

Bài tập 3.19. Tìm $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)-f(y)=\cos(x+y)g(x-y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{3.40}$$

Giải.

Cho $x=\dfrac{\pi}{2}-y;\ \ y\in\mathbb{R}$ thay vào (3.40) được

$$f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-f(y)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=f(y). \tag{3.41}$$

Cho $x=\dfrac{\pi}{2}+y;\ \ y\in\mathbb{R}$ thay vào (3.40) được

$$f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-f(y)=-\sin 2yg\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.42}$$

Từ (3.41) và (3.42) ta có,

$$f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=-\sin 2yg\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.43}$$

Mặt khác theo (3.40) ta có,

$$f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=-g(2y). \tag{3.44}$$

Từ (3.43) và (3.44) suy ra, $g(2y)=\sin 2yg\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \ \forall y\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g(2x)=a\sin 2x\Rightarrow g(x)=a\sin x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \text{ với } a=g\left(\frac{\pi}{2}\right)\ (\text{ cho trước }).$$

Cho $y=0;\ \ x\in\mathbb{R}$ thay vào (3.40) ta được

$$f(x)-f(0)=\cos xg(x)\Rightarrow f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x+b,\ \ \forall x\in\mathbb{R},\quad \text{trong đó } (b=f(0))$$

Thử lại cặp hàm $\begin{cases} f(x)=\dfrac{a}{2}\sin 2x+b,\\ g(x)=a\sin x,\end{cases}$ với a,b là các hằng số cho trước thỏa mãn bài toán.

Kết luận: Nghiệm của bài toán $\begin{cases} f(x)=\dfrac{a}{2}\sin 2x+b\\ g(x)=a\sin x\end{cases}$ $a,b=\text{const}\ \in\mathbb{R}$.

Bài tập 3.20. Cho dãy số u_n và v_n được xác định như sau

$$u_1=a>0, v_1=b>0$$

$$u_n=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2},\ \ v_n=\sqrt{u_nv_{n-1}},\quad \text{khi } n\geq 2.$$

Tìm u_n và v_n. ***Giải.***

Trường hợp 1: Nếu $a=b$ thì rõ ràng

$$u_n=v_n=a.$$

Trường hợp 2: Nếu $0<a<b$ thì ta có $0<\dfrac{a}{b}<1$.

Đặt

$$\frac{a}{b}=\cos\alpha,\ \ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Suy ra $a=b\cos\alpha$.

Ta có

$$u_1=a=b\cos\alpha,\ \ v_1=b,$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = b\cos^2\frac{\alpha}{2}, \;\; v_2 = \sqrt{u_2v_1} = b\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$u_3 = \frac{u_2 + v_2}{2} = b\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}, \;\; v_2 = \sqrt{u_3v_2} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$u_n = b\frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\cos^2\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

$$v_n = b\sqrt{u_nv_{n-1}} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Mà $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nên ta có biến đổi sau đây.

Do $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}} \neq 0$, do đó

$$\begin{aligned}
u_n =& b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\cos^2\frac{\alpha}{2^{n-1}} \\
=& b\frac{2^n\sin^2\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}{2^n\sin^2\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\cos^2\frac{\alpha}{2^{n-1}} \\
=& \frac{b}{2^n}\frac{2\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}} \\
=& \frac{b}{2^{n-1}}\sin\alpha\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
v_n =& b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} \\
=& b\frac{2^{n-1}\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}{2^{n-1}\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} \\
=& \frac{b}{2^{n-1}}\frac{\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Vậy trong trường hợp này

$$u_n = \frac{b}{2^n}\sin\alpha\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}}, \;\; v_n = \frac{b}{2^{n-1}}\frac{\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}}.$$

Trường hợp 3: Nếu $a > b > 0$ thì $\frac{a}{b} > 1$. Đặt $\frac{a}{b} = \cosh\alpha$

Do

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} > 1, \;\; \sinh = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2},$$

$$1+\cosh\alpha = 2\cosh\frac{\alpha}{2},\quad \sinh\alpha = 2\sinh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}.$$

Do đó tương tự như trên, ta có

$$u_n = b\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cosh^2\frac{\alpha}{2^{n-1}},$$

$$v_n = b\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\cdots\cosh\frac{\alpha}{2^{n-1}},$$

hay

$$u_n = \frac{b}{2^n}\sinh\alpha\frac{2\sinh\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cosh\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\sinh^2\frac{\alpha}{2^{n-1}}} = \frac{b}{2^{n-1}}\frac{\sinh\alpha}{\tanh\frac{\alpha}{2^{n-1}}}$$

$$v_n = \frac{b}{2^{n-1}}\frac{\sinh\alpha}{\sinh\frac{\alpha}{2^{n-1}}}$$

Kết luận:

Nếu $a=b$ thì $u_n = v_n = a$.

Nếu $0<a<b$ thì

$$u_n = \frac{b}{2^n}\sin\alpha\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}},\quad v_n = \frac{b}{2^{n-1}}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}},$$

trong đó $\cos\alpha = \frac{a}{b},\ \ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Nếu $a>b>0$ thì

$$u_n = \frac{b}{2^{n-1}}\frac{\sinh\alpha}{\tanh\frac{\alpha}{2^{n-1}}},\quad v_n = \frac{b}{2^{n-1}}\frac{\sinh\alpha}{\sinh\frac{\alpha}{2^{n-1}}},$$

trong đó $\cosh\alpha = \frac{a}{b}$.

Dựa vào kết quả bài toán trên ta có thể sáng tác các đề bài toán tính giá trị của hàm số tại một số điểm hoặc các bài toán về dãy số như các bài toán sau đây.

Bài tập 3.21. Cho hàm số $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(1)=\sqrt{3},\quad g(1)=2$$

$$f(n) = \frac{f(n-1)+g(n-1)}{2},\quad g(n)=\sqrt{f(n)g(n-1)},\quad \forall n\geq 2.$$

Tìm f(2010) và g(2011).

Giải.
Ta có $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$, suy ra $f(1) = g(1)\cos\dfrac{\pi}{6}$. Khi đó ta có

$$f(1) = \sqrt{3} = 2\cos\frac{\pi}{6},\ \ v_1 = b,$$

$$f(2) = \frac{f(1)+g(1)}{2} = 2\cos^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2},\ \ g(2) = \sqrt{f(2)g(1)} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}$$

$$f(3) = \frac{f(2)+g(2)}{2} = 2\cos^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos^2\frac{\frac{\pi}{6}}{4},\ \ g(2) = \sqrt{f(3)g(2)} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{4}.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$f(n) = 2\frac{f(n-1)+g(n-1)}{2} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^2}\cdots\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-2}}\cos^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}$$

$$g(n) = 2\sqrt{f(n)g(n-1)} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^2}\cdots\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}.$$

Mà $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nên ta có biến đổi sau đây.

$$\begin{aligned}
f(n) =& 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^2}\cdots\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-2}}\cos^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}\\
=& 2\frac{2^n\sin^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}}{2^n\sin^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^2}\cdots\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-2}}\cos^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}\\
=& \frac{2}{2^n}\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}}{\sin^2\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}}\\
=& \frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\pi}{6}\cot\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
g(n) =& 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^2}\cdots\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}\\
=& 2\frac{2^{n-1}\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}}{2^{n-1}\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^2}\cdots\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}\\
=& \frac{2}{2^{n-1}}\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$f(2010) = \frac{1}{2^{2009}} \cot \frac{\frac{\pi}{6}}{2^{2009}},$$
$$g(2011) = \frac{1}{2^{2010} \sin \frac{\frac{\pi}{6}}{2^{2010}}}.$$

Bài tập 3.22. Cho dãy số u_n và v_n được xác định như sau

$$u_1 = e^4 + 1, v_1 = 2e^2$$

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \quad v_n = \sqrt{u_n v_{n-1}}, \quad \text{khi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Giải.

Ta có $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{e^4+1}{2e^2} = \dfrac{e^2 + e^{-2}}{2} = \cosh 2$. Do

$$\cosh\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} > 1, \ \ \sinh\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

$$1 + \cosh\alpha = 2\cosh\frac{\alpha}{2}, \ \ \sinh\alpha = 2\sinh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}.$$

Khi đó ta có

$$u_1 = e^4 + 1 = 2e^2\cosh 2, \ \ v_1 = 2e^2,$$
$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = 2e^2\cosh^2\frac{2}{2}, \ \ v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = 2e^2\cosh\frac{2}{2}$$
$$u_3 = \frac{u_2 + v_2}{2} = 2e^2\cosh^2\frac{2}{2}\cosh^2\frac{2}{4}, \ \ v_2 = \sqrt{u_3 v_2} = 2e^2\cosh\frac{2}{2}\cosh\frac{2}{4}.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$u_n = 2e^2\frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = 2e^2\cosh\frac{2}{2}\cosh\frac{2}{2^2}\cdots\cosh\frac{2}{2^{n-2}}\cosh^2\frac{2}{2^{n-1}}.$$

$$v_n = 2e^2\sqrt{u_n v_{n-1}} = 2e^2\cosh\frac{2}{2}\cosh\frac{2}{2^2}\cdots\cosh\frac{2}{2^{n-1}}.$$

Mà $\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$, nên ta có biến đổi sau đây.

$$\begin{aligned} u_n =& 2e^2\cosh\frac{2}{2}\cosh\frac{2}{2^2}\cdots\cosh\frac{2}{2^{n-2}}\cosh^2\frac{2}{2^{n-1}} \\ =& 2e^2\frac{2^n\sinh^2\dfrac{2}{2^{n-1}}}{2^n\sinh^2\dfrac{2}{2^{n-1}}}\cosh\frac{2}{2}\cosh\frac{2}{2^2}\cdots\cosh\frac{2}{2^{n-2}}\cosh^2\frac{2}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

$$=\frac{2e^2}{2^n}\frac{2\sinh 2\sinh\dfrac{2}{2^{n-1}}\cosh\dfrac{2}{2^{n-1}}}{\sinh^2\dfrac{2}{2^{n-1}}}$$

và

$$\begin{aligned}
v_n =&2e^2\cosh\frac{2}{2}\cosh\frac{2}{2^2}\cdots\cosh\frac{2}{2^{n-1}}\\
=&2e^2\frac{2^{n-1}\sinh\dfrac{2}{2^{n-1}}}{2^{n-1}\sinh\dfrac{2}{2^{n-1}}}\cosh\frac{2}{2}\cosh\frac{2}{2^2}\cdots\cosh\frac{2}{2^{n-1}}\\
=&\frac{2e^2}{2^{n-1}}\frac{\sinh 2}{\sinh\dfrac{2}{2^{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}u_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{2e^2 2\sinh 2\sinh\dfrac{2}{2^{n-1}}\cosh\dfrac{2}{2^{n-1}}}{2^n\sinh^2\dfrac{2}{2^{n-1}}}\\
&= 2e^2\sinh 2\lim_{n\to\infty}\frac{\cosh\dfrac{2}{2^{n-1}}}{2^{n-1}\sinh\dfrac{2}{2^{n-1}}}\\
&= e^2\sinh 2\lim_{n\to\infty}\left(\cosh\frac{2}{2^{n-1}}\frac{\frac{2}{2^{n-1}}}{\sinh\frac{2}{2^{n-1}}}\right) = e^2\sinh 2,
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}v_n = &\lim_{n\to\infty}\frac{2e^2\sinh 2}{2^{n-1}\sinh\frac{2}{2^{n-1}}}\\
=&e^2\sinh 2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{2^{n-1}}}{\sinh\frac{2}{2^{n-1}}} = e^2\sinh 2.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}v_n = e^2\sinh 2.$$

Kết luận

Phương trình hàm trong các lớp hàm lượng giác là lớp phương trình hàm quan trọng nhất trong tập hợp các hàm số tuần hoàn. Các kỹ thuật biến đổi cũng như phương pháp giải lớp phương trình hàm này lại hoàn toàn khác với cách giải các phương trình hàm truyền thống trong lớp hàm đại số. Nội dung của luận văn này nhằm tổng quan và khảo sát lớp các phương trình hàm trên.

Luận văn đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- Trình bày các dạng toán và lời giải các phương trình hàm xuất phát từ các đặc trưng hàm của các hàm lượng giác cơ bản, lượng giác hyperbolic và lượng giác ngược.

- Đưa ra lời giải các dạng phương trình hàm khác nhau (hàm cộng tính, nhân tính, liên tục,...) trong các lớp hàm lượng giác.

- Đề xuất một số các bài toán về phương trình hàm xuất phát từ các phép biến đổi lượng giác của các hàm $\sin x$ và $\cos x$.

- Đề xuất một số kỹ thuật sáng tác bài tập dựa trên các công thức biến đổi lượng giác cơ bản và đưa ra cách giải cho từng bài tập cụ thể.

- Hướng phát triển của đề tài là xem xét lớp hàm này trên các nhóm cộng Albel lấy giá trị trong tập số phức $\mathbb{C}$ và nghiên cứu các mối liên hệ giữa các lớp hàm sin, cosin, tang, cotang. Đây là những vấn đề mở chưa được đề cập đến trong luận văn. Tác giả hy vọng sẽ tiếp cận và giải quyết các vấn đề trên trong thời gian tới. Bên cạnh đó, tác giả cũng nhận thấy rằng một số vấn đề đặt ra trong nội dung của luận văn cần có thêm nhiều thời gian nghiên cứu và hoàn chỉnh.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Tuấn, 2008, *Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng* , NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến, 2009 *Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông,* NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Các bài toán nội suy và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu, 2003, *Phương trình hàm*, NXB Giáo Dục.

[5] *Tài liệu thao khảo trên mạng internet.*

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn
trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.
Luận văn đã được chỉnh sửa theo ý kiến của hội đồng chấm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2011
Xác nhận của người hướng dẫn khoa học

GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu