SÁNG TẠO PHƯƠNG TRÌNH HÀM
TỪ CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC

1 Bài toán "chìa khóa"

Những PTH được sáng tác từ hằng đẳng thức đều có ít nhất một hàm thoả là $f(x) = x$. Chính vì vậy, việc tìm ra những điểm chung giữa các bài PTH này là một điều quan trọng. Sau một thời gian xem xét kỹ, xin trình bày đến các bạn bài toán quen thuộc sau, có thể được áp dụng để giải rất nhiều bài PTH dạng này.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

trong các trường hợp sau

(a) $f(x)$ *là hàm liên tục;*

(b) $f(x)$ *là hàm đơn điệu;*

(c) $|f(x)| < M,\ \forall x \in [a,\ b]$;

(d) $f(x^2) = f^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x^3) = f^3(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Cho $x = y = 0$, ta được $f(0) = 2f(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Hơn nữa thay y bởi $-x$, ta được $f(0) = f(x) + f(-x)$, do đó $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, hay f là hàm lẻ.

Đặt $f(1) = c = \text{const}$. Khi đó ta có

$$c = f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right).$$

Như vậy $nf\left(\frac{1}{n}\right) = c,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Từ đây xét $x = \frac{m}{n}$ với $m,\ n \in \mathbb{N}$ và $(m,\ n) = 1$, ta có

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{m}{n}.$$

Như vậy $f(x) = cx$ với mọi số hữu tỉ dương x. Mặt khác do f là hàm lẻ và $f(0) = 0$ nên từ đây ta suy ra $f(x) = cx,\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

(a) *Nếu f là hàm liên tục:* Với mọi số vô tỉ x luôn tồn tại một dãy số hữu tỉ $\{x_n\}$ hội tụ về x. Như vậy, dựa vào tính liên tục của f, ta có

$$f(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x} (cx_n) = cx.$$

Vậy $f(x) = x$ là hàm thoả.

(b) *Nếu f là hàm đơn điệu (ở đây các tác giả trình bày phần chứng minh cho f là hàm đơn điệu tăng. Trường hợp f là hàm đơn điệu giảm, bạn đọc có thể chứng minh tương tự.):* Trước hết, vì $f(x)$ đồng biến nên $c = f(1) \geq f(0) = 0$. Giả sử tồn tại x_0 là số vô tỉ sao cho $f(x_0) > cx_0$. Do x_0 là số vô tỉ nên dễ dàng suy ra được $f(x_0)$ và cx_0 đều là số vô tỉ. Khi đó tồn tại số hữu tỉ y sao cho

$$f(x_0) > cy > cx_0.$$

Tuy nhiên khi đó $f(x_0) > f(y)$ nên $x_0 > y > x_0$ (vô lý).

Chứng minh tương tự trong trường hợp $f(x_0) < cx_0$, ta cũng có điều vô lý. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x_0) = cx_0$. Như vậy $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hàm thoả.

(c) *Nếu $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a, b]$:* Ta sẽ chứng minh $f(x)$ cũng bị chặn trên $[0, b-a]$. Thật vậy, với $x \in [0, b-a]$ thì $x + a \in [a, b]$. Khi đó ta có $f(x+a) = f(x) + f(a)$, suy ra $f(x) = f(x+a) - f(a)$, như vậy $-2M < f(x) < 2M$, suy ra

$$|f(x)| < 2M.$$

Đặt $b - a = d > 0$, vậy $f(x)$ bị chặn trên $[0, d]$. Đặt $c = \dfrac{f(d)}{d}$, $g(x) = f(x) - cx$. Suy ra

$$g(x+y) = f(x+y) - c(x+y) = f(x) - cx + f(y) - cy = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa $g(d) = f(d) - \dfrac{f(d)}{d} \cdot d = 0$. Vậy $g(x+d) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó g là hàm tuần hoàn. Hơn nữa, $g(x) = f(x) - cx$ nên g cũng bị chặn trên $[0, d]$, cộng thêm tính tuần hoàn chu kỳ d của g, ta suy ra g bị chặn trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại x_0 sao cho $g(x_0) \neq 0$. Khi đó, ta có với mọi số tự nhiên n thì $g(nx_0) = ng(x_0)$ suy ra

$$|g(nx_0)| = n|g(x_0)|.$$

Do $g(x_0) \neq 0$ nên nếu chọn n đủ lớn ta có thể cho $n|g(x_0)|$ lớn tuỳ ý, suy ra $|g(nx_0)|$ lớn tuỳ ý, trái với điều kiện bị chặn của g. Vậy $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(d) *Nếu $f(x^2) = f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:* Từ giả thiết ta suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi số thực không âm x. Khi đó, với mọi $x > y \geq 0$ thì

$$f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0.$$

Như vậy $f(x) \geq f(y)$, $f(x)$ là hàm không giảm. Áp dụng kết quả câu *(b)*, ta có

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào giả thiết ta tìm được $c = 0 \vee c = 1$. Như vậy, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là các hàm thoả.

(e) *Nếu $f(x^3) = f^3(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:* Ta có

$$[f(x) + f(y)]^3 = f^3(x+y) = f\left((x+y)^3\right) = f\left(x^3 + y^3 + 3xy(x+y)\right).$$

Từ đây suy ra $f^3(x) + f^3(y) + 3f(x)f(y)f(x+y) = f(x^3) + f(y^3) + 3f\left(xy(x+y)\right)$, hay

$$f(x)f(y)f(x+y) = f\left(xy(x+y)\right), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Do $f^3(x) = f(x^3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $f^3(1) = f(1)$, suy ra $f(1) = 0 \vee f(1) = 1 \vee f(1) = -1$. Ta xét hai trường hợp sau.

- *Trường hợp 1.* $f(1) = 0$. Khi đó ta có
$$f(x^2 + x) = f(x)f(1)f(x+1) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Do $x^2 + x$ nhận mọi giá trị không bé hơn $-\dfrac{1}{4}$ nên ta suy ra $f(x) = 0$, $\forall x \geq -\dfrac{1}{4}$. Mặt khác ta lại có $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy hàm này thoả.

- *Trường hợp 2.* $f(1) = 1 \vee f(1) = -1$. Khi đó, đặt $f(1) = c$, ta có
$$f(x^2 + x) = f(x)f(1)f(x+1),$$
hay tương đương
$$f(x^2) + f(x) = cf(x)\left[f(x) + c\right] = cf^2(x) + c^2 f(x) = cf^2(x) + f(x).$$
Như vậy $f(x^2) = cf^2(x)$. Tùy vào $c = 1$ hay $c = -1$, và làm tương tự câu *(d)* ta suy ra hai hàm tương ứng thỏa là $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy với giả thiết *(e)*, ta có 3 hàm số thỏa mãn là $f(x) = 0$, $f(x) = x$ và $f(x) = -x$. ☐

NHẬN XÉT. Điều kiện (d) và (e) của bổ đề có thể thay đổi thành $f^n(x) = f(x^n)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với n là số tự nhiên và $n > 1$. Ngoài ra, còn có một hướng tổng quát khác cho các điều kiện này như sau: *Cho đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn 1 thỏa $P\left(f(x)\right) = f\left(P(x)\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hãy tìm tất cả hàm f thỏa.*

2 Các bài toán áp dụng

Trước khi đi vào bàn luận các bài toán cụ thể, xin trình bày với các bạn một cách đơn giản để sáng tạo PTH từ hằng đẳng thức. Kể từ phần này ta quy ước $P(x,\ y)$ là phép thế một bộ $(x,\ y)$ vào phương trình hàm giả thiết của mỗi bài toán.

Chắc hẳn ai trong chúng ta cũng đều biết một vài hằng đẳng thức cơ bản, ví dụ như

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3, \quad \ldots$$

Việc thay x bằng $f(x)$ hay $f\left(f(x)\right)$, hoặc đặc biệt hơn là $f(x+y) - y$, ... đã cho ra đời rất nhiều bài toán hay và khó. Tất cả các bài toán mà tác giả giới thiệu trong bài viết này đều được đề xuất từ chính việc "đơn giản" như thế. Và chúng ta hãy cùng nhau thưởng thức sự thú vị của những bài PTH dạng này.

Việc sáng tạo PTH không chỉ dựa trên các hằng đẳng thức đã biết, đôi khi xuất phát từ những điều "khá hiển nhiên", nhưng không vì thế mà mất đi tính thú vị, ta sẽ đến với hai bài toán sau

Bài toán 2 (IMC 2010). *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(xy + x + y) = f(x) + f(y) + f(xy), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

LỜI GIẢI. Bài toán có một cách phát biểu đơn giản, nhưng không vì thế mà nó "dễ xơi". Ta cùng đến với cách giải sau đây.

Ta có $P(-x,\ x) : f(-x^2) = f(-x^2) + f(x) + f(-x)$, như vậy

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta suy ra f là hàm lẻ.

Để ý rằng $xy+x+y=(x+1)(y+1)-1$. Một cách tự nhiên, ta lựa chọn các số có nhiều hơn hai cách phân tích để từ đẳng thức này ta tìm các bộ $(x,\ y)$ phù hợp để thay vào phương trình, qua đó hy vọng có được các đánh giá dẫn tới kết quả bài toán. Cũng từ ý tưởng này, ta nghĩ đến việc chứng minh $f(3x)=3f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ như sau: Ta lần lượt có

- $P(x,\ 1): f(2x+1)=2f(x)+f(1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Như vậy, ta có $f(3)=3f(1)$ và
$$f(2x-1)=2f(x-1)+f(1),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
- $P(3,\ x^2-1): f(4x^2-1)=f(3(x^2-1))+f(3)+f(x^2-1).$ (1)
- Xét $P(1,\ 2x^2-1):$
$$\begin{aligned} f(4x^2-1) &= 2f(2x^2-1)+f(1)=2\left[2f(x^2-1)+f(1)\right]+f(1)\\ &= 4f(x^2-1)+3f(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra
$$f\left(3(x^2-1)\right)=3f(x^2-1).$$
Mặt khác, với mọi $x\geq 0$, luôn tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $x=a^2-1$. Như vậy $f(3x)=3f(x)$, $\forall x\geq 0$. Do f là hàm lẻ, nên suy ra
$$f(3x)=3f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
Bên cạnh đó ta cũng chứng minh được $f(x+1)=f(x)+f(1),\ \forall x\geq 0$. Thật vậy,

- Xét $P(3,\ -x^2-1)$, ta có
$$\begin{aligned} f(-4x^2-1) &= f\left(-3(x^2+1)\right)+f(3)+f(-x^2-1)\\ &= 4f(x^2+1)+3f(1),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$
- Xét $P(1,\ -2x^2-1):$
$$\begin{aligned} f(-4x^2-1) &= 2f(-2x^2-1)+f(1)=-2(2f(x^2)+f(1))+f(1)\\ &= -4f(x^2)-f(1),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $f(x^2+1)=f(x^2)+f(1)$. Vì $x^2\geq 0$ nên
$$f(x+1)=f(x)+f(1),\quad \forall x\geq 0. \tag{5}$$
Đặt $f(1)=c$. Dựa vào (5), dễ dàng có được $f(n)=nc,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Quy ước n là một số tự nhiên >0. Ta có $P(x,\ n): f((n+1)x+n)=f(x)+f(n)+f(nx)$, suy ra
$$f((n+1)x)=f(x)+f(nx),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
Từ điều trên, theo quy nạp, ta dễ dàng có $f(nx)=nf(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(n)=nc$ và
$$f(x)=cx,\quad \forall x\in\mathbb{Q}^+.$$
Vì f là hàm liên tục và lẻ nên ta có $f(x)=cx,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy đây là hàm thoả. □

NHẬN XÉT 1. Cách giải trên dựa vào việc để ý giả thiết tính liên tục của hàm f, ta cố gắng chứng minh $f(x)=cx$ với mọi x hữu tỉ, để từ đó suy ra hàm thoả. Tất cả những phép thế trên đều xuất phát từ ý tưởng đó.

NHẬN XÉT 2. PTH trên tương đương với PTH Cauchy, và đây là bài tập dành cho các bạn: *Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chứng minh rằng*

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$$

khi và chỉ khi $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi số thực x, y.

Trên thực tế, các tác giả đã tiếp cận bài toán đầu trước khi biết được kết quả trên.

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f_{2009}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó $f_n(x) = f\left(f\left(\ldots(f(x))\ldots\right)\right)$, n lần f.

LỜI GIẢI. Trước tiên ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(x_1) = f(x_2)$, ta có $f_{2009}(x_1) = f_{2009}(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$. Vậy f đơn ánh. Bây giờ ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vừa là hàm đơn ánh, vừa là hàm liên tục, thì f đơn điệu.*

Chứng minh. Vì f là đơn ánh, ta chứng minh nếu tồn tại $x < y$ sao cho $f(x) < f(y)$ thì f đồng biến (nếu với mọi $x < y$ mà $f(x) > f(y)$ thì hiển nhiên f nghịch biến). Giả sử f không đồng biến, tức là sẽ có ba trường hợp sau có thể xảy ra, tồn tại z sao cho

(1) $z < x < y$ và $f(z) > f(x)$, $f(x) < f(y)$;

(2) $x < y < z$ và $f(z) < f(y)$, $f(x) < f(y)$;

(3) $x < z < y$ và $[f(z) - f(x)]\,[f(z) - f(y)] > 0$.

Dễ thấy, ta chỉ cần chứng minh (1) sai. Chọn M sao cho $f(x) < M < \min\{f(y),\ f(z)\}$. Theo tính chất của hàm liên tục, tồn tại a sao cho $z < a < x$ và $f(a) = M$, đồng thời tồn tại b sao cho $x < b < y$ và $f(b) = M$. Suy ra $f(a) = f(b)$, suy ra $a = b$ do f đơn ánh, nhưng điều này không thể xảy ra vì $a < x < b$. Vậy ta có điều giả sử là sai, tóm lại f là hàm đơn điệu. ∎

Quay trở lại bài toán, ta sẽ chứng minh f là hàm đồng biến. Thật vậy, giả sử f nghịch biến, ta có với $x < y$ thì $f(x) > f(y)$. Suy ra

$$f_2(x) = f\left(f(x)\right) < f\left(f(y)\right) = f_2(y).$$

Cứ tiếp tục như thế, ta được $f_{2009}(x) > f_{2009}(y)$, suy ra $x > y$ (mâu thuẫn). Vậy f là hàm đồng biến. Bây giờ ta giả sử tồn tại x sao cho $f(x) > x$, khi đó $f_2(x) = f(f(x)) > f(x)$, ta suy ra ngay

$$x = f_{2009}(x) > f_{2008}(x) > \cdots > f_2(x) > f(x) > x \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Tương tự với $f(x) < x$ cũng suy ra mâu thuẫn. Vậy $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

NHẬN XÉT. Với cách giải trên, ta dễ dàng giải quyết được bài toán nếu thay số 2009 bằng một số tự nhiên lẻ bất kỳ. Tuy nhiên, các bạn hãy thử suy nghĩ xem nếu thay 2009 bằng một số tự nhiên chẵn khác 0 thì kết quả sẽ như thế nào?

Qua các ví dụ trên, có thể thấy chúng đều có cách phát biểu đơn giản nhưng lời giải lại không hề đơn giản, chính điều đó đã làm nên sự thú vị cũng PTH dạng này.

Quay trở lại với dạng chính của PTH mà chúng ta đang xem xét, những bài toán sau đây một phần được trích ra từ các kỳ thi Olympic, một phần là của các tác giả sáng tác. Ta sẽ bắt đầu bằng hằng đẳng thức rất quen thuộc

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x^n) - f(y^n) = [f(x) - f(y)]\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R},$$

trong đó n là một số tự nhiên bất kỳ và lớn hơn 1.

LỜI GIẢI. Trước hết ta thử giải bài toán trong từng trường hợp cụ thể của n. Qua đó, ta sẽ thấy rõ hướng đi cần phải làm khi giải quyết bài toán với các số n bất kỳ.

- *Trường hợp* $n = 2$. Phương trình hàm ban đầu lúc này trở thành

$$f(x^2) - f(y^2) = [f(x) - f(y)]\,(x + y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Ta không thể tính được $f(0)$, vì trên thực tế $f(x) = ax + b$ là một lớp hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán, như vậy giá trị $f(0)$ là không cố định. Trong trường hợp này, ta sẽ đặt hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó $g(0) = 0$, và ta cũng thu được phương trình hàm tương tự

$$g(x^2) - g(y^2) = [g(x) - g(y)]\,(x + y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Thay $y = 0$, ta có $g(x^2) = xg(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thay trở lại vào phương trình (1), ta có

$$g(x)y = g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây cho $y = 1$, ta có ngay $g(x) = xg(1) = ax$, và do đó

$$f(x) = ax + f(0) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- *Trường hợp* $n = 3$. Đây là một bài toán trong đề thi của Moldova năm 2004

$$f(x^3) - f(y^3) = [f(x) - f(y)]\,(x^2 + xy + y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Cũng bằng lập luận tương tự như ở trường hợp $n = 2$, ta xét hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó $g(0) = 0$ và

$$g(x^3) - g(y^3) = [g(x) - g(y)]\,(x^2 + xy + y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Thay $y = 0$, ta có $g(x^3) = x^2 g(x)$. Thay trở lại vào phương trình (2), ta có

$$(x + y)g(x)y = (x + y)g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Ở đây, chúng ta không được quyền triệt tiêu $(x + y)$ ở hai vế của phương trình hàm trên, vì sau đó ta không thể so sánh được $g(x)y$ và $g(y)x$ với $x + y = 0$. Tuy vậy, ta vẫn có thể chứng minh được

$$g(x)y = g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, do $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là một hàm thỏa nên ta có thể giả sử g không đồng nhất với 0. Khi đó, dễ dàng chứng minh được

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Với mọi số thực x, y bất kỳ, luôn tồn tại số thực x_0 sao cho cả $x + x_0$ và $y + x_0$ đều khác không. Từ đó ta suy ra $g(x)x_0 = g(x_0)x$ và $g(y)x_0 = g(x_0)y$, do vậy

$$g(x)y = g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Tương tự trường hợp $n = 2$, ta cũng chứng minh được $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là các hàm thoả đề.

- Trường hợp tổng quát xem như là bài tập cho các bạn. $\square$

Bài toán trên giới thiệu cho chúng ta 1 phương pháp giải phương trình hàm đó là xét 1 hàm mới liên quan, từ đó suy ra các phương trình mới từ các phương trình hàm cũ, mà việc giải chúng dễ dàng hơn. Đồng thời cũng cho ta thấy rằng, không phải lúc nào ta cũng tính được $f(0)$ như mong muốn, vì vậy ta cần phải xử lý một cách linh hoạt hơn.

Tiếp theo là một bài thi trong đề IMO, bắt nguồn từ một đẳng thức rất quen thuộc, được dùng khá nhiều trong việc chứng minh bất đẳng thức

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (xa + yb)^2 + (xb - ya)^2.$$

Bài toán 5 (IMO 2002). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \quad \forall x,\ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Cho $x = y = z = t = 0$, ta được $4f^2(0) = 2f(0)$ suy ra $f(0) = 0 \vee f(0) = \dfrac{1}{2}$. Đến đây ta xét hai trường hợp.

- *Trường hợp* $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Thay $z = y = t = 0$, ta có

$$\left[f(x) + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm này thỏa.

- *Trường hợp* $f(0) = 0$. Thay $z = t = 0$, ta thu được

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

  Do vậy f nhân tính, suy ra $f(x^2) = f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều này chứng tỏ f sẽ nhận giá trị không âm với mọi x không âm. Cho $x = 0$, $t = 1$, ta có

$$f(z)(f(y) + f(1)) = f(-z) + f(yz),$$

  suy ra $f(z) = f(-z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$. Như vậy f là hàm chẵn.

  Dễ thấy $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là một hàm thỏa. Xét trường hợp f không đồng nhất với 0. Khi đó, ta chứng minh

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

  Giả sử $\exists x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 \neq x_2$ sao cho $f(x_1) = 0$, $f(x_2) \neq 0$. Vì f nhân tính nên

$$f(x_2) = f\left(\frac{x_2}{x_1} \cdot x_1\right) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) f(x_1) = 0 \text{ (mâu thuẫn)}.$$

  Như vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó, ta cũng sẽ có $f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \neq 0$.

  Xét mọi x, $y > 0$, cho $z = t = \sqrt{xy}$, ta thu được

$$[f(x) + f(\sqrt{xy})][f(y) + f(\sqrt{xy})] = f(x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}).$$

  Mà do f nhân tính nên ta có

$$\left[f(x)+f\left(\sqrt{xy}\right)\right]\left[f(y)+f\left(\sqrt{xy}\right)\right]=f\left(\sqrt{xy}\right)\left[f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(\sqrt{y}\right)\right]^2$$

và

$$f\left(x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}\right)=f\left(\sqrt{xy}(x+y)\right)=f\left(\sqrt{xy}\right)f\left(x+y\right).$$

Từ đó ta suy ra $f\left(x+y\right)=\left[f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(\sqrt{y}\right)\right]^2$ hay

$$\sqrt{f(x+y)}=f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(\sqrt{y}\right),\quad \forall x,\ y>0.$$

Hơn nữa, do $f(x)=f^2\left(\sqrt{x}\right)$ và $f(x)>0,\ \forall x>0$ nên ta có $\sqrt{f(x)}=f\left(\sqrt{x}\right)$, $\forall x>0$. Kết hợp với trên, ta được

$$\sqrt{f(x+y)}=\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)},\quad \forall x,\ y>0.$$

Dến đây ta xét hàm $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ sao cho $\sqrt{f(x)}=g(x),\ \forall x>0$. Dễ dàng suy ra được g vừa là hàm nhân tính, vừa là hàm cộng tính. Khi đó, ta dễ dàng có $g(x)=x,\ \forall x>0$, dẫn đến $f(x)=x^2,\ \forall x>0$, mà f lại là hàm chẵn và $f(0)=0$, ta sẽ có ngay hàm cần tìm là

$$f(x)=x^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Tóm lại, có 3 hàm thỏa phương trình đã cho là $f(x)=x^2$, $f(x)=0$ và $f(x)=\dfrac{1}{2}$. □

Nhận xét. Diểm nhấn của lời giải trên chính là việc suy ra được tính chẵn của hàm số f và tính không âm với các giá trị của biến không âm. Dây được coi là hai điều quan trọng, không chỉ đối với bài toán này, mà còn hữu dụng trong rất nhiều bài phương trình hàm khác. Ngoài ra, còn một điều đáng để ý trong lời giải trên chính là phép thế $z=t=\sqrt{xy}$, điều này bắt nguồn từ việc ta muốn đơn giản hoá vế phải của phương trình hàm.

Việc ta dự đoán "khá chính xác" $f(x)=x^2$ là một hàm thỏa đã đưa ta đến việc xét hàm số $g(x)=\sqrt{f(x)}$, và thực sự điều này giúp ta giải quyết bài toán một cách khá dễ dàng. Dây cũng là một kinh nghiệm nhỏ, khi ta dự đoán một hàm nào đó thỏa phương trình hàm đã cho, ta có thể xét một hàm mới liên quan, mà việc giải hàm mới này "dễ dàng" hơn, từ đó suy ra hàm cần tìm.

Lời giải chính thức của bài toán trên dựa trên phương trình hàm sau

$$f(x-y)+f(x+y)=2\left[f(x)+f(y)\right],\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Dồng thời ta cũng có thể chứng minh được $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0,+\infty)$. Các bạn hãy thử giải phương trình hàm trên dựa trên ý tưởng này.

Chúng ta cùng qua một bài toán khác trong kỳ thi China MO, xuất phát từ hằng đẳng thức quen thuộc $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$. Diều đặc biệt là đề bài không yêu cầu ta tìm các hàm thỏa.

Bài toán 6 (China MO 1996). *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x^3+y^3)=(x+y)\left[f^2(x)-f(x)f(y)+f^2(y)\right],\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(1996x)=1996f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Việc làm này sẽ mang lại cho bài toán một cái nhìn tổng quát hơn, đồng thời các bạn cũng không bị bối rối khi gặp con số 1996 hay một con số nào khác. Ta có

- $P(0, 0) : f(0) = 0$.
- $P(x, 0) : f(x^3) = xf^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Từ đây, ta suy ra ngay $f(x) \geq 0\ \forall x \geq 0$ và $f(x) \leq 0\ \forall x \leq 0$. Gọi

$$X = \{a \mid f(ax) = af(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Ta sẽ chứng minh nếu $a \in X$ và $a > 0$ thì $a + 1 \in X$. Thật vậy, giả sử

$$f(ax) = af(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vì $f[(a+1)\cdot 0] = (a+1)f(0) = 0$ nên ta xét $x \neq 0$. Xét $P\left(x, \sqrt[3]{a}x\right)$, ta có

$$f(x^3 + ax^3) = \left(x + \sqrt[3]{a}x\right)\left[f^2(x) - f(x)f\left(\sqrt[3]{a}x\right) + f^2\left(\sqrt[3]{a}x\right)\right]. \tag{3}$$

Theo hệ thức (1) và (2), ta lại có

$$axf^2(x) = af(x^3) = f(ax^3) = f\left(\left(\sqrt[3]{a}x\right)^3\right) = \sqrt[3]{a}xf^2\left(\sqrt[3]{a}x\right),$$

hay tương đương

$$\sqrt[3]{a}x\left[\sqrt[3]{a}f(x) - f\left(\sqrt[3]{a}x\right)\right]\left[\sqrt[3]{a}f(x) + f\left(\sqrt[3]{a}x\right)\right] = 0.$$

Do $a > 0$ nên x, $\sqrt[3]{a}x$ cùng dấu, suy ra $\sqrt[3]{a}f(x) + f\left(\sqrt[3]{a}x\right) \neq 0$. Từ đó, theo trên ta được

$$\sqrt[3]{a}f(x) = f\left(\sqrt[3]{a}x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Sử dụng kết quả này, ta viết được (3) lại thành

$$\begin{aligned} f\left((a+1)x^3\right) &= x\left(1 + \sqrt[3]{a}\right)\left[f^2(x) - f(x)\sqrt[3]{a}f(x) + \sqrt[3]{a^2}f^2(x)\right] \\ &= xf^2(x)\left(1 + \sqrt[3]{a}\right)\left(1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}\right) = f(x^3)(a+1). \end{aligned}$$

Do mỗi số thực đều có căn bậc 3 nên ta suy ra

$$f\left((a+1)x\right) = (a+1)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Vì $1 \in X$ nên $n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n = 1996$, ta có ngay kết quả bài toán. □

Nhận xét 1. Việc suy ra dấu của $f(x)$ từ hệ thức (1) là quan trọng, nó giúp ta triệt tiêu bình phương mà không cần xét dấu, đây cũng là một điều đáng lưu ý trong rất nhiều bài toán khác.

Nhận xét 2. Với đề bài tương tự, liệu có thể tìm được các hàm f thoả mãn không? Nếu không, cần phải thêm vào bài toán những điều kiện gì?

Những bài phương trình hàm ở trên là những bước khởi động cho những bài phương trình hàm sau đây, tất cả đều dựa trên hằng đẳng thức quen thuộc

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Tất cả những lời giải sắp được trình bày dưới đây đều có những ý tưởng "sử dụng lại", mà công việc của các bạn là tìm ra, hiểu và áp dụng chúng.

Bài toán sau được lấy trong đề China TST, có một chút "biến thể", là xuất phát từ

$$\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}.$$

Bài toán 7 (China TST 2007). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thoả mãn*

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{Q}^+.$$

Lời giải. Việc hàm f không xác định tại $x = 0$ đã gây một chút khó khăn khi "dự đoán" hàm f là hàm gì. Trong những trường hợp này, ta thường hay thử tính các giá trị của f tại các giá trị đặc biệt nào đó, và thường là $f(1)$, $f(2)$, ... (do ta đang làm việc trên tập các số hữu tỉ dương). Ta có

- $P(1,\ 1) : 4f(1) = \dfrac{f(1)}{f(2)}$, suy ra $f(2) = \dfrac{1}{4}$.
- $P(2,\ 2) : \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 8f(4) = \dfrac{f(4)}{f(4)}$, suy ra $f(4) = \dfrac{1}{16}$.
- $P(1,\ 2) : f(1) + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{1}{4f(3)}$. (1)
- $P(1,\ 3) : f(1) + f(3) + 6f(3) = \dfrac{f(3)}{f(4)} = 16f(3)$. (2)

Từ (1) và (2), ta dễ dàng giải ra được $f(1) = 1$, $f(3) = \dfrac{1}{9}$. Như vậy ta có một "dự đoán": hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ là hàm thoả mãn yêu cầu bài toán. Trên thực tế, đây chính là kết quả cần tìm, và vì vậy vậy ta sẽ đi chứng minh

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Nên nhớ, ta đang làm trên tập hữu tỉ dương, bởi vậy cách tốt nhất là chứng minh trên tập số nguyên dương trước rồi suy ra trên tập hữu tỉ. Xét $P(x,\ 1)$, ta có

$$f(x) + 1 + 2xf(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)},$$

hay tương đương
$$\frac{1}{f(x)} + 2x + 1 = \frac{1}{f(x+1)}.$$

Từ đẳng thức này, ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(n) = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k > 1$, tức là $f(k) = \dfrac{1}{k^2}$. Khi đó với $n = k + 1$, ta có

$$\frac{1}{f(k+1)} = \frac{1}{f(k)} + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

từ đó suy ra $f(k+1) = \dfrac{1}{(k+1)^2}$. Như vậy khẳng định vẫn đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có ngay khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.

Tiếp đến, ta cũng sẽ chứng minh khẳng định sau bằng quy nạp

$$f(nx) = \frac{f(x)}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{Q}^+.$$

Hiển nhiên $f(1 \cdot x) = f(x) = \dfrac{f(x)}{1^2}$ nên ta có khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$f(kx) = \frac{f(x)}{k^2}.$$

Khi đó với $n = k + 1$, ta có

- $P(x, k) : f(x) + \dfrac{1}{k^2} + 2xkf(xk) = \dfrac{f(xk)}{f(x+k)}$, suy ra $k^2 + 2xk + \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x+k)}$.
- $P(x, 1) : \dfrac{1}{f(x)} + 2x + 1 = \dfrac{1}{f(x+1)}$, suy ra $\dfrac{1}{f(x+k)} + 2(x+k) + 1 = \dfrac{1}{f(x+k+1)}$.

Từ hai điều trên ta suy ra

$$\frac{1}{f(x+k+1)} = k^2 + 2xk + \frac{1}{f(x)} + 2(x+k) + 1.$$

Ta lại có $P(x, k+1) : f(x) + \dfrac{1}{(k+1)^2} + 2x(k+1)f(x(k+1)) = \dfrac{f(x(k+1))}{f(x+k+1)}$, hay

$$\frac{f(x)}{f(x(k+1))} + \frac{1}{(k+1)^2 f(x(k+1))} + 2x(k+1) = \frac{1}{f(x+k+1)}.$$

Kết hợp với trên, ta được

$$\frac{f(x)}{f(x(k+1))} + \frac{1}{(k+1)^2 f(x(k+1))} + 2x(k+1) = k^2 + 2xk + \frac{1}{f(x)} + 2(x+k) + 1.$$

Từ đó

$$\frac{f(x)}{f(x(k+1))} + \frac{1}{(k+1)^2 f(x(k+1))} = (k+1)^2 + \frac{1}{f(x)}.$$

Với $g(x) = f(x(k+1))$, coi đây là phương trình theo ẩn $f(x)$, ta dễ dàng giải ra được $f(x) = (k+1)^2 g(x)$. Như vậy

$$f(x(k+1)) = \frac{f(x)}{(k+1)^2}.$$

Khẳng định do đó vẫn đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.

Bây giờ, cho $x = \dfrac{m}{n}$ bất kỳ, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta có $f\left(n \cdot \dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{f\left(\frac{m}{n}\right)}{n^2}$, từ đó

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = n^2 f(m) = \frac{n^2}{m^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Như vậy, hàm duy nhất thỏa phương trình hàm ban đầu là $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{Q}^+$. $\square$

Bài toán sau đây là một chút "sáng tạo" của các tác giả, dựa trên hoàn toàn đẳng thức $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, nhưng khi đi tìm lời giải, chúng tôi lại không ngờ nó khá "hóc búa", và thực sự bài toán này chứa đựng rất nhiều điều thú vị mà chúng ta cần học hỏi.

Bài toán 8. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f^2(x+y) = f(x^2) + 2f(x)f(y) + f(y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Cho $x = y = 0$, ta có $f^2(0) = 2f(0) + 2f^2(0)$, suy ra $f(0) = 0 \vee f(0) = -2$. Như vậy, ta cần xét hai trường hợp sau.

- *Trường hợp* $f(0) = 0$. Cho $y = 0$, ta tìm được $f^2(x) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta suy ra

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

  Thay $f(x^2) = f^2(x)$ và $f(y^2) = f^2(y)$ vào phương trình ban đầu, ta được

$$f^2(x+y) = [f(x) + f(y)]^2, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

  Thay $y = -x$, ta dễ dàng suy ra được f là hàm lẻ. Như vậy $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ và $f(x) \leq 0$, $\forall x \leq 0$. Do đó, (1) sẽ tương đương với

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R},\ xy \geq 0.$$

  Ta cần chứng minh f cộng tính ngay cả khi x, y trái dấu (hiển nhiên đúng khi một trong hai số bằng 0). Thật vậy, nếu x, y là hai số trái dấu, thì $x + y$ phải cùng dấu với $-x$ hoặc $-y$, suy ra $f(x+y) + f(-y) = f(x)$ hoặc $f(x+y) + f(-x) = f(y)$. Cả hai điều này kết hợp với tính lẻ của hàm f, ta đều thu được

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

  Như vậy f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$, kết hợp với $f(x^2) = f^2(x)$ ta suy ra $f(x) = 0$ và $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hai hàm thỏa.

- *Trường hợp* $f(0) = 2$. Khi đó ta có

$$P(x, 0) : f^2(x) = f(x^2) - 4f(x) - 2.$$

  Từ đó $f(x^2) = f^2(x) + 4f(x) + 2$. Thay trở lại vào phương trình ban đầu, ta được

$$\begin{aligned} f^2(x+y) &= f^2(x) + 4x + 2 + 2f(x)f(y) + f^2(y) + 4f(y) + 2 \\ &= [f(x) + f(y) + 2]^2, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.(2) \end{aligned} \tag{2}$$

  Bây giờ thay $y = -x$ ở phương trình (2), ta có

$$[f(x) + f(-x) + 2]^2 = f^2(0) = 4. \tag{3}$$

  Đến đây, ta sẽ xét ba trường hợp sau

  - $f(x) + f(-x) + 2 = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  - $f(x) + f(-x) + 2 = -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  - $f(x) + f(-x) + 2 = 2$, $\forall x \in X$ và $f(x) + f(-x) + 2 = -2$, $\forall x \in Y$, trong đó X, Y là hai tập hợp sao cho $X \cup Y = \mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại một số a sao cho $f(a) + f(-a) + 2 = 2$, hay $f(a) + f(-a) = 0$. Dễ thấy $a \neq 0$, và ta có thể giả sử $a > 0$. Gọi $F(x)$ là phép thế x vào (2). Ta có

- $F(-a) : f^2(a) = f\left((-a)^2\right) - 4f(-a) - 2$.
- $F(-a) : f^2(-a) = f\left((-a)^2\right) - 4f(-a) - 2 = f(a^2) - 4f(-a) - 2$.

Hơn nữa $f(a) = f^2(-a)$ do $f(a) + f(-a) = 0$, nên từ đó ta suy ra $f(a) = f(-a)$, như vậy $f(a) = f(-a) = 0$. Mặt khác, xét $F(\sqrt{a})$, ta có

$$f^2(\sqrt{a}) = f(a) - 4f(\sqrt{a}) - 2 = -4f(\sqrt{a}) - 2,$$

hay

$$f^2(\sqrt{a}) + 4f(\sqrt{a}) + 2 = 0.$$

Coi $f(\sqrt{a})$ là ẩn, ta giải được $f(\sqrt{a}) = \sqrt{2} - 2 \vee f(\sqrt{a}) = -\sqrt{2} - 2.$ (4)

Ta tiếp tục xét các phép thế sau

- $F(a) : f^2(a) = f(a^2) - 4f(a) - 2$, suy ra $f(a^2) = 2$ (vì $f(a) = 0$).
- $P(a, a) : f^2(2a) = 2f(a^2) + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 4.$
- $P(2a, -a) : 0 = f^2(2a - a) = f(4a^2) + 2f(2a)f(-a) + f(a^2) = f(4a^2) + 2$, suy ra $f(4a^2) = -2$.
- $P(2a, 2a) : f^2(4a) = 2f(4a^2) + 2f^2(2a) = 2(-2) + 2 \cdot 4 = 4$, suy ra

$$f(4a) = 2 \vee f(4a) = -2. \tag{5}$$

- $F(2\sqrt{a}) : f^2(2\sqrt{a}) = f(4a) - 4f(2\sqrt{a}) - 2$, suy ra

$$f^2(2\sqrt{a}) = -4f(2\sqrt{a}) \vee f^2(2\sqrt{a}) = -4f(2\sqrt{a}) - 4 \text{ (do (5))}.$$

  Coi $f(2\sqrt{a})$ là ẩn, ta giải được

$$f(2\sqrt{a}) = 0 \vee f(2\sqrt{a}) = -4 \vee f(2\sqrt{a}) = -2. \tag{6}$$

Tuy nhiên, ta lại có $P(\sqrt{a}, \sqrt{a}) : f^2(2\sqrt{a}) = 2f(a) + 2f^2(\sqrt{a})$, suy ra

$$f^2(2\sqrt{a}) = 2\left(\sqrt{2} - 2\right)^2 \vee f^2(2\sqrt{a}) = 2\left(\sqrt{2} + 2\right)^2 \text{ (do (4))}.$$

Kết hợp với (6), ta suy ra điều vô lý. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) + f(-x) + 2 \neq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó $f(x) + f(-x) + 2 = -2$, hay

$$f(x) + f(-x) = -4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ ta xét hàm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $g(x) = f(x) + 2$. Khi đó ta có

$$g(x) + g(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ phương trình hàm ban đầu, ta thu được

$$[g(x + y) - 2]^2 = g(x^2) + 2[g(x) - 2][g(y) - 2] + g(y^2) - 4,$$

hay tương đương

$$g^2(x + y) - 4g(x + y) = g(x^2) + g(y^2) + 2g(x)g(y) - 4[g(x) + g(y)]. \tag{8}$$

Lại có $f^2(x) = f(x^2) - 4f(x) - 2$ nên $[g(x) - 2]^2 = g(x^2) - 2 - 4[g(x) - 2] - 2$, hay

$$g^2(x) = g(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Thế $-x$ vào x và $-y$ vào y ở hệ thức (8), kết hợp với (7) và (9), ta có

$$g^2(-x-y) - 4g(-x-y) = g(x^2) + g(y^2) + 2g(-x)g(-y) - 4\left[g(-x) + g(-y)\right].$$

Phương trình này tương đương với

$$g^2(x+y) + 4g(x+y) = g(x^2) + g(y^2) + 2g(x)g(y) + 4\left[g(x) + g(y)\right], \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (8), ta suy ra ngay

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (9) và sử dụng kết quả "bài toán chìa khóa", ta suy ra

$$g(x) = x \vee g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

do đó $f(x) = x - 2 \vee f(x) = -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dễ dàng kiểm tra đây là hai hàm thoả.

Tóm lại, phương trình hàm ban đầu có 4 hàm thỏa là $f(x) = 0$, $f(x) = -2$, $f(x) = x$ và $f(x) = x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

NHẬN XÉT. Có lẽ khi xem lời giải, ai cũng tự hỏi rằng là "Tại sao lại giải như thế ?". Nhưng nếu để ý kỹ, tác giả đã đi theo một hướng hoàn toàn tự nhiên:

Tính $f(0)$, đoán hàm $\rightarrow$ Thử trường hợp $\rightarrow$ Cố gắng áp dụng "bài toán chìa khóa".

Có thể thấy, lời giải trên hoàn toàn sơ cấp, và cả hai trường hợp đều sử dụng kết quả "bài toán chìa khóa" để tìm ra hàm thoả. Tuy rằng lời giải là vậy, nhưng rất mong bạn đọc gần xa sẽ quan tâm và cố gắng đi tìm lời giải khác.

Bây giờ chúng ta cùng đến với một bài toán khác, cũng dựa trên $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, nhưng cũng rất thú vị như sau

Bài toán 9. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f^2(x+y) = f(x^2) + 2f(xy) + f(y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

LỜI GIẢI. Ta có $P(0,\ 0) : f^2(0) = 4f(0)$, suy ra $f(0) = 0 \vee f(0) = 4$. Như vậy, ta cần xét hai trường hợp.

- *Trường hợp* $f(0) = 4$. Ta xét hai phép thế
  - $P(x,\ 0) : f^2(x) = f(x^2) + 3f(0) = f(x^2) + 12$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  - $P(-x,\ 0) : f^2(-x) = f(x^2) + 3f(0) = f(x^2) + 12$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

  Vậy $f^2(x) = f^2(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta lại có $P(x,\ -x) : f^2(0) = 2f(x^2) + 2f(-x^2)$, hay $8 = f(x^2) + f(-x^2)$. Do vậy ta có

  $$8 = f(x) + f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Coi $f(x)$ và $f(-x)$ là hai ẩn, từ hai điều trên ta suy ra

  $$f(x) = f(-x) = 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Vậy $f(x) = 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là một hàm thoả.

- *Trường hợp* $f(0) = 0$. Ta có
$$P(x,\ 0) : f^2(x) = f(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

  Suy ra $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, $P(x,\ -x) : f^2(0) = 2f(x^2) + 2f(-x^2)$, hay $0 = f(x^2) + f(-x^2)$. Từ đây, ta có $0 = f(x) + f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy f là hàm lẻ.

  Dễ thấy hàm $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm thoả. Ta xét hàm f không đồng nhất với 0. Khi đó ta chứng minh
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

  Giả sử tồn tại $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^*,\ x_1 \neq x_2$ sao cho $f(x_1) \neq 0$ và $f(x_2) = 0$. Do f là hàm lẻ nên ta giả sử $x_1,\ x_2 > 0$. Từ phương trình hàm ban đầu và hệ thức (1), ta được $f^2(x + y) \geq f^2(y),\ \forall x,\ y > 0$, suy ra
$$f(x) \geq f(y), \quad \forall x > y > 0.$$

  Ta có $P(x_1,\ x_2) : f^2(2x_2) = 2f^2(x_2) + 2f^2(x_2) = 0$ suy ra $f(2x_2) = 0$. Như vậy nếu $f(x_2) = 0$ thì $f(2x_2) = 0$. Khi đó dễ dàng có $f(2^n x_2) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Chọn n đủ lớn sao cho $2^n x_2 > x_1$. Khi đó ta có $0 = f(2^n x_2) \geq f(x_1) > 0$, vô lý. Vậy
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

  Khi đó, từ hệ thức (1) suy ra $f^2(1) = f(1)$, suy ra $f(1) = 1$. Ta chứng minh
$$f(nx) = nf(x), \quad \forall x > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

  Trước hết, ta sẽ chứng minh nếu $k \in \mathbb{N}$ thoả (2) thì $k + 1$ cũng thoả (2). Thật vậy, xét phép thế $P(kx,\ x)$:
$$\begin{aligned} f^2\left((k+1)x\right) &= f^2(kx) + 2f(kx^2) + f^2(x) = k^2 f^2(x) + 2kf^2(x) + f^2(x) \\ &= (k^2 + 2k + 1)f^2(x) = (k+1)^2 f^2(x), \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

  Suy ra $f\left((k+1)x\right) = (k+1)f(x),\ \forall x > 0$. Vì 1 thoả (2) nên mọi $n \in \mathbb{N}^*$ cũng thoả (2). Do f là hàm lẻ, ta suy ra
$$f(nx) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

  Từ đây ta dễ dàng có $f(q) = q,\ \forall q \in \mathbb{Q}$. Bằng cách làm tương tự ở "bài toán chìa khóa", sử dụng 2 điều sau

  - f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
  - $f(q) = q,\ \forall q \in \mathbb{Q}$.

  Ta suy ra $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy đây là hàm thoả.

Tóm lại, PTH ban đầu có 3 hàm thoả là $f(x) = 0,\ f(x) = 4$ và $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

Nhận xét. Việc dự đoán hàm thỏa ở bài này là khá dễ dàng. Tuy nhiên ở trường hợp 2 (tức $f(0) = 0$), có 1 điều thú vị là ta không suy ra f cộng tính, nhưng lại có tính chất của hàm cộng tính, đó là $f(nx) = nf(x)$, và từ đó suy ra kết quả bài toán. Qua đó, cho ta được một kinh nghiệm, nếu không suy ra "tính chất" nào đó của hàm f thì hãy thử đi tìm những tính chất khác có mối quan hệ mật thiết với "tính chất" mà mình cần.

Đây cũng là một ví dụ, cho thấy được sự hiệu quả từ việc chứng minh trên tập $\mathbb{N}$, dẫn đến tập $\mathbb{Q}$ và kết luận ở tập $\mathbb{R}$. Xin giới thiệu bài toán tổng quát, đây xem như là bài tập dành cho các bạn: *Với $n > 1$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f^2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^2) + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} f(x_j x_k), \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

3 Tổng kết và bài tập đề nghị

Bài viết đến đây là kết thúc. Các tác giả đã cố gắng trình bày những điều thú vị nhất về PTH dạng này đến bạn đọc, nhưng chắc chắn thế là chưa đủ. Mong rằng qua bài viết này, các bạn sẽ có thêm niềm yêu thích ở môn Toán nói chung và PTH nói riêng. Sau đây là một số bài tập cho các bạn rèn luyện.

Bài tập 1. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$, $\forall x \neq 0$.

Bài tập 2 (IMO 1992). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + f^2(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x^2 + f(y) - y\right) = f^2(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 4. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f^2(x - y) = f(x^2) - 2f(x)f(y) + f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 5. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(2x + f(y)\right) = f(2x) + xf(2y) + f\left(f(y)\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 6. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x - f(y)\right) = f(x) + xf(y) + f\left(f(y)\right) - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$