

Sử dụng tính chất ánh xạ giải một số lớp phương trình hàm

Nguyễn Đình Thức
Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

Trong chương trình toán phổ thông ta thường gặp các bài toán giải tích thuận Cho hàm số $y=f(x)$ trong đó $f(x)$ được xác định cụ thể từ đó xác định các tính chất của hàm số như tính đơn điệu; tuần hoàn; liên tục; cực trị;... Tuy nhiên các bài toán thi chọn học sinh giỏi lại có yêu cầu ngược lại. Bài viết đề cập đến phương pháp sử dụng tính chất ánh xạ; hàm số để giải một số phương trình hàm

1 Phương pháp thay giá trị để xác định hàm số

Khi thay giá trị biến số bởi giá trị đặc biệt tương thích điều kiện ban đầu nhằm tạo ra phương trình theo $f(u(x))$. Tiếp tục từ $f(u(x))$ suy ra $f(x)$

Ví dụ 1. Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả điều kiện :

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x); \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Nhận xét : Từ (1) không thể suy ra trực tiếp $f(u(x))$ Giải pháp có thể là cố định một biến và xét phương trình hàm của biến còn lại

+) Cho biến x cố định

Cho $x = 1$ vào (1) ta có :

$$f(f(y) + 1) = y + f(1) \forall y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Cho $y = f(1) - 1$ vào (2) ta được $f(f(f(1) - 1) + 1) = -1$

Vậy với $a = f(f(1) - 1) + 1$ thì $f(a) = -1$

+) Cho biến y cố định

Thay $y = a$ vào (1) và sử dụng $f(a) = -1$ ta có $f(0) = xa + f(x)$ Đặt $f(0) = b$ ta có

$$f(x) = -ax + b \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được

$$-a[x(-ay + b) + x] = xy - ax + b \Leftrightarrow a^2xy - abx = xy + b \quad (4)$$

Do (4) đúng $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nên $a = \pm 1; b = 0$ Vậy $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$

Thử lại thì hai kết quả đều thoả

Chú ý : Bài toán tổng quát giải được tương tự là :Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả $f((af(y) + b)g(x)) = cxy + df(x)$; với $a; b; c; d$ là hằng số

Ví dụ 2. Xác định hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện :

$$f(-x) = -f(x); \forall x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$f(x+1) = f(x) + 1; \forall x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (7)$$

Nhận xét : Thay đổi số bởi biểu thức để sử dụng điều kiện giả thiết ta làm giảm đi các biến hàm. Tiếp tục cho tới khi ta được phương trình theo $f(x)$ Khi $x \neq 0; -1$ thì viết $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{x+1}}$ và dùng giả thiết (3) ta có

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \quad (8)$$

viết $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ và dùng giả thiết (6) ta có

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x+1}\right) \quad (9)$$

Tiếp tục và dùng giả thiết (7); (6) ta có

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{f(x) + 1}{(x+1)^2} \quad (10)$$

Từ (8), (9), (10) suy ra

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left(1 + \frac{f(x) + 1}{(x+1)^2}\right) \quad (11)$$

Mặt khác theo (9) (10) ta có

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2} \quad (12)$$

Từ (11), (12) suy ra

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left(1 + \frac{f(x) + 1}{(x+1)^2}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2}$$

$\Rightarrow$ Khi $x \neq 0; -1$ thì $f(x) = x$

Khi $x = 0$ thì $f(0) = 0$

Khi $x = -1$ thì $f(-1) = -f(1) = -1$

Thử lại $f(x) = x; \forall x \in \mathbb{R}$ thoả bài toán

2 Phương pháp dùng tính chất toàn ánh; đơn ánh để xác định hàm số

Ví dụ 3. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trong đó f là toàn ánh thoả :

$$f(0) = 2 \quad (13)$$

và

$$f(2x + 1 + f(y)) = 3x + f(f(y)); \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (14)$$

Tính $f(2010)$

Nhận xét Nếu có $f(y) = a(*)$ thì dùng (14) ta được $f(2x + a) = 3x + f(a)$; từ đó tìm $f(x)$ Điều giả định (*) đúng khi f là toàn ánh

Giải : Từ giả thiết f là toàn ánh suy ra tồn tại y để $f(y) = 0$

Cho biến số $f(y) = 0$ vào (14) và dùng (13) ta có

$$f(2x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot \frac{x-1}{2} + 2 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Vậy :

$$f(2010) = 3 \cdot 1005 + \frac{1}{2} = \frac{6031}{2}$$

Bài toán tổng quát :

Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là toàn ánh thoả :

$$f(0) = c \quad (15)$$

Và

$$f(ax + b + f(y)) = dx + f(f(y)); \forall x, y \in \mathbb{R}; a, b, c, d$$

Ví dụ 4. Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả điều kiện :

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (16)$$

Nhận xét : Nếu có

$$f(x_0) = 0 \quad (17)$$

thì sử dụng (16) ta có $f(f(y)) = y$; Vấn đề là điều kiện nào để (17) đúng

Giải : Chứng minh f là toàn ánh

Thật vậy : cho $x = 0$ vào (16) ta có

$$f(f(y)) = (f(0))^2 + y; \forall y \in \mathbb{R} \quad (18)$$

Xét $c \in \mathbb{R}$ từ (18) ta xác định tạo ảnh của là $b = f(c - (f(0))^2)$ Thật vậy

$$f(b) = f(f(c - (f(0))^2)) = (f(0))^2 + c - (f(0))^2 = c$$

+) Sử dụng tính chất toàn ánh :

Ta thấy tồn tại a để $f(a) = 0$

Cho $x = y = a$ vào (16) và sử dụng $f(a) = 0$ ta có $f(0) = a$ Cho $x = 0; y = a$ vào (16) và sử dụng $f(a) = 0$ ta có $f(0) = a^2 + a$ Từ 2 kết quả trên suy ra $a = 0$

+) Cho $x = 0$ vào (16) và sử dụng $f(0) = 0$ ta có $f(f(y)) = y; \forall y \in \mathbb{R}$

+) Cho $y = 0$ vào (16) và sử dụng $f(0) = 0$ ta có

$$f(xf(x)) = (f(x))^2 \quad (19)$$

Tiếp tục thay x bởi $f(x)$ và sử dụng $f(f(x)) = x$ ta có

$$f(f(x).x) = x^2 \quad (20)$$

Từ (19) và (20) suy ra $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$ Ta thấy không xảy ra trường hợp ở 2 vị trí $c; d$ khác nhau mà có đồng thời $f(c) = c; f(d) = -d$ Vậy $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = x$; hoặc $f(x) = -x$

Ví dụ 5. (Đề dự tuyển IMO-2002): Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa điều kiện :

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x); \forall x; y \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Nhận xét : Nếu có $f(x_0) = 0$ thì dùng (21) ta được $f(y) = 2x_0 + f(f(y) - x_0)$. Từ đó ta suy ra được $f(x)$

Giải :

Ta chứng minh f là toàn ánh

Thật vậy : Cho $y \in \mathbb{R}$ và chọn

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(f(0) - y) \\ b = -f(a) \\ c = f(b) - a \end{cases}$$

Khi đó $f(c) = f(f(b) - a)$

Mà theo giả thiết $f(f(b) - a) = f(f(a) + b) - 2a$ và cách chọn $b = -f(a) \Rightarrow f(c) = f(0) - 2a$;

Mà theo cách chọn $f(0) = 2a + y$ nên $f(c) = y$.

Sử dụng tính chất toàn ánh :

Tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ để $f(x_0) = 0$ và :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R} \text{ để } f(t) = x + x_0 \quad (22)$$

Theo giả thiết (21) thì

$$f(f(x_0) + t) = 2x_0 + f(f(t) - x_0) \quad (23)$$

Từ (22) và (23) suy ra $x + x_0 = 2x_0 + f(x)$

Suy ra $f(x) = x - x_0$

Ví dụ 6. Tìm hàm số $f : R \rightarrow R$ thoả điều kiện :

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y \forall x; y \in \mathbb{R} \quad (24)$$

Nhận xét Nếu cho $x = 0$ vào (24) thì $f(f(y)) = y$ Nếu có $f(x_0) = 0$ thì dùng (24) có $f(x^2) = xf(x) + x_0$

Giải :

+) Ta chứng minh f là song ánh

Cho $x = 0$ ta có $f(f(y)) = y$

Xét $c \in \mathbb{R}$ và chọn $b = f(c)$ thì $f(b) = f(f(c)) = c$ Vậy f là toàn ánh Mặt khác nếu $f(u) = f(v)$ thì $f(f(u)) = f(f(v)) \Rightarrow u = v$ Vậy f là đơn ánh

+) Sử dụng tính chất song ánh :

Ta thấy tồn tại duy nhất a để $f(a) = 0$ Khi đó cho $x = a$ và $y = 0$ vào (24) có $f(a^2 + f(0)) = 0$

$$\Rightarrow f(0) = f(f(a^2 + f(0))) = a^2 + f(0)$$

Vậy $a = 0$ và $f(0) = 0$

+) Cho $y = 0$ vào (24) ta có $f(x^2) = xf(x)$

Thay x bởi $f(x)$ và dùng tính chất $f(f(x)) = x$: ta được $f(f(x).f(x)) = f(x).x$ Vậy $f(f(x).f(x)) = f(x^2)$ Theo tính chất song ánh thì $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$ Ta thấy không đồng thời xảy ra $f(a) = a$ và $f(b) = -b$ Vậy $f(x) = x$; hoặc $f(x) = -x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

Chú ý

1/ Nếu hàm số $f : R \rightarrow R$ thoả $f(af(x) + bf(y)) = g(x)f(x) + cy + d$ thì cho x cụ thể ta được đẳng thức chứa y và suy ra f là toàn ánh

2/ Nếu hàm số $f : R \rightarrow R$ thoả $f(f(x)) = ax + b$ thì f là đơn ánh

3/ Nếu có song ánh $f : R \rightarrow R$ và $f(x^2) = xf(x); f(f(x)) = x$ thì $f(x) = x$; hoặc $f(x) = -x$

3 Dùng tính chẵn lẻ, tuần hoàn giải phương trình hàm

Cách giả cho các bài toán trên là thay giá trị để xác định các tính chất chẵn lẻ; tuần hoàn; từ đó định dạng hàm số

Ví dụ 7. Tìm hàm số $f : R \rightarrow R$ thoả điều kiện :

$$f(x + y) = f(x - y); \forall x; y \in \mathbb{R} \quad (25)$$

Nhận xét :

+ Cho $x = 0$ ta thấy hàm số f chẵn

+ Sử dụng tính chất chẵn để định dạng $f(x)$

Thế

$$\begin{cases} x = a \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

vào (25) ta có $f(a+x) = f(a-x)$ Mà $f(a-x) = f(x-a)$ nên

$$f(a+x) = f(x-a); \quad (26)$$

Cho x bởi $x-a$ vào (25) ta có $f(x) = f(x-2a)$, mà a tùy ý Vậy f là hàm hằng :
 $f(x) = c$

Ví dụ 8. Tìm các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa điều kiện :

$$f(x) - f(y) = (x^2 - y^2)g(x-y); \forall x; y \in \mathbb{R} \quad (27)$$

Giải :

+)Ta chứng minh các hàm số trên đều chẵn

Cho $y = 0$ vào (27) ta có

$$f(x) - f(0) = x^2 g(x) \quad (28)$$

Biểu diễn :

$$f(x) - f(y) = f(x) - f(0) - f(y) + f(0)$$

và dùng (28) ta có :

$$f(x) - f(y) = x^2 g(x) - y^2 g(y)$$

So sánh với giả thiết (27) có

$$x^2 g(x) - y^2 g(y) = (x^2 - y^2)g(x-y)$$

Cho $x = 0$ và $y \neq 0$ tùy ý ta có $g(y) = g(-y)$

Vậy g là hàm chẵn và từ (28) suy ra f chẵn

+) Sử dụng tính chất chẵn để định dạng $f(x); g(x)$ Trong (27) thay y bởi $-y$ ta có
 $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2)g(x+y)$ Vậy $g(x+y) = g(x-y)$ Chọn

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

khi đó

$$\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases}$$

Thế vào (27) ta có : $g(u) = g(v)$ Vậy g là hàm hằng : $g(x) = c$ và $f(x) = f(0) + cx^2$

Ví dụ 9. Tìm các hàm số thỏa điều kiện :

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy; \forall x; y \in \mathbb{R} \quad (29)$$

Giải :

+)Ta chứng minh hàm số f lẻ

Giả sử $f(0) = a$ cho $x = y = 0$ vào (29) ta có

$$f(a) = a^2 \quad (30)$$

cho $x = y = a$ vào (29) ta có

$$f(a) = (f(a))^2 - a^2 \quad (31)$$

Từ (30) và (31) ta có $a^4 = 2a^2$

Mặt khác :

cho $x = a; y = 0$ vào (29) ta có

$$f(f(a)) = f(a) - a + af(a) = a^3 + a^2 - a \quad (32)$$

cho $x = y = f(a)$ vào (29) ta có

$$f(a) = (f(f(a)))^2 - (f(a))^2 \Rightarrow (f(f(a)))^2 = a^4 + a^2 \quad (33)$$

Từ (32) và (33) ta có

$$a^4 + a^2 = (a^3 + a^2 - a)^2$$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} a^4 = 2a^2 \\ a^4 + a^2 = (a^3 + a^2 - a)^2 \Leftrightarrow a = 0 \end{cases}$$

Vậy $f(0) = 0$ Cho $y = 0$ vào (29) ta có $f(f(x)) = f(x); \forall x \in \mathbb{R}$ (29) Trở thành

$$f(x - y) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy$$

Cho $x = 0$ ta có $f(-y) = -f(y); \forall y \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số đã cho lẻ

+) Sử dụng tính chất chẵn để định dạng $f(x)$;

Thay $x = y$ vào đẳng thức

$$f(x - y) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy$$

Ta suy ra $(f(x))^2 = x^2$

Vậy $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x; \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại 2 kết quả trên đều thỏa

Ví dụ 10. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa điều kiện :

$$f(0) = 0; f(1) = 2 \quad (34)$$

$$f(2+x) = f(2-x); f(3+x) = f(3-x); \forall x \in \mathbb{R} \quad (35)$$

Tìm số nguyên x lớn nhất trong khoảng $(-2000; 2000)$ để $f(x) = 0$

Giải :

Sử dụng giả thiết (35) để suy ra tính tuần hoàn của hàm số Ta có : $f(2+x) = f(2-x)$
suy ra $f(2+x-2) = f(2-x+2)$. Vậy

$$f(x) = f(4-x) \quad (36)$$

Tương tự $f(3+x) = f(3-x)$ suy ra $f(3+x-3) = f(3-x+3)$.

Vậy

$$f(x) = f(6 - x) \quad (37)$$

Từ (36) và (37) có $f(4 - x) = f(6 - x)$ suy ra $f(t) = f(t + 2)$ Vậy

$$f(t) = f(t + 2) = f(t + 4) = \dots = f(t + 2k)$$

Theo giả thiết $f(0) = 0; f(1) = 2$

Vậy khi x nguyên ta có

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = 2k \\ 2 & \text{khi } x = 2k + 1 \end{cases}$$

Suy ra $2k$ (k nguyên) là họ nghiệm nguyên duy nhất của $f(x) = 0$

Nghiệm x lớn nhất trong $(-2000; 2000)$ để $f(x) = 0$ là 1998

Ví dụ 11. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa điều kiện :

$$f(i) = i; i = 1; 2; \dots; 8; \quad (38)$$

$$f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2}f(x); \forall x \in \mathbb{R} \quad (39)$$

Tìm $f(k)$ khi k là số nguyên

Giải :

Cho x bởi $x + 1$ vào (39) ta có :

$$f(x + 2) + f(x) = \sqrt{2}f(x + 1) \quad (40)$$

Từ (39) và (40) suy ra

$$f(x + 2) + f(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2}f(x) - f(x - 1))$$

Vậy

$$f(x + 2) - f(x) = -\sqrt{2}f(x - 1). \quad (41)$$

Cho x bởi $x + 1$ vào (41) ta có :

$$f(x + 3) - f(x + 1) = -\sqrt{2}f(x) \quad (42)$$

Từ (39) và (42) suy ra

$$f(x + 3) - f(x + 1) = -f(x + 1) - f(x - 1))$$

Vậy $f(x + 3) = -f(x - 1)$

Suy ra $f(x + 4) = -f(x)$ và $f(x + 8) = f(x)$ Sử dụng giả thiết (38) ta có $f(k) = i$ khi $k = 8n + i; i = 1; 2; \dots; 8$

Ví dụ 12. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả điều kiện :

$$f(0) = 0; \quad (43)$$

$$\text{tồn tại } a \text{ để } f(a) = -1 \text{ và } f(x) \leq 1 \text{ khi } x \in [0; 2a] \quad (44)$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y); \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (45)$$

Chứng minh $f(x) \leq 1; \forall x \in \mathbb{R}$

Giải :

Cho $x = y = 0$ vào (45) ta có : $2f(0) = 2[f(0)]^2$

Mà theo giả thiết (43) thì suy ra $f(0) = 0$

Cho $x = a; y = 0$ vào (45) ta có : $2f(a) = 0$ (trái với (44))

Cho $x = y$ vào (45) ta có :

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1 \quad (46)$$

Cho $x = y = a$ vào (46) ta có :

$$f(2a) = 1 \quad (47)$$

Từ (46) và (47) suy ra $f(4a) = 2[f(2a)]^2 - 1 = 1$ Cho x bởi $x + 2a$ và y bởi $x - 2a$ vào (45) ta có :

$$f(2x) + f(4a) = 2f(x+2a)f(x-2a)$$

Vậy

$$f(2x) = 2f(x+2a)f(x-2a) - 1 \quad (48)$$

Từ (48) và (47) suy ra

$$[f(x)]^2 = f(x+2a)f(x-2a) \quad (49)$$

Cho x tùy ý và y bởi $2a$ vào (45) ta có

$$f(x+2a) + f(x-2a) = 2f(x)f(2a) = 2f(x) \quad (50)$$

Từ (49) và (50) suy ra $f(x+2a) = f(x-2a) = f(x)$ Vậy hàm số f tuần hoàn mà theo giả thiết $f(x) \leq 1$ khi $x \in [0; 2a]$ Suy ra $f(x) \leq 1; \forall x \in \mathbb{R}$

4 Dựa vào tính đơn điệu của hàm số

Ví dụ 13. Tìm hàm số đồng biến

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

thoả điều kiện :

$$f^{(k)}(x) = x; \forall x \in \mathbb{R} \quad (51); \quad k \text{ nguyên dương cho trước} \quad (51)$$

trong đó

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)); f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$$

Giải :

Ta chứng minh $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x$

Thật vậy nếu ngược lại tồn tại số thực a mà $f(a) \neq a$

TH1: $f(a) < a$ mà f đồng biến nên :

$$f(f(a) < f(a); f^{(3)}(a) < f(f(a)); \dots; f^{(k)}(a) < f^{(k-1)}(a)$$

Suy ra $f^{(k)}(a) < a$ (trái với (51))

TH2: $f(a) > a$ mà f đồng biến nên :

$$f(f(a) > f(a); f^{(3)}(a) > f(f(a)); \dots; f^{(k)}(a) > f^{(k-1)}(a)$$

Suy ra $f^{(k)}(a) > a$ (trái với (51)) Vậy $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x$

Ví dụ 14. Cho số thực a và hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ đồng biến thỏa điều kiện :

$$f(x+y) = f(x) + ay; \forall x; y \in \mathbb{R} \quad (52)$$

Chứng minh $a > 0$

Giải : Ta biến đổi (52) đưa về dạng $g(x+y) = g(x)$ Xét hàm

$$g(x) = f(x) - ax \quad (53)$$

Theo giả thiết thì

$$g(x) + ax \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \quad (54)$$

Thay (53) vào giả thiết (52) của bài toán ta có

$$g(x+y) + a(x+y) = g(x) + ax + ay \Leftrightarrow g(x+y) = g(x) \quad (55)$$

Do (55) đúng $\forall x; y \in \mathbb{R} \Rightarrow g(y) = g(0) = c; c$ là hằng số ; $\forall y \in \mathbb{R}$ Vậy

$$g(x) = c; \forall x \in \mathbb{R} \quad (56)$$

Từ (54) và (56) suy ra $g(x) + ax = c + ax$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Vậy $a > 0$

Ví dụ 15. Tìm hàm số đồng biến thỏa điều kiện :

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \forall x; y \in \mathbb{R} \quad (57)$$

Giải: Sử dụng tính đơn điệu chứng minh : $f(x) = ax$ khi $x \in \mathbb{R}^+; f(0) = 0$; và từ $f(-x) = f(x)$ suy ra $f(x) = ax$ khi $x \in \mathbb{R}$;

+) Sử dụng (57) có $f(n) = nf(1); \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Và

$$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n}); \forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = \frac{f(1)}{n} \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Tiếp tục sử dụng (57) có

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m\frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}$$

$f(1)$;

$$\forall m; n \in \mathbb{Z}^+$$

Đặt $f(1) = a$. khi đó $\forall r \in \mathbb{Q}^+$ ta có

$$f(r) = ar \quad (58)$$

Ta xét số thực x dương và các dãy hữu tỉ $(r_n); (s_n)$ dương thoả $r_n < x < s_n$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$$

Do f đồng biến nên $f(r_n) < f(x) < f(s_n)$

Sử dụng (58) suy ra $ar_n < f(x) < as_n$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta có $f(x) = ax$

+) Cho $x = y = 0$ và (57) ta có

$$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Cho $y = -x$ vào (57) ta có $f(0) = f(x) + f(-x)$

Vậy: $f(-x) = -f(x); \forall x \in \mathbb{R}$

Với $x < 0$ ta có $f(x) = -f(-x) = -a(-x) = ax$

Vậy $f(x) = ax; \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 16. Tìm hàm đồng biến $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa điều kiện :

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x; \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải : Xét hàm số

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (59)$$

Theo giả thiết thì

$$f\left(\frac{x^2}{xg(x)}\right) = x \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{g(x)}\right) = x$$

Do cách đặt (59) nên

$$\frac{x}{g(x)}g\left(\frac{x}{g(x)}\right) = x \Leftrightarrow g(x) = g\left(\frac{x}{g(x)}\right) \quad (60)$$

Thay x bởi $\frac{x}{g(x)}$ vào (60) ta có

$$g\left(\frac{x}{g(x)}\right) = g\left(\frac{x}{g(x)g\left(\frac{x}{g(x)}\right)}\right) = g\left(\frac{x}{g^2(x)}\right) \quad (61)$$

(60) , (61) và quy nạp có $g(x) = g(\frac{x}{g^n(x)})$ Do (59) suy ra

$$g(x) = \frac{f(\frac{x}{g^n(x)})}{\frac{x}{g^n(x)}} \Leftrightarrow f(\frac{x}{g^n(x)}) = \frac{x}{g^{n-1}(x)}$$

Mặt khác :Ta có $f(\frac{x^2}{f(x)}) = x$ Cho x bởi $f(x)$ ta được $f(\frac{f^2(x)}{f(f(x))}) = f(x)$ Mà f tăng nên

$$\frac{f^2(x)}{f(f(x))} = x$$

suy ra

$$\frac{f(f(x))}{f(x)} = \frac{f(x)}{x}$$

Khi đó :

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(x) &\Rightarrow g(xg(x)) = g(x) \\ &\Rightarrow g(x) = g(xg(x)g(xg(x))) = g(xg(x)g(x)) = g(xg^2(x)) \\ &\Rightarrow g(x) = g(xg^n(x)) \end{aligned}$$

Xét

$$f(xg^n(x)) = xg^n(x)g(xg^n(x)) = xg^n(x)g(x) = xg^{n+1}(x). \quad (62)$$

Từ đây ta chứng minh $g(x)$ là hằng số Thật vậy : nếu g giảm và cho $u < v$ thì

$$g(u) > g(v) \quad (63)$$

Mặt khác $u < v$ thì $f(u) < f(v)$ nên $ug(u) < vg(v)$. Khi đó $f(ug(u)) < f(vg(v))$. Dựa vào nhận xét (63) và quy nạp suy ra $ug^n(u) < vg^n(v)$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{v} < \left(\frac{g(v)}{g(u)}\right)^n. \quad (64)$$

Dựa vào (64) để xây dựng dãy và suy ra điều vô lý Tương tự khi xét g tăng Vậy $g(x) = c$ và $f(x) = cx$

Ví dụ 17. Cho $f : R^+ \rightarrow R^+$ thỏa điều kiện : $f(f(x) + y) = xf(1 + xy)$ Tìm $f(x)$ **Giải :** Ta xác định tính đơn điệu hàm f

Gs: $v > u > 0$ và hàm f không giảm Chọn

$$\begin{aligned} w &= \frac{vf(v) - uf(u)}{v - u} \\ \Rightarrow w - f(u) &= \frac{vf(v) - uf(u) - vf(u) + uf(u)}{v - u} = v \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \geq 0 \\ w - f(v) &= \frac{vf(v) - uf(u) - vf(v) + uf(v)}{v - u} = u \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \geq 0 \end{aligned}$$

Khi đó ta có $f(f(x) + y) = xf(1 + xy)$ suy ra

$$f(w) = f(f(u) + w - f(u)) = uf(1 + u(w - f(u))) = uf(1 + uv \frac{f(v) - f(u)}{v - u}) \quad (65)$$

$$f(w) = f(f(v) + w - f(v)) = vf(1 + v(w - f(v))) = vf(1 + uv \frac{f(v) - f(u)}{v - u}) \quad (66)$$

Từ (71) và (72) suy ra: $u = v$ (vô lý) Vậy f là hàm giảm Theo giả thiết $f(f(x) + y) = xf(1 + xy)$;

TH1: $x > 1$. Chọn $1 + xy = x$, suy ra

$$f(f(x) + \frac{x-1}{x}) = xf(x).$$

Ta chứng minh $f(x) = \frac{1}{x}$

Thật vậy :Nếu $f(x) > \frac{1}{x}$ thì $xf(x) > 1$

$$\Rightarrow f(f(x) + \frac{x-1}{x}) > 1 \quad (67)$$

Mặt khác f giảm và

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{x-1}{x} &= f(x) - \frac{1}{x} + 1 > 1 \\ \Rightarrow f(f(x) + \frac{x-1}{x}) &< 1 \text{ (trái với (67))} \end{aligned}$$

Tương tự : Nếu $f(x) < \frac{1}{x}$ thì $xf(x) < 1$

$$\Rightarrow f(f(x) + \frac{x-1}{x}) < 1 \quad (68)$$

Mặt khác f giảm và

$$f(x) + \frac{x-1}{x} = f(x) - \frac{1}{x} + 1 < 1 \Rightarrow f(f(x) + \frac{x-1}{x}) > 1 \text{ (trái với (68))}$$

TH 2: $0 < x < 1$. Chọn $y = 1$, suy ra

$$f(f(x) + 1) = xf(1 + x) \quad (69)$$

Do $1+x > 1$ nên $xf(1+x) = \frac{x}{1+x}$ Ta lại có $f(x)+1 > 1$ nên $f(f(x)+1) = \frac{1}{f(x)+1}$

Vậy

$$(69) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)+1} = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

TH 3: $x = 1$. Ta có

$$f(f(1) + y) = f(1 + y) \quad (70)$$

Ta CM $f(1) = 1$. Thật vậy

Nếu $f(1) > 1$ mà f giảm nên $f(f(1) + y) < f(1 + y)$ (không thỏa (70))

Nếu $f(1) < 1$ mà f giảm nên $f(f(1) + y) > f(1 + y)$ (không thỏa (70))

Vậy : $f(1) = 1$

Tóm lại $f(x) = \frac{1}{x}$

Ví dụ 18. (IMO-1992):

Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa điều kiện :

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2; \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (71)$$

Giải Ta cần chứng minh hàm số có điểm bất động và xét tính đơn điệu; tính tuyến tính để từ đó định dạng hàm

+) Ta chứng minh f là song ánh

-Nếu có số thực u, v thỏa $f(u) = f(v)$

Lấy x tùy ý và dùng (71) ta có

$$f(x^2 + f(u)) = f(x^2 + f(v))$$

Sử dụng (71) ta được $u + (f(x))^2 = v + (f(x))^2$.

Vậy $u = v \Rightarrow f$ là đơn ánh

-Cho $x = 0$ và y thay đổi vào (71) ta có

$$f(f(y)) = y + (f(0))^2; \forall y \in \mathbb{R} \quad (72)$$

Với $y = k$ nào đó ta chọn $b = f(k - (f(0))^2)$.

Khi đó $f(b) = f(f(k - (f(0))^2)) = k - (f(0))^2 + (f(0))^2 = k$

Vậy f là toàn ánh

Từ 2 kết quả trên suy ra f là song ánh

+) Ta chứng minh $f(f(x)) = x; \forall x \in \mathbb{R}$

Cho $x = 0$ và y tùy ý vào (71) ta có

$$f(f(y)) = y + (f(0))^2; \forall y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(0) = b$ ta có

$$f(f(y)) = y + b^2; \forall y \in \mathbb{R}; \quad (73)$$

Do f là song ánh nên tồn tại a để $f(a) = 0$ Cho $x = y = a$ vào (71) ta có

$$f(a^2) = a; \quad (74)$$

Theo (73) ta có

$$f(f(a^2)) = a^2 + b^2; \quad (75)$$

Từ (74) và (75) suy ra $a^2 + b^2 = f(a) = 0$ Vậy $a = b = 0$; thế vào (73) có $f(f(y)) = y$
Tức là

$$f(f(x)) = x \quad (76)$$

+) Ta chứng minh f cộng tính và đồng biến Cho $y = 0$ vào (71) có $f(x^2) = (f(x))^2$
 Vậy $f(x) \geq 0$ khi $x \geq 0$ Dùng (76) ta có :

Xét

$$f(x+y) = f(x+f(f(y))) = f(y) + (f(\sqrt{x}))^2 = f(x) + f(y)$$

Xét $u > v$ thì $u - v > 0$ nên $f(u - v) > 0$

Mà hàm trên cộng tính nên $f(u) > f(v)$

Vậy hàm f đồng biến , vậy $f(x) = kx$

Mà $f(1) = 1$ nên $f(x) = x$